

Helena KAZIEKO, Lucyna KAZIEKO

Katedra Zastosowań Matematyki SGGW
Department of Applied Mathematics WAU

Prognoza obniżenia poziomu wód podziemnych pionowym drenażem

Prediction of groundwater level lowering due to vertical drainage systems

Słowa kluczowe: model matematyczny, wody podziemne

Key words: mathematical model, groundwater

Wprowadzenie

Istniejące w obecnym czasie teorie przeciekania oparte są na szeregu przypuszczeniach. Jedno z takich przypuszczeń sprowadza się do założenia, że objętość wody zawarta w warstwach słaboprzepuszczalnych rozdzielających poziom wodonośny jest niewielka, można więc ją zaniedbać (Połubarinowa-Koczina 1977, Dacher 1983). Często jednak takie słaboprzepuszczalne warstwy mogą dostarczyć znaczną ilość wody. Przykładem może być warstwa piasku przykryta z góry słaboprzepuszczalną warstwą gliny, przez którą zachodzi zasilanie wód podziemnych drogą infiltracji opadów atmosferycznych. Innym przykładem mogą być układy złożone ze słaboprzepuszczalnych warstw położone pod lub

nad podstawową warstwą wodonośną. W rezultacie obniżenia ciśnienia hydraulicznego w podstawowej warstwie wodonośnej następuje przeciekanie do niej wody z warstw przykrywających i podścielających ją.

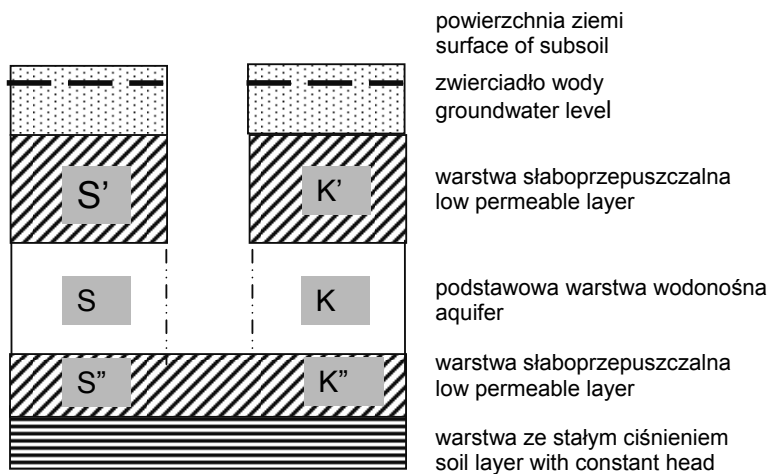
Zasadniczy strumień w takich układach jest trójwymiarowy. Jednak przy pewnych założeniach strumień ten można traktować jako dwuwymiarowy. Założenia te są następujące:

- ciśnienie w warstwach dopuszczających przeciekanie jest stałe,
- różnica przepuszczalności w warstwach słaboprzepuszczalnych i podstawowej warstwie wodonośnej jest bardzo duża, można więc przyjąć, że strumień w warstwach słaboprzepuszczalnych ma kierunek wertykalny, w podstawowej zaś warstwie wodonośnej kierunek strumienia jest horyzontalny,
- uwzględnia się ilość wody w warstwach słaboprzepuszczalnych.

Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrujemy ośrodek, składający się z podstawowej warstwy wodonośnej oraz z ograniczających tę warstwę z dołu i z góry warstw słaboprzepuszczalnych. Do podstawowej warstwy wodonośnej doprowadzona jest pionowa szczelina (rys. 1).

nością podstawowej warstwy wodonośnej, dlatego można przyjąć, że ruch wody w warstwach słaboprzepuszczalnych jest pionowy, w podstawowej zaś warstwie wodonośnej – poziomy.



