

MAŁE UGIĘCIE ELEMENTÓW ELASTYCZNYCH POD WPLYWEM PARCIA DYNAMICZNEGO WODY

Elżbieta Kubrak, Katarzyna Marciszewska, Marek Dohojda

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Przedstawiono metodykę obliczania małego ugięcia elementów elastycznych pod wpływem parcia dynamicznego wody wykorzystywaną do prognozowania rozkładu prędkości przepływu wody nad słabo odkształcalnymi elementami. Algorytm obliczeń zilustrowano przykładem obliczeń. Wyniki obliczeń prędkości przepływu porównano z wynikami pomiarów laboratoryjnych.

Słowa kluczowe: małe ugięcie elementów elastycznych, rozkład prędkości przepływu nad elementami odkształcalnymi

WSTĘP

Woda przepływająca nad elementami elastycznymi powoduje ich ugięcie w kierunku przepływu. Opływany element elastyczny zmniejsza przekrój strumienia i powoduje podniesienie zwierciadła wody w stosunku do przepływu bez elementów elastycznych. Badania hydrauliczne przepływu nad elementami elastycznymi wykorzystuje się do laboratoryjnego modelowania warunków przepływu nad ulegającą odkształceniu roślinnością. Poprawny opis przepływu w warunkach równomiernie rozmieszczonych elementów podlegających ugięciu stanowi przyczynek do doskonalenia metod opisu przepływu wody nad niską roślinnością elastyczną. Opis przepływu wody nad elementami elastycznymi w założeniu niewielkiego ich ugięcia, wykorzystywany do analizy warunków przepływu nad roślinnością elastyczną, można znaleźć m.in. w pracach: Klopstra i in. [1997], Erduran i Kutia [2003], Khublaryan i in. [2004]. Warunki przepływu wody w obszarze z elementami elastycznymi i nad nimi opisuje się w założeniu jednostajnego, ustalonego przepływu wody.

Adres do korespondencji – Corresponding author: Elżbieta Kubrak, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa, e-mail: kubrake@alpha.sggw.waw.pl

OPIS PRZEPIYU WODY

Różniczkowe równania ustalonego, jednostajnego przepływu z równomiernie rozmieszczonymi elementami elastycznymi o przekroju walcowym (rys. 1) wyprowadza się z bilansu sił w obszarze z elementami elastycznymi i nad nimi [Hydrauliczne podstawy... 2002]:

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dv(z)}{dz} \left| \frac{dv(z)}{dz} \right| \right) - \frac{C_w(z) m v^2(z) d}{2k^2} + \frac{gi}{k^2} = 0, \quad \text{dla } 0 \leq z \leq h_e \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dv(z)}{dz} \left| \frac{dv(z)}{dz} \right| \right) + \frac{gi}{k^2} = 0, \quad \text{dla } h_e < z \leq H \quad (1b)$$

