

## MODELOWANIE PRĘTÓW OSŁABIONYCH UKŁADEM PERIODYCZNYCH NACIEĆ POWIERZCHNIOWYCH

Marek Chalecki, Wiesław Nagórko

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**Streszczenie.** W pracy rozważane są pręty sprężyste o przekroju prostokątnym, w których w warstwie brzegowej, górnej i dolnej rozmieszczone są periodycznie pionowe naciecia (pęknięcia). Znanе równanie, opisujące drgania wzdłużne pręta jednorodnego o stałym przekroju, nie może tu być zastosowane, bo pręt z pęknięciami ma zmienną wysokość przekroju i zmiana ta zależy od czasu. Wykorzystując technikę uśredniania tolerancyjnego, skonstruowano model uśredniony nieasympotycznie, opisujący drgania wzdłużne prętów z periodycznym układem pęknięć. Jako przykład rozpatrzono drgania pręta jednostronnie utwierdzonego.

**Słowa kluczowe:** drgania, drgania wzdłużne prętów, modelowanie prętów, technika uśredniania tolerancyjnego

### WSTĘP

Drganiom prętów poświęcono obszerną literaturę, której przegląd można znaleźć np. w monografii Kaliskiego i in. [1966] i której nie będziemy tutaj omawiać.

Rozważać będziemy drgania prętów sprężystych o przekroju prostokątnym, w których w warstwie brzegowej, górnej i dolnej, rozmieszczone są periodycznie pionowe naciecia o głębokości  $\delta$ . Naciecia te powtarzają się w okresie  $l$  (rys. 1). Jeżeli  $x \in (l/2, L-l/2)$ , gdzie  $L$  jest długością pręta, to część pręta wyznaczoną przez przedział  $(x-l/2, x+l/2)$  nazwiemy komórką periodyczności.

Drgania wzdłużne pręta jednorodnego i o stałym przekroju opisuje znane równanie:

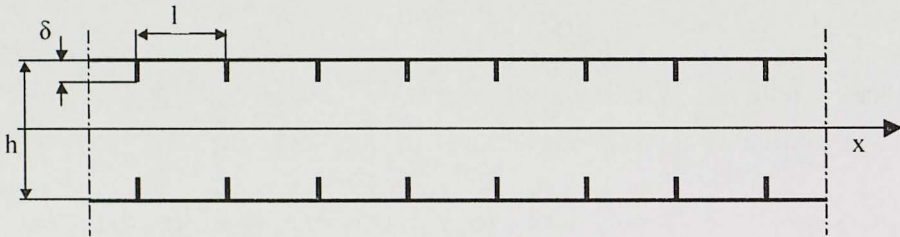
$$\ddot{w} - C^2 w_{,xx} = 0 \quad (1)$$

gdzie:  $\ddot{w}$  – druga pochodna po czasie,

$w_{,xx}$  – druga pochodna po  $x$ ,

$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , gdzie  $E$  jest modułem Younga i  $\rho$  – gęstością masy.

Równanie (1) nie jest przydatne, gdy pręt ma powierzchniowe nacięcia, zmienia się bowiem wtedy wysokość przekroju pręta; przy ścisaniu pręt taki zachowa się jak pręt bez pęknięć, a więc jak pręt o stałej grubości  $h$  (o stałym przekroju); przy rozciąganiu grubość będzie opisana funkcyjnie:  $h = h(x, t)$ .



Rys. 1. Pręt sprężysty z poprzecznymi szczelinami powierzchniowymi  
Fig. 1. A spring bar with crosswise near-boundary cracks

Z założenia o periodycznym rozmieszczeniu defektów wynika, że funkcja  $h(x, t)$  jest funkcją periodyczną o okresie  $l$ . Ponadto dla odkształceń  $\varepsilon(x, t) = w_{,x}(x, t)$  oraz obszarów zdefiniowanych w postaci:  $L_+ = \{(x, t), \varepsilon(x, t) > 0\}$ ,  $L_- = \{(x, t), \varepsilon(x, t) < 0\}$ ,  $L_0 = \{(x, t), \varepsilon(x, t) = 0\}$  mamy:

$$h(x, t) = \begin{cases} h & x \in L_- \cup L_0 \\ h^{eff}(x, t) & x \in L_+ \end{cases}$$

Model uproszczony drgań pręta skonstruujemy, stosując jedną z metod homogenizacji nieasymptotycznej, mianowicie technikę uśredniania tolerancyjnego [Woźniak i Wierzbicki, 2000].