RYSUNEK 1. Schemat układu analizowanych warstw
FIGURE 1. Modes of subsoil configurations

Zajmiemy się znalezieniem rozkładu spadku ciśnienia wody w obszarze wpływu szczeliny pracującej ze stałym wydatkiem w sprężystej wodonośnej warstwie ograniczonej sprężystymi słaboprzepuszczalnymi warstwami. Wydatek szczeliny jest spowodowany zmniejszeniem zapasu wody w warstwie wodonośnej (z której odbywa się odpompowywanie wody) oraz przeciekaniem wody z sąsiadujących warstw słaboprzepuszczalnych. Ponadto uwzględnia się wpływ wody z warstw przykrywających i podścielających. Ponieważ przewodności hydrauliczne warstw słaboprzepuszczalnych są bardzo małe w porównaniu z przewod-

Indeks oznaczeń

W dalszym ciągu przyjmujemy następujące oznaczenia:

- b, b', b'' – grubość poszczególnych warstw [L],
- $B = \sqrt{Tb'/K'}$ – współczynnik przeciekania [L],
- $\text{erf}(x)$ – funkcja błędów (x),
- $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$,
- h – ciśnienie hydrauliczne w dowolnym momencie czasu i w dowolnym punkcie warstwy podstawowej [L],

		$H(u,\beta) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{u}/\sqrt{y(y-u)}) dy,$	
K	– współczynnik filtracji podstawowej warstwy wodonośnej [L·T ⁻¹],	$\left. \begin{aligned} S &= bS_s \\ S' &= b'S'_s \\ S'' &= b''S''_s \end{aligned} \right\}$	– współczynnik pojemności (zwrotu wody) warstwy podstawowej i warstw słaboprzepuszczalnych (wielkości bezwymiarowe),
K', K''	– współczynniki filtracji warstw słaboprzepuszczalnych (w kierunku pionowym) [L·T ⁻¹],	t ₀	– czas rozpoczęcia pompowania [T],
K ₀ (x)	– funkcja Bessela (argumentu zespolonego) drugiego rodzaju stopnia zerowego,	t	– czas mierzony od momentu pompowania [T],
n = Tλ ² /S [T ⁻¹],		T = Kb	– współczynnik przewodności podstawowej warstwy wodonośnej [L ² ·T ⁻¹],
Q	– stały wydatek szczeliny [L ³ ·T ⁻¹],	u = r ² /4vt,	
q _L	– wydatek szczeliny spowodowany przeciekaniem w podstawową warstwę wodonośną [L ³ ·T ⁻¹],	V = Qt	– objętość wody otrzymana przy pompowaniu [L ³],
r	– odległość (mierzona wzdłuż poziomu) od osi szczeliny do dowolnego punktu [L],	V _L	– ogólna objętość wody otrzymana w procesie pompowania wskutek przeciekania [L ³],
s = h ₀ – h	– obniżenie powierzchni piezometrycznej w dowolnym momencie czasu i w dowolnym punkcie warstwy podstawowej [L],	$-Ei(-u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$	– „funkcja szczeliny” dla warstw, gdzie nie występuje przeciekanie,
s ₁ , s ₂	– obniżenie ciśnienia w dowolnym momencie czasu, w dowolnym punkcie (r, z) w warstwach słaboprzepuszczalnych [L],	W(u,v) =	– „funkcja szczeliny” dla warstw z przeciekaniem,
S _s , S' _s , S'' _s	– właściwa pojemność warstwy podstawowej i warstw słaboprzepuszczalnych (objętość wody na jednostkę objętości warstwy, powstała przy obniżeniu ciśnienia warstwy na jednostkę),	$= \int_u^{\infty} \frac{dy}{y} \cdot \exp(-y - v^2/4y)$	
		x	– współrzędna pionowa,
		$\alpha = r\sqrt{K'/b'T + K''/b''T},$	
		$\beta = (1/4)r\lambda,$	
		$\delta_1 = 1 + (S' + S'')/3S,$	
		$\delta_2 = 1 + (S' + S'')/S,$	
		$\delta_3 = 1 + (S'' + S'/3)/S,$	
		$\lambda = \sqrt{\frac{K'/b'S'}{T/S}} + \sqrt{\frac{K''/b''S''}{T/S}} \quad [L^{-1}],$	
		$v = K/S_s = T/S \quad [L^2 \cdot T^{-1}],$	
		$v' = K'/S'_s = K'b'/S' \quad [L^2 \cdot T^{-1}],$	
		$v'' = K''/S''_s = K''b''/S'' \quad [L^2 \cdot T^{-1}].$	