gdzie: m – liczba elastycznych elementów na powierzchni $1,0 \text{ m}^2$,

ρ – gęstość wody,

$C_w(z)$ – współczynnik oporu opływającego elementu,

d – średnica kołowego przekroju elementu,

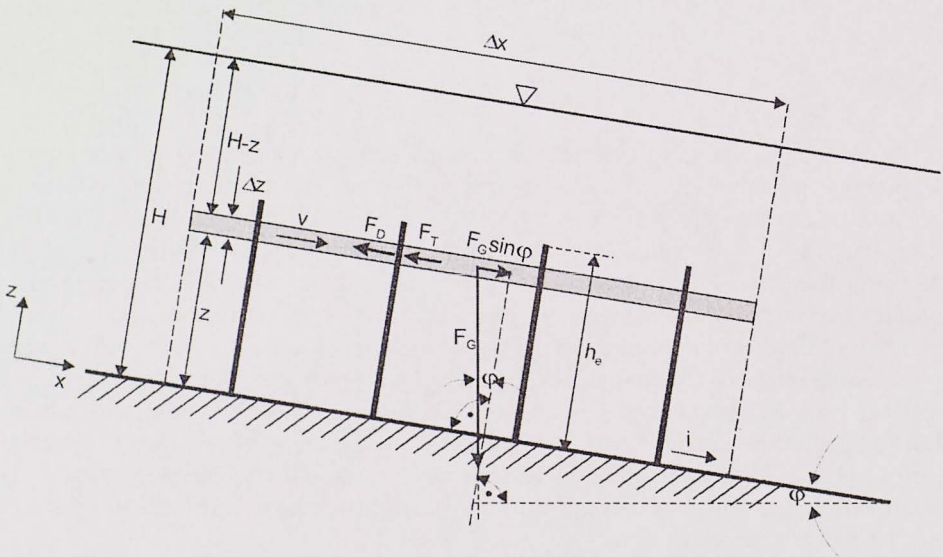
$v(z)$ – prędkość przepływu wody zmienna na głębokości $z \in < 0; H >$,

k – współczynnik proporcjonalności,

i – spadek podłużny dna koryta,

H – głębokość wody,

h_e – wysokość elementu elastycznego.



Rys. 1. Szkic przepływu wody nad elementami elastycznymi: F_D – siła oporu na jednostkę objętości wody, F_G – siła ciężkości, F_T – siła tarcia

Fig. 1. The scheme of the flow in a channel with the flexible stems: F_D – the drag force of elements per volume of water, F_G – gravity force, F_T – friction force

Równania (1a, b) traktować można jako równania zachowania pędu dla strumienia wody. Rozwiązanie równań wymaga określenia warunków brzegowych, tzn. podania wartości prędkości na dnie i swobodnej powierzchni zwierciadła wody oraz zależności dla współczynnika oporu opływającego pojedynczego elementu elastycznego. Powstała przy opływie elementów siła oporu charakteryzowana jest współczynnikiem oporu $C_w(z)$ i dla n elementów elastycznych na wysokości z wyrażana jest zależnością:

$$F_D = \frac{1}{2} n \rho C_w(z) v^2(z) d \Delta z \quad (2)$$

gdzie Δz – wysokość fragmentu elementu elastycznego opływającego wodą z prędkością $v(z)$.

OBLICZANIE MAŁEGO UGIĘCIA ELEMENTÓW ELASTYCZNYCH

Niewielkie odkształcenie elastycznych elementów pod wpływem parcia dynamicznego wody jest obliczane na podstawie teorii belki wspornikowej i sprowadza się do scałkowania przybliżonego równania różniczkowego osi odkształconej belki (rys. 2):

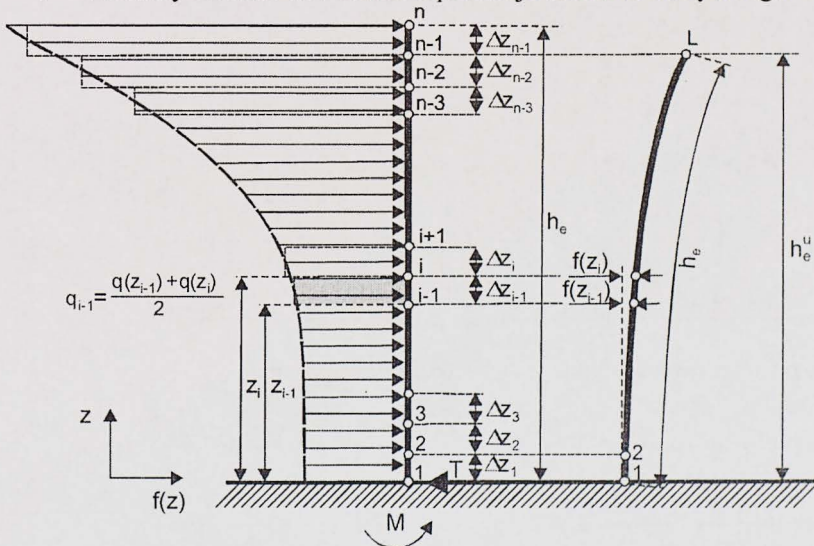
$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = - \frac{M_\alpha(z)}{EJ} \quad (3)$$

gdzie: $f(z)$ – przemieszczenie osi elementu elastycznego/belki w kierunku prostopadłym do osi z ,

$M_\alpha(z)$ – moment zginający w przekroju z wywołany obciążeniem ciągłym $q(z)$, powstałym wskutek parcia dynamicznego wody na odcinku Δz ,

E – moduł sprężystości elementu elastycznego,

J – centralny moment bezwładności przekroju elementu elastycznego.