## TECHNIKA UŚREDNIANIA TOLERANCYJNEGO

W technice uśredniania tolerancyjnego przyjmuje się, że poszukiwane pole przemieszczeń  $w = w(x, t)$  może być aproksymowane w następujący sposób:

$$w(x, t) = u(x, t) + g(x)v(x, t) \quad (2)$$

gdzie funkcja  $u(x, t)$  jest poszukiwanym przemieszczeniem uśrednionym, funkcja  $v = v(x, t)$  poszukiwaną fluktuacją opisującą wpływ układu periodycznych pęknięć na przemieszczenie, a  $g = g(x)$  postulowaną funkcją kształtu.

O funkcjach  $u$  i  $v$  występujących w równaniu (2) zakłada się, że są wolno zmienne, tzn. spełniające warunek dla dwu dowolnych argumentów z tej samej komórki periodyczności, wartości funkcji oraz pochodnych (do odpowiedniego rzędu) od tych argumentów są nierozróżnialne w pewnej ustalonej tolerancji.

Funkcja kształtu ( $g$ ) powinna być periodyczna i oscylująca.

Równania uzyskane po zastosowaniu techniki uśredniania tolerancyjnego mają postać:

$$\langle Eh \rangle u_{,xx} + \langle Ehg_{,x} \rangle v_{,x} - \langle \rho h \rangle \ddot{u} = 0$$

$$\langle Ehg_{,x}^2 \rangle v + \langle Ehg_{,x} \rangle u_{,x} - \langle \rho h \rangle \ddot{v} = 0 \tag{3}$$

gdzie dla dowolnej funkcji  $f$  oznaczono  $\langle f \rangle(x) = \frac{1}{l} \cdot \int_{x-l/2}^{x+l/2} f(y) dy$  dla  $x \in (l/2, L-l/2)$ .

W szczególnym przypadku, gdy wymiar  $l$  dąży do zera, człon  $\langle \rho h \rangle$  w równaniach (3) można pominać. W tej sytuacji z układu (3) można wyrugować fluktuację i otrzymać równanie na przemieszczenie uśrednione:

$$\ddot{u} - C_{eff}^2 u_{,xx} = 0 \tag{4}$$

gdzie

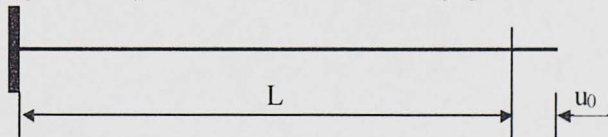
$$C_{eff}^2 = C^2 \left( 1 - \frac{\langle hg_{,x} \rangle^2}{\langle h \rangle \langle hg_{,x}^2 \rangle} \right)$$

**PRZYKŁAD**

Rozpatrzmy pręt stalowy długości  $L = 1$  m, utwierdzony, scharakteryzowany przez  $C^2 = \frac{E}{\rho} \approx 5200 \frac{m}{s}$ , który rozciągnięto początkowo o wartość  $u_0$  i zwolniono (rys. 2).

Dla takiego pręta powinny więc być spełnione następujące warunki początkowe:  $u(x, 0) = \epsilon x$ ,  $u_{,x}(x, 0) = 0$ , oraz warunki brzegowe:  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = u_0$ .

Funkcja  $u(0, t) = 0$ , opisująca zależność grubości pręta od współrzędnej  $x$ , musi uwzględniać zmienną w czasie szerokość szczeliny powierzchniowej, funkcja kształtu  $g(x)$  natomiast – przewidywany wzrost odkształcenia w miejscach występowania szczelin. Ponadto funkcja  $h(x, t)$  dla tych przedziałów jednego cyklu drgań, w których pręt jest ściskany, powinna być stała i równa  $h$ . Obie funkcje przedstawiono na rysunku 3.