Równania różniczkowe ruchu

Równanie różniczkowe strumienia wód podziemnych w sprężystej warstwie wodonośnej ma postać (Markow 1987):

$$\frac{\partial^2 h_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_n}{\partial z^2} = \frac{1}{v_n} \frac{\partial h_n}{\partial t} \quad (1)$$

Równanie różniczkowe ruchu w sprężystej warstwie ograniczonej słaboprzepuszczalnymi sprężystymi warstwami aproksymuje się następującym wyrażeniem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{v_z(b'') - v_z(b + b'')}{T} = \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

$$v_z(x,y,z,t) = -K_n \frac{\partial h_n}{\partial z_n}$$

gdzie:

$h(x,y,t)$ i $h_n(x,y,z,t)$ – ciśnienie hydrauliczne odpowiednio w podstawowej warstwie wodonośnej i warstwach słaboprzepuszczalnych,

z_n – wartość z w podstawie i w górze warstwy.

Jeśli przyjąć, że $h_0(x,y,t_0)$ i $h_{0n}(x,y,z,t_0)$ wyrażają początkowy rozkład ciśnień hydraulicznych, odpowiednio w podstawowej warstwie wodonośnej i w warstwach słaboprzepuszczalnych, a $S(x,y,t)$ i $S_n(x,y,z,t)$ obniżenie ciśnienia spowodowane odprowadzeniem wody z warstwy podstawowej, rozpoczętym w momencie czasu t_0 , to równania (1) i (2) można przedstawić w postaci:

$$\frac{\partial^2 s_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s_n}{\partial z^2} = \frac{1}{v_n} \frac{\partial s_n}{\partial t} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{v_z(b + b'') - v_z b''}{T} = \frac{1}{v} \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4)$$

$$v_z(x,y,z,t) = K_n \frac{\partial h_n}{\partial z_n}$$

gdzie:

$s = h_0 - h$,

$s_n = h_{0n} - h_n$,

t – czas mierzony od początku pompowania (t_0).

Układy przepływu i warunki graniczne

W niniejszej pracy rozpatruje się trzy układy przepływu:

1. Słaboprzepuszczalne warstwy sąsiadujące z warstwą podstawową podścielają i przykrywają dwie inne warstwy wodonośne, w których ciśnienia hydrauliczne pozostają stałe.
2. Słaboprzepuszczalne warstwy podścielają i przykrywają dwie nieprzepuszczalne warstwy.
3. Jedna warstwa słaboprzepuszczalna przykrywa warstwę nieprzepuszczalną, a druga podściela warstwę wodonośną, w której ciśnienie hydrauliczne pozostaje stałe.

Przepływ w tych układach, pozostając wertykalnym w warstwach słaboprzepuszczalnych i płaskoradialnym w podstawowej warstwie wodonośnej, może być opisany za pomocą następujących warunków granicznych:

Układ 1

- powierzchniowa słaboprzepuszczalna warstwa

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial z^2} = \frac{1}{v'} \frac{\partial s_1}{\partial t} \quad (5a)$$

$$s_1(r,z,0) = 0 \quad (5b)$$

$$s_1(r,z',t) = 0 \quad (5c)$$

$$s_1(r,z_1,t) = s(r,t) \quad (5d)$$

- podstawowa warstwa wodonośna

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{K'}{T} \frac{\partial}{\partial z} s_1(r,z_1,t) + \quad (6a)$$

$$- \frac{K''}{T} \frac{\partial}{\partial z} s_2(r,b'',t) = \frac{1}{v} \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$s(r,0) = 0 \quad (6b)$$

$$s(\infty,t) = 0 \quad (6c)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial}{\partial r} s(r,t) = - \frac{Q}{2\pi T} \quad (6d)$$