Rys. 2. Schemat obciążenia elementu elastycznego parciem dynamicznym wody
Fig. 2. The scheme of the flexible steams loaded due to dynamic water pressure

Obciążenie ciągłe, jednostkowe pojedynczego elementu/belki wywołane jest parciem dynamicznym wody o gęstości ρ , napływającej z prędkością $v(z)$ na elastyczny element walcowy o średnicy d i obliczane jest z zależności (2):

$$q(z) = \frac{\rho C_W(z) v^2(z) d}{2} \quad (4)$$

Współczynnik oporu elementu $C_W(z)$ nie jest stały i zależy od kształtu przekroju opływającego elementu i prędkości przepływu wody $v(z)$.

Powstałą reakcję T i moment zginający M w przekroju utwierdzenia dla obciążonego elementu elastycznego podzielonego na odcinki Δz_i , pokazanego na rysunku 2, wyrażono zależnościami:

$$T = q_1 \Delta z_1 + q_2 \Delta z_2 + \dots + q_{n-1} \Delta z_{n-1} + q_n \Delta z_n \quad (5)$$

$$M = q_1 \Delta z_1 \frac{\Delta z_1}{2} + q_2 \Delta z_2 \left(\Delta z_1 + \frac{\Delta z_2}{2} \right) + \dots + q_{n-1} \Delta z_{n-1} \left(\Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \frac{\Delta z_{n-1}}{2} \right) + q_n \Delta z_n \left(\Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \frac{\Delta z_n}{2} \right) \quad (6)$$

Wprowadzając zależności (5) i (6) do (3), otrzymano:

$$\begin{aligned} -EJ \frac{d^2 f(z)}{dz^2} = & M - Tz + q_1 z \frac{z}{2} + (q_2 - q_1) (z - \Delta z_1) \frac{z - \Delta z_1}{2} + \\ & + (q_3 - q_2) (z - \Delta z_1 - \Delta z_2) \frac{z - \Delta z_1 - \Delta z_2}{2} + \dots \\ & \dots + (q_n - q_{n-1}) (z - \Delta z_1 - \dots - \Delta z_{n-1}) \frac{z - \Delta z_1 - \dots - \Delta z_{n-1}}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Po scałkowaniu równania (7) otrzymano:

$$\begin{aligned} -EJ \frac{df(z)}{dz} = & C + Mz - T \frac{z^2}{2} + q_1 \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + (q_2 - q_1) \frac{1}{2} \frac{(z - \Delta z_1)^3}{3} + \\ & + (q_3 - q_2) \frac{1}{2} \frac{(z - \Delta z_1 - \Delta z_2)^3}{3} + \dots + (q_n - q_{n-1}) \frac{1}{2} \frac{(z - \Delta z_1 - \dots - \Delta z_{n-1})^3}{3} \end{aligned} \quad (8)$$

a po scałkowaniu równania (8) uzyskano równanie w postaci:

$$\begin{aligned} -EJf(z) = & D + Cz + M \frac{z^2}{2} - T \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + q_1 \frac{1}{6} \frac{z^4}{4} + (q_2 - q_1) \frac{1}{6} \frac{(z - \Delta z_1)^4}{4} + \\ & + (q_3 - q_2) \frac{1}{6} \frac{(z - \Delta z_1 - \Delta z_2)^4}{4} + \dots + (q_n - q_{n-1}) \frac{1}{6} \frac{(z - \Delta z_1 - \dots - \Delta z_{n-1})^4}{4} \end{aligned} \quad (9)$$

W przekroju mocowania elementu elastycznego, tzn. dla $z = 0$, przyjęto warunki brzegowe równań (8) i (9) w postaci:

- przemieszczenie utwierdzenia jest równe zero, $f(0) = 0$, skąd $D = 0$,
- kąt obrotu w utwierdzeniu jest równy zero, $f'(0) = 0$, skąd $C = 0$.

