FOLIA POMERANAE UNIVERSITATIS TECHNOLOGIAE STETINENSIS
Folia Pomer. Univ. Technol. Stetin. 2009, Oeconomica 268 (54), 55–60

Anna LANDOWSKA

ZASTOSOWANIE DYSKRETNEGO PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO DO ROZWIĄZANIA PROBLEMU OPTYMALNEGO PRZYDZIAŁU W GOSPODARSTWIE ROLNYM

APPLICATION OF DISCREET DYNAMIC PROGRAMMING FOR SOLVING OPTIMAL ALLOTMENT PROBLEM IN AN AGRICULTURAL FARM

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
ul. Janickiego 31, 71-270 Szczecin

Abstract. For the development of village it is essential that agricultural farm makes the largest profit. Very important is to plan sowing in a optimal way, to obtain the biggest crop, which is easy to sell for a sharp price. It is difficult to take into consideration so many factors and constraints. The article presents discrete dynamic programming method which makes possible to find optimal solution of allotment problem with constraints using earlier captured experiences.

Słowa kluczowe: problem optymalnego przydziału, programowanie dynamiczne, równanie Bellmana.
Key words: Bellman equation, dynamic programming, optimal allotment problem.

WSTĘP

Dla rozwoju wsi istotne jest, by gospodarstwo rolne przynosiło jak największe zyski. Bardzo ważne jest optymalne zaplanowanie siewu aby, można było otrzymać większy plon, który można łatwo sprzedać za dobrą cenę. Oczywiste jest to, że nie z każdej ziemi możemy otrzymać oczekiwane zbiory. Uwzględnienie dużej liczby czynników i ograniczeń może być bardzo trudne. W artykule pokazano zastosowanie w rolnictwie metody dyskretnego programowania dynamicznego, za pomocą której dla wielu zmiennych wejściowych szybko znajduje się optymalne rozwiązanie. Programowanie dynamiczne (PD), jako metoda rozwiązywania pewnych zadań optymalizacji, zostało opracowane w latach 50. przez Bellmana (1952). Metodę tę znacznie rozwinięto, przy czym zwiększyła się liczba problemów rozwiązywanych za jej pomocą.

W artykule przedstawiono istotę dyskretnego programowania dynamicznego (Ignasiak 2001; Trzaskalik 2003), następnie opisano problem decyzyjny dotyczący optymalnego wyboru obszarów zasiewu w gospodarstwie rolnym, a także metodę PD. Dla rozpatrywanego zadania podano rozwiązanie optymalne i wyniki numeryczne.

METODA PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

Istota programowania dynamicznego polega na tym, że w celu znalezienia optymalnego ciągu decyzji proces sterowalny rozdziela się na wiele kolejnych etapów. Każdemu etapowi przypisuje się pewną wartość decyzyjną, a dla całego procesu tworzy się kryterium optymalności jako funkcję wielu zmiennych (wartości decyzyjnych) – Kowalik (2004). Następnie korzysta się z zasady: „Optymalna strategia sterowania ma tę własność, że jakikolwiek by był stan początkowy i decyzja początkowa, to następne decyzje muszą tworzyć optymalną strategię sterowania względem stanu wynikającego z pierwszej" (Bellman 1967, s. 504). Zatem etap procesu sterowalnego to podstawowe pojęcie metody PD. Metodę PD można stosować w procesach ekonomicznych, które zachodzą w czasie – wówczas pojedynczym etapem może być pewien odcinek czasu (rok, miesiąc, godzina), jak również w procesach, które nie rozwijają się w czasie. W tym drugim przypadku przejście do następnego stadium może oznaczać na przykład uruchomienie kolejnej maszyny bądź wykonanie kolejnej inwestycji. Efektem zastosowania metody programowania dynamicznego jest ustalenie optymalnej strategii (optymalnego planu działania). Zaletą tej metody jest sprowadzenie zadania poszukiwania ekstremum funkcji n zmiennych do zadania poszukiwania ekstremum funkcji jednej zmiennej. Zatem można rozwiązywać tą metodą zadania o dużej liczbie zmiennych decyzyjnych, z nieciągłymi lub nieróżniczkowalnymi funkcjami celu oraz zadania, które nie są zadaniami programowania wypukłego. Programowanie dynamiczne jest metodą rozwiązywania zadań zarówno optymalizacji dynamicznej, jak i optymalizacji statycznej. Ważne jest, aby proces sterowalny charakteryzował się tzw. własnością Markowa, co oznacza, że wartość uzyskana na i-tym etapie optymalizacji zależy tylko od stanu na i-1 etapie oraz od decyzji podjętej na i-tym etapie. Problematyka związana z programowaniem dynamicznym została szerzej opisana m.in. w pracach Bellmana (1967), Findeisena (1972), Grabowskiego (1980), Lwa i Maucha (2007), Maucha (2004), Robinetta i Wilsona (2005).