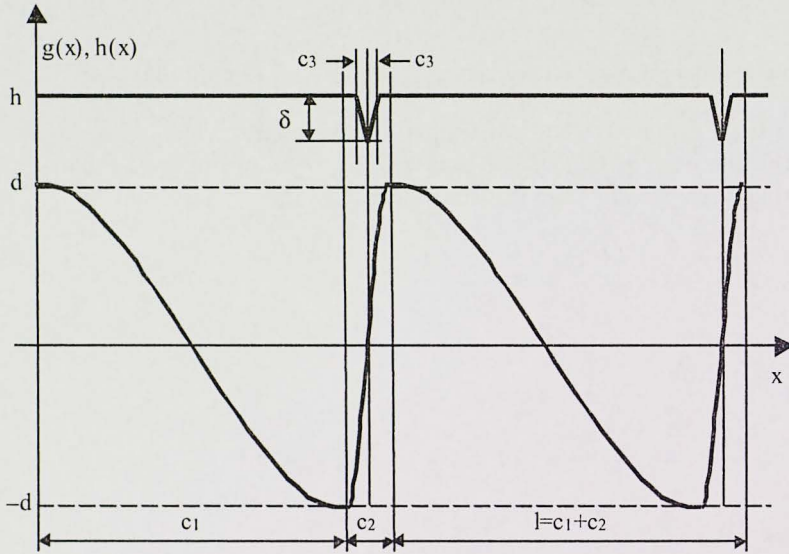


Rys. 2. Pręt rozważany w przykładzie obliczeniowym  
 Fig. 2. The bar calculating in the computational example

Funkcję kształtu przyjmujemy w postaci:

$$g(x) = \begin{cases} d \cos\left(\frac{x}{c_1}\pi\right) & \text{dla } x \in (0, c_1) \\ -d \cos\left(\frac{x-c_1}{c_2}\pi\right) & \text{dla } x \in (c_1, l) \end{cases} \quad (5)$$

gdzie  $d$ ,  $c_1$  są liczbami ustalonymi:  $c_1 < l$ ,  $d \leq l$  oraz  $c_2 = l - c_1$ .



Rys. 3. Przyjęta funkcja kształtu i funkcja określająca grubość pręta (wysokość  $h$ )  
Fig. 3. The assumed shape function and the function describing the bar thickness (height  $h$ )

Zmienną wysokość opiszemy funkcją  $h(x, t)$  tak, że dla  $t \in \left(0, \frac{T}{4}\right]$  jest:

$$h(x, t) = \begin{cases} h & \text{dla } x \in (0, c_1) \cup \left(c_1, c_1 + \frac{c_2}{2} - c_3\right) \cup \left(c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3, c\right) \\ h - \delta - \frac{\delta}{c_3} \left(x - c_1 - \frac{c_2}{2}\right) & \text{dla } x \in \left(c_1 + \frac{c_2}{2} - c_3, c_1 + \frac{c_2}{2}\right) \\ h - \delta + \frac{\delta}{c_3} \left(x - c_1 - \frac{c_2}{2}\right) & \text{dla } x \in \left(c_1 + \frac{c_2}{2}, c_1 + \frac{c_2}{2} + c_3\right) \end{cases} \quad (6)$$

gdzie  $T$  jest okresem oraz  $c_3 = \frac{1}{2}c_2 \left(1 - \frac{4t}{T}\right)$ . Z kolei dla  $t \in \left(\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right)$  funkcja  $h(x, t)$  jest stała i równa  $h$ . Z kolei dla  $t \in \left(\frac{T}{2}, T\right)$  drgania pręta przebiegają analogicznie jak dla  $t \in \left(0, \frac{T}{2}\right)$ , dlatego poprzestaniemy na rozpatrzeniu pierwszej połowy okresu drgań.

Po zdefiniowaniu  $h$  i  $g$  łatwo wyznaczyć wielkości uśrednione występujące w równaniu (4). I tak:

$$\langle h \rangle = h - \frac{\delta c_3}{l}; \quad \langle hg_{,x} \rangle = \frac{2c_2 d \delta}{lc_3 \pi} \left( \cos \frac{c_3}{c_2} \pi - 1 \right)$$

$$\langle hg_{,x}^2 \rangle = d^2 \frac{2c_2^2 c_3 h \pi^2 + c_1 c_2^2 \delta \left( \cos \frac{2c_3}{c_2} \pi - 1 \right) - 2c_3^2 \delta \pi^2 + 2c_2 c_3 h \pi^2}{4lc_1 c_2^2 c_3}$$

Zgodnie z równaniem (3) i założeniem o pominięciu  $\langle \rho h \rangle$  fluktuacja określona jest przez przemieszczenie w postaci:

$$v(x, t) = - \frac{\langle hg_{,x} \rangle}{\langle hg_{,x}^2 \rangle} u_{,x} = \frac{\delta c_1 c_2 \left(1 - \frac{4t}{T}\right)}{4dhl - 2d\delta c_1 \left(1 - \frac{4t}{T}\right)} u_{,x}$$