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do równania (9) wyznaczono ugięcie elementu w postaci:

$$f(z) = -\frac{1}{EJ} \left[M \frac{z^2}{2} - T \frac{1}{6} z^3 + q_1 \frac{1}{24} z^4 + (q_2 - q_1) \frac{1}{24} (z - \Delta z_1)^4 + \right. \\ \left. + (q_3 - q_2) \frac{1}{24} (z - \Delta z_1 - \Delta z_2)^4 + \dots + (q_n - q_{n-1}) \frac{1}{24} (z - \Delta z_1 - \dots - \Delta z_{n-1})^4 \right] \quad (10)$$

Pod wpływem parcia dynamicznego wody następuje ugięcie opływającego elementu elastycznego. Wyrażając długość elementu (h_e) w funkcji ugięcia zależnością:

$$h_e = \sum_2^L \sqrt{\Delta z_{i-1}^2 + (f(z_i) - f(z_{i-1}))^2} \quad (11)$$

obliczono wysokość (h_e^u) przekroju zajętego przez ugięte elementy elastyczne:

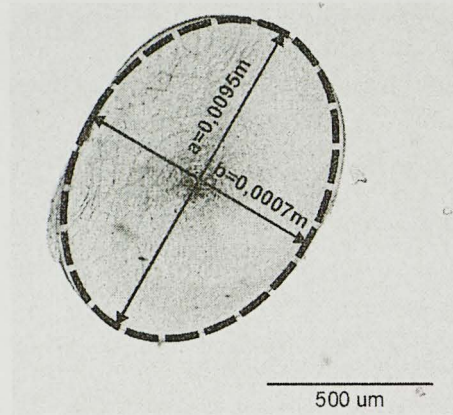
$$h_e^u = \sum_2^L \Delta z_{i-1} \quad (12)$$

gdzie $f(z_i)$, $f(z_{i-1})$ – ugięcia elementu w punktach na wysokości z_i i z_{i-1} .

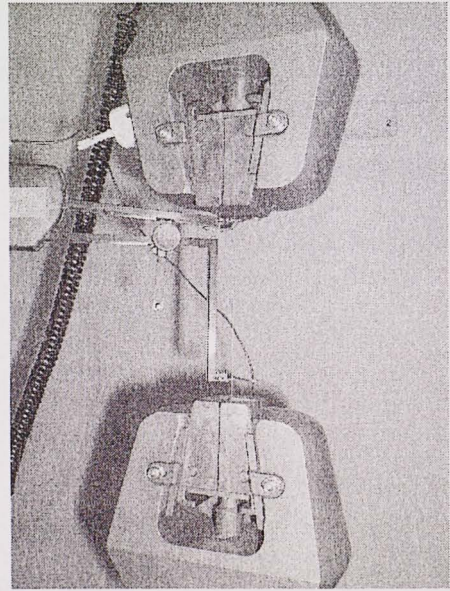
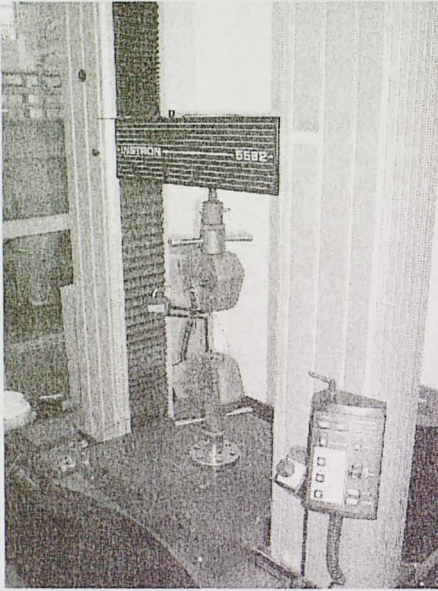
Dla tak określonej wysokości przekroju zajętego przez ugięte elementy elastyczne (h_e^u) ponownie obliczano rozkład prędkości z równań (1a, b) i ugięcie elementu pod wpływem parcia dynamicznego wody. Obliczenia kończono, gdy nie zmieniła się wysokość przekroju zajętego przez ugięte elementy elastyczne.