- dolna słaboprzepuszczalna warstwa

$$\frac{\partial^2 S_2}{\partial z^2} = \frac{1}{v''} \frac{\partial s_1}{\partial t} \quad (7a)$$

$$s_2(r,z,0) = 0 \quad (7b)$$

$$s_2(r,0,t) = 0 \quad (7c)$$

$$s_2(r,b'',t) = s(r,t) \quad (7d)$$

Układ 2

Tak samo jak w układzie 1, lecz warunki (5c) i (7c) zmieniają się odpowiednio na:

$$\frac{\partial}{\partial z} s_1(r,z',t) = 0 \quad (5c_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} s_2(r,0,t) = 0 \quad (7c_2)$$

Układ 3

Tak samo jak w układzie 1, lecz warunek (7c) zmienia się na:

$$\frac{\partial}{\partial z} s_2(r,0,t) = 0 \quad (7c_3)$$

W rozpatrywanych równaniach zachodzi:

$$z_1 = b'' + b \quad \text{i} \quad z' = b'' + b + b'$$

Równania obniżenia poziomu wody i prędkość przeciekania

Poniżej zamieszczamy wyniki rozwiązań podanych powyżej równań przy zadanych warunkach granicznych. Czytelników chcących zapoznać się z detalami metod rozwiązania odsyłamy do literatury (Polyanin 1995, Moussiaux 2001).

W przypadku przedstawionym na rysunku 1 rozwiązania otrzymano dla dwóch wartości czasu:

1. Dla $t < b'S''/10K'$ i $t < b''S''/10K''$.

W tych przedziałach czasowych rozwiązania dla trzech przypadków pokrywają się i wynoszą:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} H(u,\beta) \quad (8)$$

$$q_L = Q[1 - e^{-nt} \operatorname{erfc}(\sqrt{nt})] \quad (9)$$

$$V_L = V[1 - 2/\sqrt{n\pi t} + q_L/Qnt] \quad (10)$$

gdzie:

$$\beta = (1/4)r\lambda; \quad u = r^2S/4Tt;$$

$$n = T\lambda^2/S,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{K'/b'S'}{T} \frac{S'}{S}} + \sqrt{\frac{K''/b''S''}{T} \frac{S''}{S}},$$

$$H(u,\beta) = \int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y} \operatorname{erfc} \frac{\beta\sqrt{y}}{\sqrt{y(y-u)}} dy.$$

Wartości powyższej całki można odczytać dla ustalonych wartości u i β w tablicach (Janke i in. 1968).

2. Dla dużych wartości czasu (t). W tym przypadku rozwiązania dla trzech rozpatrywanych przypadków są następujące:

Układ 1

Dolna granica t może być wybrana jako większa z dwóch wartości $5b'S'/K'$ i $5b''S''/K''$:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u\delta_1, \alpha) \quad (11)$$

$$q_L = Q[1 - (1/\delta_1)\exp(-v\alpha^2/r^2\delta_1)] \quad (12)$$

$$\delta_1 = 1 + (S' + S'')/3S$$

$$\alpha = r\sqrt{\frac{K'/b'}{T} + \frac{K''/b''}{T}}$$

gdzie $W(u\delta_1, \alpha)$ – „funkcja szczeliny” dla warstw z przeciekaniem.

Wyrażenie dla V_L może być łatwo otrzymane poprzez scałkowanie równania (12) względem t w przedziale od dolnej granicy czasu do dowolnego momentu czasu t .

Układ 2

Dla $t > 10b'S'/K'$ i $t > 10b''S''/K''$ odpowiednie wyrażenia przyjmują postać:

$$s = -\frac{Q}{4\pi T} Ei(-u, \delta_2) \quad (13)$$

$$q_L = Q(S' + S'')/(S + S' + S'') \quad (14)$$

gdzie:

$$\delta_2 = 1 + (S' + S'')/S,$$

$Ei(u, \delta_2)$ – eksponentencjalna całka.