Rozwiązaniem równania (4) jest funkcja:

$$u(x) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2l} x \cdot \cos \frac{n\pi C}{2l} t \quad (7)$$

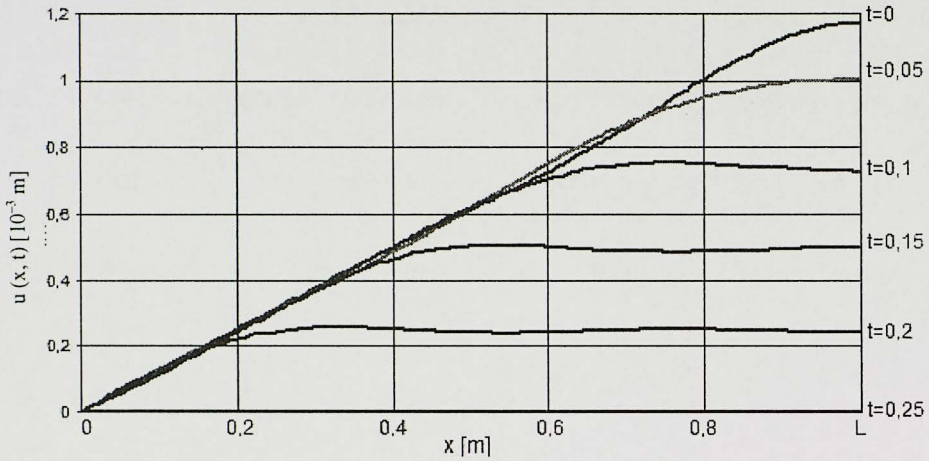
gdzie przyjęto:  $\frac{8u_0}{\pi^2} = 0,001$  m (czyli  $u_0 \approx 0,0012$  m);  $\delta = 0,25h$ ;  $c_1 = 0,9l$ ;  $c_2 = 0,1l$ ;

$d = l/3$ ;  $l = 0,1L$ . Dla tych danych współczynnik  $C_{eff}$  zmienia się od  $0,992 \frac{E}{\rho}$  dla  $t = 0$

do  $\frac{E}{\rho}$  dla  $t = T/4$ . Wykres przemieszczenia uśrednionego, określonego równaniem (7),

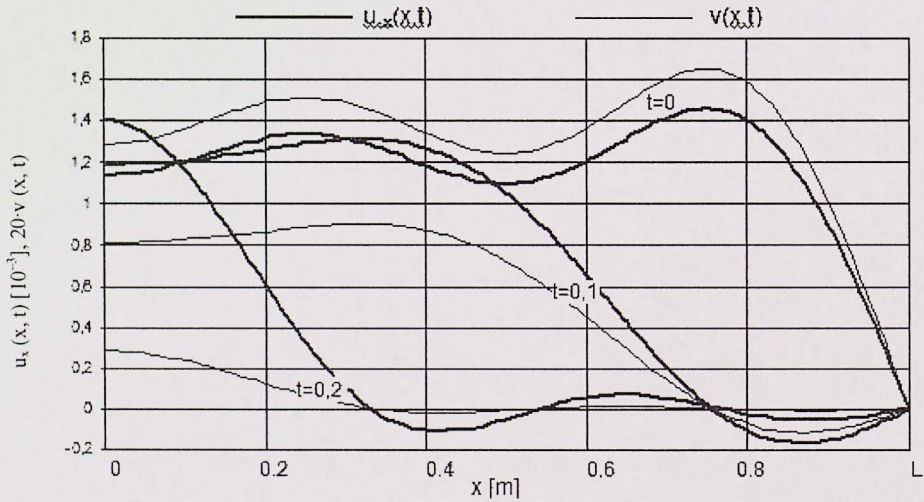
dla różnych  $x$  dla różnych chwil czasowych przedstawia rysunku 4.

Odkształcenie uśrednione, czyli pochodną funkcji (7) po  $x$ , oraz fluktuację  $v(x, t)$  przedstawiono na rysunku 5. Na rysunku tym fluktuacja jest powiększona 20-krotnie.