WYNIKI OBLICZEŃ

Opisaną metodykę obliczania prędkości i ugięcia elementów elastycznych wykorzystano dla warunków przepływu wody o głębokości $H = 0,2111$ m w prostokątnym korycie nad elastycznymi elementami z polichloru winylu wysokości $h_e = 0,1650$ m i eliptycznym przekroju poprzecznym pokazanym na rysunku 3. Elementy elastyczne rozmieszczono na dnie koryta w regularnych odległościach $0,02 \times 0,02$ m, co daje gęstość $m = 2500$ sztuk na powierzchni $1,0$ m². Koryto miało stały spadek dna 8,7‰. Pomiar prędkości w przekroju strumienia prowadzono sondą elektroakustyczną PEMS. Średnią wartość modułu sprężystości elementu elastycznego wyznaczono na podstawie pomiarów przeprowadzonych maszyną wytrzymałościową INSTRON 5582 (rys. 4) i przyjęto jako równą $E = 3630$ MPa. W obliczeniach rozkładu prędkości przyjęto krok obliczeniowy $\Delta z_i = 0,002$ m. Obliczony z równań (1a, b) rozkład prędkości pokazano na rysunku 5.



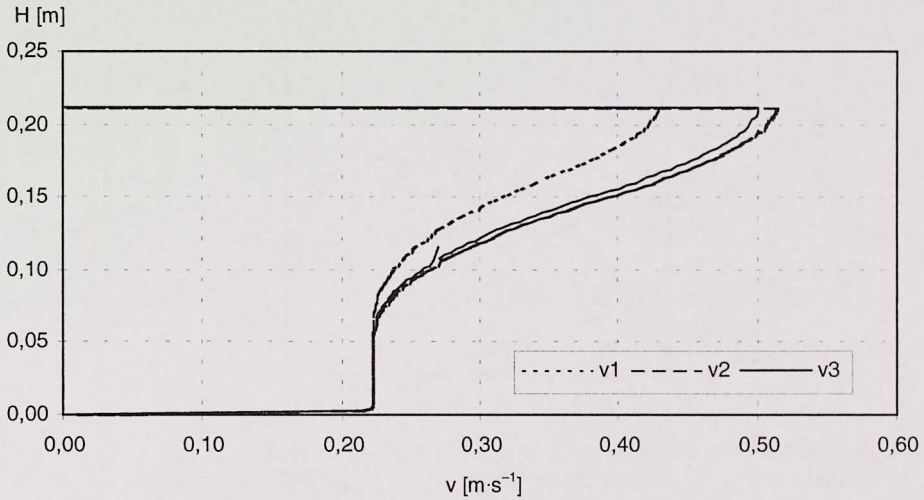
Rys. 3. Mikroskopowy obraz przekroju poprzecznego elementu elastycznego
 Fig. 3. The microscopic picture of the cross section of elastic steam element