Układ 3

W tym przypadku większa z dwóch wartości $5b'S'/K'$ i $10b''S''/K''$ może być przyjęta jako dolna granica przedziału czasu i wówczas wyrażenia przyjmą postać:

$$s = -\frac{Q}{4\pi T} W\left(u\delta_3, r\sqrt{\frac{K'/b'}{T}}\right) \quad (15)$$

$$q_L = Q[1 - (1/\delta_3)\exp(-vK't/b'T\delta_3)] \quad (16)$$

gdzie: $\delta_3 = 1 + (S'' + S'/3)/S$.

Wartość V_L może być otrzymana poprzez scałkowanie równania (16) względem t w przedziale od dolnej granicy czasu do dowolnej wartości t .

Funkcja $H(u, \beta)$ może być aproksymowana następująco (Polyanin 1995):

$$H(u, \beta) \approx W(u) + \frac{4\beta}{\sqrt{\pi u}}(0,2577 + 0,6931)\exp(-u/2) \quad (17)$$

dla $u \geq 10^4\beta^2$

$$H(u, \beta) \approx (1/2)\ln 0,044/\beta^2 u \quad (18)$$

dla $u \leq 10^5\beta^2$ i $10^{-4}\beta^2$

Wyniki obliczeń i wnioski

Wpływ objętości wody zawartej w warstwach słaboprzepuszczalnych na obniżenie poziomu przedstawiają rysunki 2 i 3.

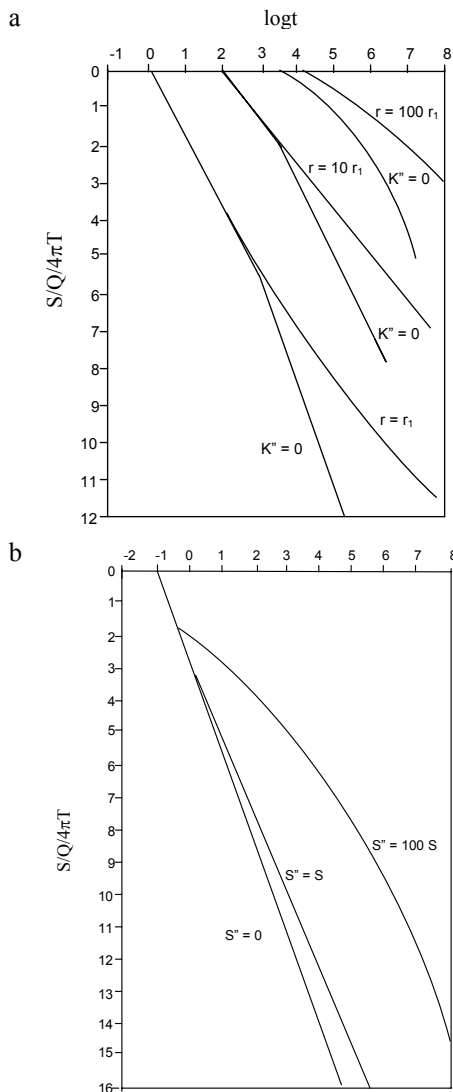
Jeżeli stosunek współczynników pojemności warstwy słaboprzepuszczalnej i podstawowej warstwy wodonośnej jest mały ($S'/S \leq 0,1$), to wpływ objętości wody w warstwach słaboprzepuszczalnych na obniżenie poziomu w układach przepływu podobnych do tych, które przedstawia rysunek 2b jest bardzo mały.

W tym przypadku zastosowano wzory:

$$s = -\frac{Q}{4\pi T} Ei(-u) \quad (19)$$

$$s = -\frac{Q}{4\pi T} W(u, r/B) \quad (20)$$

gdzie $\frac{1}{B^2} = (K'b')/T$.



RYSUNEK 2. Zależność obniżenia poziomu wód od czasu w warunkach pracy szczeliny w układzie przedstawionym na rysunku
 FIGURE 2. Relationships between groundwater levels and time during subsoil drainage

Dla odpowiednio większych wartości S'/S obniżenie poziomu będzie znacznie różnić się od wcześniejszych.