Rys. 4. Zależność przemieszczenia uśrednionego pręta od współrzędnej  $x$  w różnych chwilach czasowych

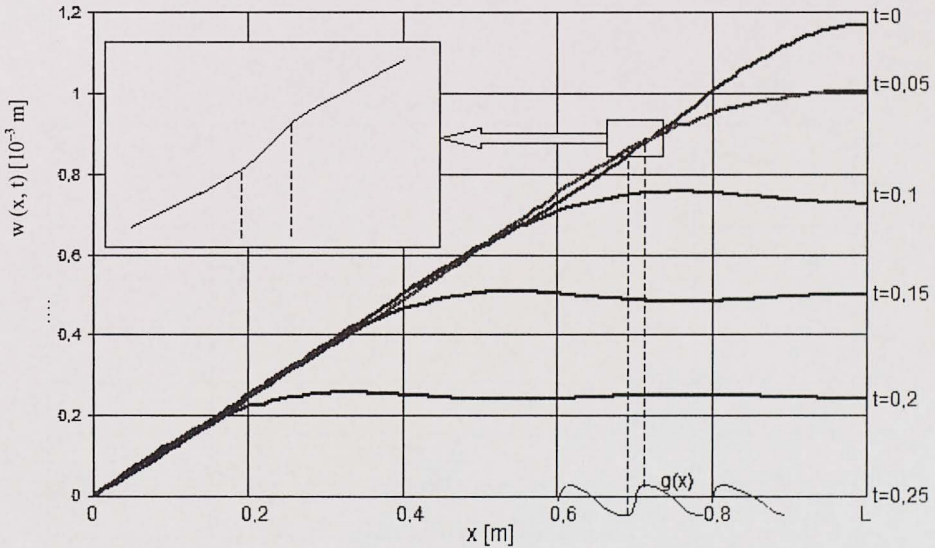
Fig. 4. The correlation between an averaged displacement of the bar and the coordinate  $x$  for various time instants



Rys. 5. Zależność odkształcenia uśrednionego pręta od współrzędnej  $x$  w różnych chwilach czasowych

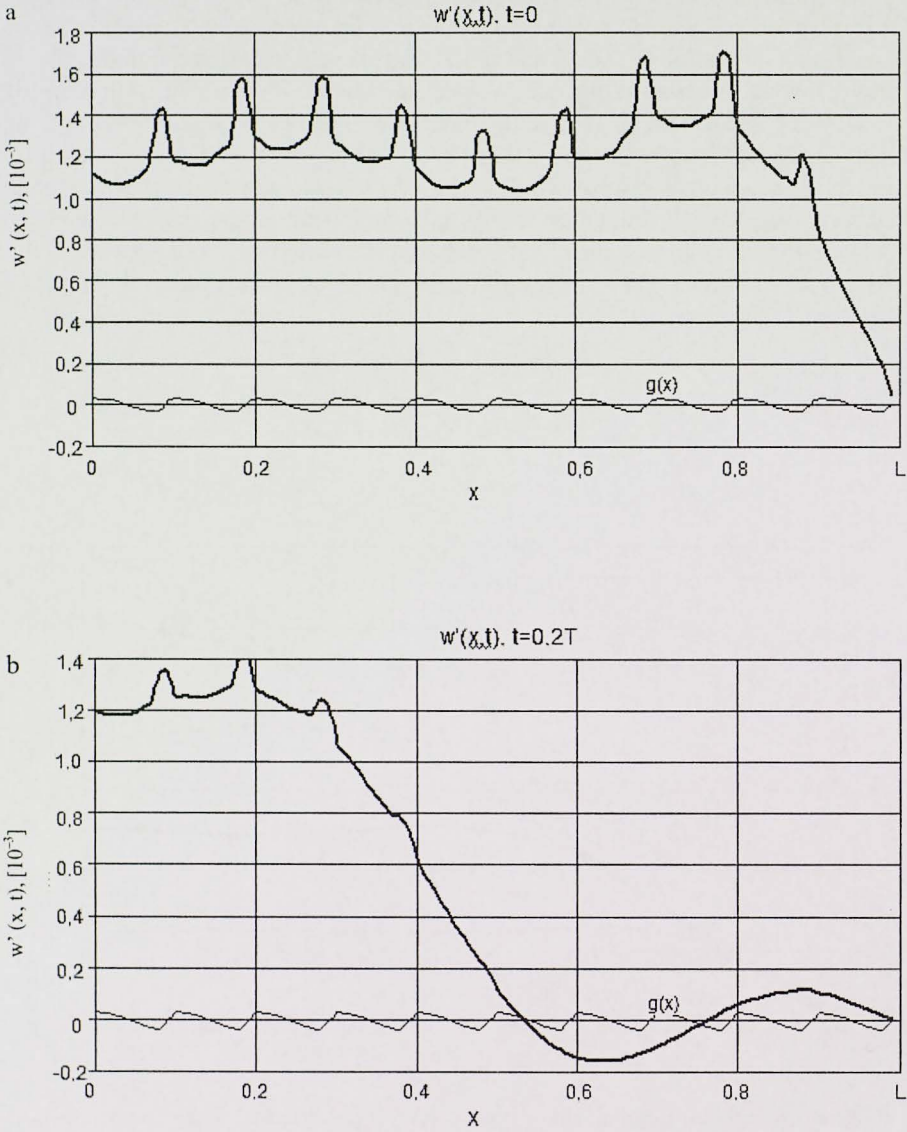
Fig. 5. The correlation between an averaged deformation of the bar and the coordinate  $x$  for various time instants