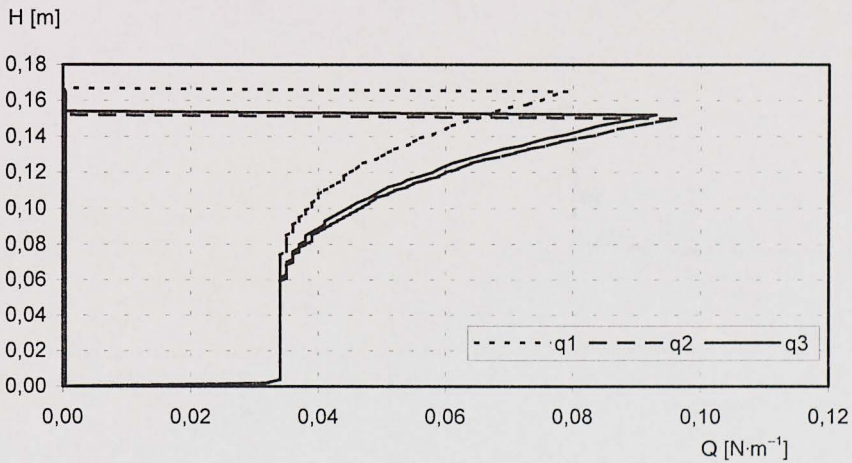
Rys. 4. Pomiar modułu sprężystości elementu elastycznego w aparacie INSTRON 5582

Fig. 4. The INSTRON 5582 apparatus for investigation of the elasticity module of the flexible steam area

Parcie dynamiczne wody spowodowało ugięcie elementów elastycznych. Obliczony rozkład parcia dynamicznego / obciążeń na jednostkę wysokości elementu elastycznego przedstawiono na rysunku 6. Po obliczeniu wysokości przekroju zajętego przez ugięte elementy elastyczne (h_e'') ponownie obliczono rozkład prędkości. Obliczanie kolejnych rozkładów prędkości (rys. 5) oraz ugięcia elementów prowadzono do chwili, gdy obliczane wysokości przekroju zajętego przez ugięte elementy elastyczne nie zmieniały się bardziej niż o 0,001 m. Zwykle wystarczały w tym celu 3–4 iteracje.



Rys. 5. Prędkości wody obliczone w przekroju z opływającymi elementami elastycznymi: v_1 , v_2 , v_3 – profile obliczone w kolejnych iteracjach uwzględniających ugięcie elementu elastycznego
 Fig. 5. Calculated flow velocity profile based on deflection of the submerged flexible steams: v_1 , v_2 , v_3 – calculated flow profile during iteration

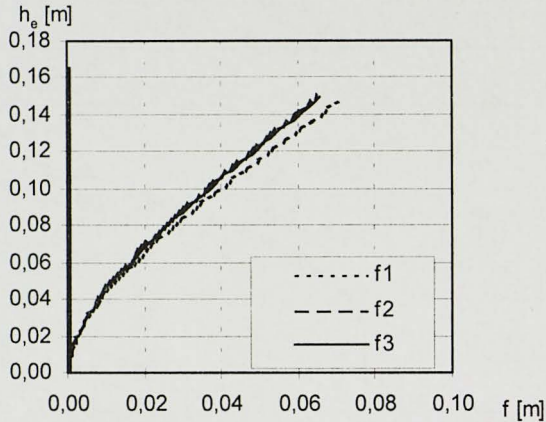


Rys. 6. Zmiana obciążenia elementu elastycznego wskutek parcia dynamicznego w kolejnych iteracjach

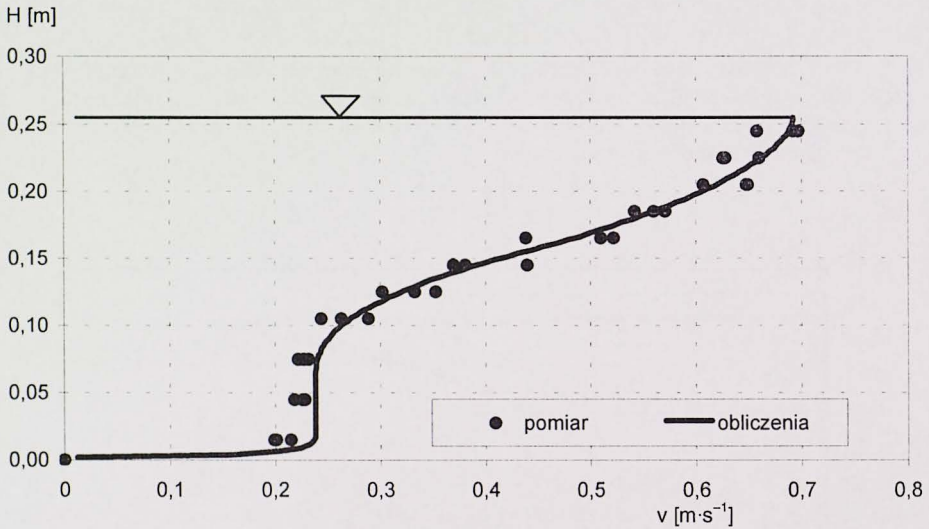
Fig. 6. Changes of drag forces on submerged flexible steams during successive iterations