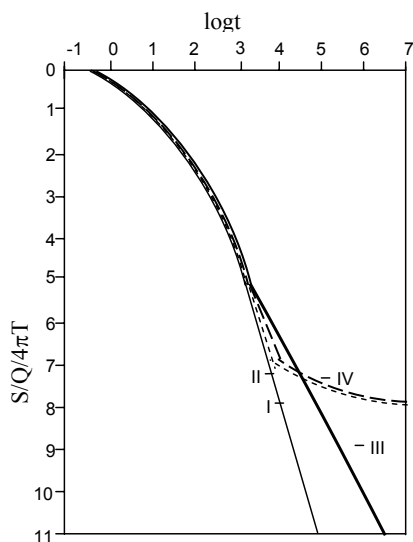
Obserwowane obniżenia poziomu, które przykładowo przedstawia rysunek 2b, jest wywołane (niekoniecznie zmianą parametrów warstwy wodonośnej w początkowym okresie pompowania) przeciekaniem wody z warstw słaboprzepuszczalnych, leżących nad i pod warstwą wodonośną. Krzywe, przedstawiające zależność obniżenia poziomu od czasu dla układu (rys. 2b), mają podobną tendencję jak krzywe dla układu, w którym jest bardzo mała objętość wody w warstwach słaboprzepuszczalnych – wzór (20). W układach z dużym zapasem wody w warstwach słaboprzepuszczalnych (rys. 2a) krzywe, przedstawiające zależność obniżenia poziomu od czasu w punktach leżących w dużych odległościach od szczeliny, z której odbywa się odpompowywanie, mają podobny kształt jak krzywe dla układów, w których przeciekanie nie występuje.

Zatem obserwowany kształt krzywych obniżenia poziomu wody od czasu może doprowadzić do błędnego wniosku o zastosowaniu takich lub innych wzorów. Aby temu zapobiec, należy za każdym razem dane przeanalizować. Na rysunku 3 podano krzywe przedstawiające zależność obniżenia wody od czasu w warunkach obecności i nieobecności wody w warstwach słaboprzepuszczalnych:

krzywa I – przeciekanie nie występuje,
 krzywa II – przeciekanie występuje przy nieobecności wody w warstwie słaboprzepuszczalnej,
 krzywa III – przeciekanie występuje przy obecności wody w nieskończonej warstwie słaboprzepuszczalnej,

krzywa IV – przeciekanie występuje przy obecności wody w skończonej warstwie słaboprzepuszczalnej.

Wielkość wydatku szczeliny, na który wpływ ma przeciekanie, może być także bardzo nieznaczny, jeśli uwzględnić wpływ objętości wody zawartej w warstwach słaboprzepuszczalnych.



RYSUNEK 3. Krzywe przedstawiające zależności obniżenia wody od czasu w warstwie w warunkach obecności i nieobecności wody w warstwach słaboprzepuszczalnych

FIGURE 3. Curves presented relationships between groundwater level lowering and time with different assumptions for aquifers

Literatura

- DACHER R. 1983: Über die versicherung aus kanalen. *Die Wasserwistschaf* 9.
- JANKE E., EMDE F., LÖSCH F. 1968: Tafeln höherer funktionen, Stuttgart.
- MARKOW E.S. 1987: Dinamika wodooddacz pri nieustanowiwszimsia dwizenii gruntowych wod, dokł. *Vaschnit* 4.
- MOUSSIAUX A. 2001: Convode: unprogramme package for solving differential equations. *J. Comp. and Appl. Math.* 48.
- POLYANIN A.D. 1995: Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. CRC Press, New York.
- POLUBARINOWA-KOCZINA P.J. 1977: Teorija dwizenija gruntowych wod. Nauka, Moskwa.

Summary

Prediction of groundwater level lowering due to vertical drainage systems. Mathematical model groundwater level lowering in aquifer located between two law-permeable layers due to vertical drainage system is presented. In order to determine the distributions of water heads calculations were performed for three modes of subsoil configuration.

Authors' address:

Helena Kazieko, Lucyna Kazieko
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Katedra Zastosowań Matematyki
02-776 Warszawa, ul. Nowoursynowska 159
Poland