PROBLEM OPTYMALNEGO PRZYDZIAŁU W GOSPODARSTWIE ROLNYM

Załóżmy, że gospodarz właściciel 720 ha gruntów ornych ziemi, położonej w trzech gminach *A, B* i *C*, ma problem optymalnego zasiewu pola czterema różnymi zbożami, przy czym x_1 oznacza ilość ziemi pod uprawę pszenicy ozimej, x_2 – ilość żyta, x_3 – ilość owsa, a x_4 – ilość jęczmienia ozimego w ha. Gospodarstwa nie można traktować jako jednolitej całości z powodu zróżnicowania jakości ziemi. Poniżej przedstawiono tabele, w których w ostatnich kolumnach znajdują się ceny, jakie otrzyma rolnik w skupie za odpowiednią ilość każdej z upraw. Cena uwzględnia wielkość plonowania każdej z upraw w poszczególnych gminach oraz ceny skupu (prognozy tych wielkości). Dodatkowym założeniem jest wielkość powierzchni gruntów ornych w poszczególnych gminach: w gminie *A* wynosi ona 240 ha, w gminie *B* – 200 ha, a w gminie *C* – 280 ha. Odgórnie została narzucona wielkość zasiewów – do maksymalnie 120 ha na każdą z upraw w każdej gminie oraz optymalna struktura zasiewów – pszenica i żyto po 300 ha, natomiast owies i jęczmień po 200 ha. W tabeli 1 przedstawiono zysk gospodarza po obsianiu poszczególnymi zbożami powierzchni 0, 40, 80, 120 ha pól *A, B, C*.

Tabela 1. Zależność zysku od gatunku uprawianego zboża, rodzaju pola i powierzchni

Pole *A*, max 240 ha			Pole *B*, max 200 ha			Pole *C*, max 280 ha		
gatunek zboża	powierzchnia uprawy [ha]	zysk [zł]	gatunek zboża	powierzchnia uprawy [ha]	zysk [zł]	gatunek zboża	powierzchnia uprawy [ha]	zysk [zł]
x_1	0	0	x_1	0	0	x_1	0	0
	40	114 800		40	98 400		40	101 680
	80	216 480		80	190 240		80	196 800
	120	295 200		120	265 680		120	183 680
x_2	0	0	x_2	0	0	x_2	0	0
	40	75 040		40	58 960		40	72 360
	80	139 360		80	107 200		80	139 360
	120	201 000		120	160 800		120	209 040
x_3	0	0	x_3	0	0	x_3	0	0
	40	77 720		40	69 680		40	58 960
	80	150 080		80	139 360		80	107 200
	120	209 040		120	201 000		120	152 760
x_4	0	0	x_4	0	0	x_4	0	0
	40	63 840		40	76 000		40	97 280
	80	121 600		80	139 840		80	182 400
	120	164 160		120	209 760		120	264 480

Dane przedstawione w tab. 1 zostaną przekształcone do postaci, która pozwoli wykorzystać metodę programowania dynamicznego do znalezienia optymalnego rozwiązania. Z danych umieszczonych w tab. 1 powstaną 4 funkcje, które będą odpowiadały poszczególnym gatunkom uprawianego zboża $C(x_1,d_1)$, $C(x_2,d_2)$, $C(x_3,d_3)$, $C(x_4,d_4)$, gdzie $C(x_k,d_k)$, to zysk wynikający z obsiania $d_k=(Ax_k,Bx_k,Cx_k)$ ha zbożem x_k, $k\in\{1,2,3,4\}$, $\sum_k Ax_k = 240$ ha, $\sum_k Bx_k = 200$ ha, $\sum_k Cx_k = 280$ ha, $x_1 \le 300$ ha, $x_2 \le 300$ ha, $x_3 \le 200$ ha, $x_4 \le 200$ ha.