Obliczone profile ugiętych elementów elastycznych pokazano na rysunku 7.

Rozkład prędkości przepływu obliczony z uwzględnieniem ugięcia elementów porównano z wynikami pomiarów prędkości i przedstawiono na rysunku 8. Średni względny błąd związku wartości obliczonych w stosunku do pomierzonych wynosi 6,9%.



Rys. 7. Ugięcia elementu elastycznego obliczane w trakcie kolejnych iteracji
 Fig. 7. The deflection of the submerged flexible stems calculated during successive iterations



Rys. 8. Obliczone i pomierzone prędkości przepływu wody w obszarze z elementami elastycznymi
 Fig. 8. Calculated and measured velocity distributions for the channel with the submerged and deflected flexible stems

PODSUMOWANIE

Metodykę obliczania małego ugięcia elementów elastycznych pod wpływem parcia dynamicznego wody można wykorzystać do prognozowania rozkładu prędkości w różnych obszarach przepływu wody. Opisany model nie był weryfikowany dla przepływu wody nad elastyczną roślinnością, lecz przypuszczać należy, że umożliwi on prognozę rozkładu prędkości w obszarze przepływu nad mało odkształcalną roślinnością.

W przypadku dużych ugięć elementów elastycznych opisana metoda obliczeń prowadzi do błędnego oszacowania wysokości przekroju zajętego przez ugięte elementy. Znaczne ugięcia elementów elastycznych wystąpić mogą przy wzroście prędkości przepływu, np. wskutek wzrostu spadku dna koryta. Ugięcie wtedy należy obliczać z równania różniczkowego przemieszczenia prostopadłego do osi elastycznego elementu w postaci:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = -\frac{M_\alpha(z)}{EJ}$$

$$\left[1 + \left(\frac{df}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}$$

PIŚMIENNICTWO

- Erduran K.S., Kutia V., 2003. Quasi-three-dimensional numerical model for flow through flexible, rigid, submerged and non-submerged vegetation. *Journal of Hydroinformatics* 5, 3.
- Hydrauliczne podstawy obliczania przepustowości koryt rzecznych, 2002 (red.) J. Kubrak, E. Nachlik. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Khublaryan M.G., Frolov A.P., Zyryanov V.N., 2004. Modeling Water Flow in the Presence of Higher Vegetation. *Water Resources* 31.
- Klopstra D., Barneveld H.J., van Noortwijk J.M, van Velzen E.H. 2002. Analytical model for hydraulic roughness of submerged vegetation. The 27th Congress of the International Association for Hydraulic Research, San Francisco.

THE INFINITESIMAL DEFLECTION OF THE FLEXIBLE STEAMS LOADED DUE TO DYNAMIC WATER PRESSURE

Abstract. The calculation method for the infinitesimal deflection of flexible steams loaded due to dynamic water pressure was given. The calculation algorithm was illustrated for selected example. Calculated velocity distributions for the channel with the submerged flexible elements have been compared with the laboratory measurements. The presented method is applicable in practice for calculation of open channel flow over flexible vegetation.

Key words: the infinitesimal deflection of the flexible steams, distribution flow velocity in a channel with the flexible steams

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 30.11.2005