Poszukiwane przemieszczenie ( $w$ ) przedstawia rysunek 6. Wykres tego przemieszczenia jest bardzo podobny do wykresu przemieszczenia uśrednionego z rysunku 4, ale jego analiza w przedziałach odciętych, odpowiadającym wzrastającemu odcinkowi funkcji  $g(x)$ , wykazuje wzrost nachylenia wykresu, a więc większe odkształcenie, niż w pozostałych częściach pręta. Widać to wyraźnie na rysunkach 7a, b, które pokazują przebieg odkształcenia całkowitego od położenia: wzrastającym odcinkom funkcji  $g(x)$  odpowiada skokowy wzrost wartości  $w_{,x}$ , co świadczy o większym odkształceniu pręta w okolicach szczeliny. W miarę upływu czasu, a więc wraz z odprężaniem kolejnych elementów pręta i zmniejszaniem się odkształcenia, szczeliny zamykają się, co przejawia się tym, że dla większych wartości  $x$  (bliżej swobodnego końca pręta) skoki wartości  $w_{,x}$  zanikają.



Rys. 6. Zależność przemieszczenia całkowitego pręta od współrzędnej  $x$  w różnych chwilach czasowych

Fig. 6. The correlation between a total displacement of the bar and the coordinate  $x$  for various time instants



Rys. 7. Zależność odkształcenia całkowitego pręta od współrzędnej  $x$ : a – dla chwili  $t = 0$ , b – dla chwili  $t = 0,2 T$

Fig. 7. The correlation between a total deformation of the bar and the coordinate  $x$ : a – for the instant  $t = 0$ , b – for the instant  $t = 0,2 T$



## PODSUMOWANIE

Przedstawiony model drgań wzdłużnych pręta z periodycznymi pęknięciami został przeanalizowany w przypadku, w którym z układu równań na przemieszczenie średnie i fluktuację wyrugowano fluktuację, uzyskując jedno równanie na przemieszczenie uśrednione ze stałą efektywną. Stała ta zawiera człon zależny od struktury periodycznych pęknięć i zmiennej wysokości pręta rozciąganego. Rozpatrzony przykład potwierdza wpływ struktury periodycznej na uzyskane rozwiązanie.

## PIŚMIENNICTWO

- Chalecki M., Nagórko W., 2006. Drgania prętów osłabionych układem periodycznych pęknięć powierzchniowych. Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Pol. Śl., w druku.
- Kaliski S., Dźygałło Z., Solorz L., Włodarczyk E., 1966. Drgania i fale w ciałach stałych. PWN, Warszawa.
- Nagórko W., 2005. Drgania belek osłabionych periodycznym układem szczelin powierzchniowych. III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji, Augustów.
- Woźniak Cz., Wierzbicki E., 2000. Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Politechnika Częstochowska, Częstochowa.

## ON THE MODELLING OF BEAM WEAKENED BY A SYSTEM OF PERIODIC NEAR-BOUNDARY CRACKS

**Abstract.** We consider spring bars which have periodically distributed cracks in the upper and lower boundary layer, orthogonal to the bar axis, with the depth of  $\delta$ . If compressed, that beam behaves as a beam without cracks, i.e. a beam with a constant thickness (area) and mass distribution. If tensioned, both the thickness and mass distribution are different and are described by functions. This paper presents the model of such bars, obtained with use of the tolerance technique of averaging, as well as the analysis of equations describing the dynamics of these bars.

**Key words:** vibrations, longitudinal vibrations of bars, modeling of bars, tolerance averaging technique

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 30.11.2005