Zatem argumentami funkcji $C(x_k,d_k)$ będą zmienne oznaczające wielkość powierzchni uprawianego pola w gminach *A, B, C,* obsianego zbożem x_k, natomiast wartością funkcji będzie zysk, jaki otrzymamy po obsianiu danej powierzchni gmin zbożem x_k. Budując funkcje $C(x_k,d_k)$, należy pamiętać, aby suma argumentów nie przekraczała dopuszczalnej wartości zasiewu zboża x_k, czyli muszą być spełnione warunki: $x_1 \le 300$ ha, $x_2 \le 300$ ha, $x_3 \le 200$ ha, $x_4 \le 200$ ha. Ponieważ funkcje $C(x_k,d_k)$ są bardzo rozbudowane, nie podano ich wszystkich w artykule. Dla zrozumienia problemu przedstawiono kilka wartości funkcji $C(x_k,d_k)$:

$C(x_1,0,0,0)=0$, $C(x_1,0,0,40)=101\,680$, $C(x_1,0,0,120)=183\,680$, $C(x_1,40,0,0)=114\,800$,

$C(x_1,0,80,0)=190\,240$, $C(x_1,80,40,120)=498\,560$, $C(x_4,0,40,0)=76\,000$,

$C(x_4,80,80,0)=261\,440$ itp.

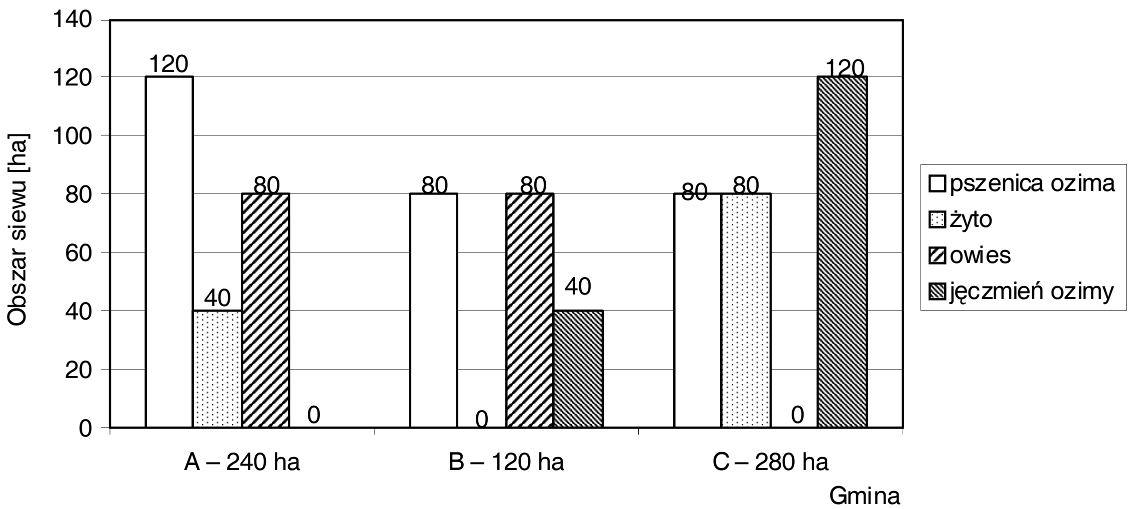
Wprowadźmy dalsze oznaczenia. Danych jest $M = 720$ ha hektarów gruntów ornych do obsiania czterema gatunkami zbóż. Przypuśćmy, że podjęciu decyzji, w odpowiednich etapach, o przydziale d_1 hektarów odpowiada przydział hektarów dla pól *A, B* i *C*, na których zostanie zasiane zboże x_1, następnie ilość d_2 hektarów zostanie obsianych zbożem x_2 itd. Zdefiniujmy stan (x_k, m) jako pozostałą liczbę $m = (mAx_k, mBx_k, mCx_k)$ hektarów do zagospodarowania pól *A, B, C* w etapie k. Zysk wynikający z decyzji o obsianiu d_k hektarów w etapie k po obsianiu zbożem x_k wynosi $C(x_k, d_k)$; następny stan to $(x_{k+1}, m - d_{k+1})$. Równanie funkcyjne programowania dynamicznego (równanie Bellmana) ma postać:

$$f(x_k, m) = \max_d \{C(x_k, d_k) + f(x_{k+1}, m - d_{k+1})\} \tag{1}$$

Optymalne rozwiązanie to wartość maksymalna $f(x_1, (240{,}200{,}280))$.

Przy tak postawionych warunkach, korzystając z metody programowania dynamicznego, otrzymujemy optymalne rozwiązanie problemu. Pole *A* o powierzchni 240 ha zostanie obsiane w następujący sposób: 120 ha zbożem x_1, 40 ha zbożem x_2 oraz 80 ha zbożem x_3. Na polu *B*, o powierzchni 200 ha, zasiejemy 80 ha zbożami x_1, x_3 i 40 ha zbożem x_4. Natomiast pole *C*, o powierzchni 280 ha, zostanie obsiane zbożem x_1, x_2 (80 ha) oraz zbożem x_4 (120 ha). Zysk przy tak zagospodarowanych gruntach w poszczególnych gminach będzie najwyższy – $f(x_1, (240{,}200{,}280)) = 1\,526\,560$.

Na rysunku 1 przedstawiono optymalny wysiew zbóż w trzech gminach, korzystając z metody dyskretnego programowania dynamicznego.



Rys. 1. Optymalne rozwiązanie metodą programowania dynamicznego problemu optymalnego przydziału; siew w gminach *A*, *B* i *C* przy ograniczeniach: gmina *A* – 240 ha, gmina *B* – 120 ha, gmina C – 280 ha

PODSUMOWANIE

Otrzymanie przez gospodarstwo rolne jak największego zysku z działalności jest bardzo ważnym zagadnieniem w rozwoju wsi. W artykule przedstawiono problem przydziału rodzaju i ilości siewu do poszczególnych gatunków ziemi w trzech gminach. W przedstawionym przykładzie występują ograniczenia powierzchni gruntów ornych, dana jest również wiedza z okresów poprzednich dotycząca plonu otrzymanego z 1 ha w poszczególnych gminach. Dla znalezienia optymalnego rozwiązania wykorzystano metodę dyskretnego programowania dynamicznego. Zaletą metody PD jest szybkie znalezienia optymalnego rozwiązania nawet przy bardzo dużej ilości zmiennych wejściowych i ograniczeń.

PIŚMIENNICTWO

Bellman R. 1952. On the theory of dynamic programming. Proceedings of the National Academy of Sciences USA 38, 716–719.

Bellman R. 1967. Programowanie dynamiczne. PWN, Warszawa.

Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A. 1972. Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. Warszawa, PWN.

Grabowski W. 1980. Programowanie matematyczne. Warszawa, PWE.

Ignasiak E. 2001. Badania operacyjne. Warszawa, PWE.

Kowalik S. 2004. Nowoczesne metody optymalizacyjne w zastosowaniach górniczych i ekonomicznych. Gliwice, Wydaw. Politechniki Śląskiej.

Lew A., Mauch H. 2007. Dynamic programming. Berlin, Springer-Verlag.

Mauch H. 2004. A Petri Net representation for dynamic programming problems in management application. [in: Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on System Sciences], Hawaii 2004, Washington, Dc, USA, IEE Computer Society.

Robinett R.D., Wilson D.G. Eisler G.R., Hurtado J.E. 2005. Applied dynamic programming for optimizations of dynamical system. SIAM, Philadelphia.

Trzaskalik T. 2003. Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem. Warszawa, PWE.