

## WPLYW FAZY WŁÓKNISTEJ NA SZTYWNOŚĆ DŹWIGARÓW WŁÓKNOKOMPOZYTOWYCH NA PRZYKŁADZIE TARCZY ŻELBETOWEJ

Ewa Piątek-Sierek

Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy

**Streszczenie.** Beton zbrojony to jeden z najczęściej stosowanych w budownictwie materiałów włóknokompozytowych. W tradycyjnym inżynierskim podejściu (na etapie obliczeń statycznych) traktujemy go jako materiał jednorodny, izotropowy, co nie odpowiada rzeczywistej dwuskładnikowej strukturze (matryca + włókna) żelbetu. Dość oczywistym stwierdzeniem jest to, że ilość włókien i ich rozmieszczenie w konstrukcjach włóknokompozytowych wpływają na sztywność tych konstrukcji. W licznych pracach naukowych o kompozytach analizuje się jednak przede wszystkim warunki wyężenia i na tym tle poszukuje się optymalnych materiałów kompozytowych. Rzadziej analizuje się sztywność konstrukcji kompozytowych, stąd ostatecznie nie ma pełnej jasności co do faktycznej istotności wpływu fazy włóknistej na wartość przemieszczeń. Na przykładzie tarczy żelbetowej, obciążonej dynamicznie, zbrojonej dwiema rodzinami włókien (siatek prętowych), przedstawiono w pracy, iż uwzględnienie w obliczeniach statycznych ilości zbrojenia i jego rozmieszczenia ma istotny wpływ na sztywność tych konstrukcji. Do rozwiązania zagadnienia początkowo-brzegowego użyto metody elementów czasoprzestrzennych.

**Słowa kluczowe:** sztywność tarczy żelbetowej, włóknokompozyt, rozmieszczenie zbrojenia, metoda elementów czasoprzestrzennych

### WSTĘP

Beton zbrojony to jeden z najczęściej stosowanych materiałów konstrukcyjnych. Pod względem budowy beton zaliczamy do materiałów kompozytowych. Kompozyty betonowe różnią się zasadniczo od kompozytów o dużej wytrzymałości, gdyż matryce betonowe są kruche, zawartość włókien stanowi niewielki procent objętości kompozytu,

a przyczepność spoiwa cementowego do włókien jest niedoskonała. Z tych powodów mechanika tych kompozytów w niewielkim stopniu oparta jest na klasycznej mechanice kompozytów. Kompozyty betonowe obejmują materiały zbudowane głównie ze spoiw cementowych, z wypełniaczy przeważnie w postaci kruszyw (mineralnych, naturalnych lub sztucznych) oraz z uzbrojenia włóknami różnych rodzajów lub siatkami [Brandt 2003]. W związku z tym wyróżniamy kompozyty betonowe z tworzywami sztucznymi (np. PIC – polymer impregnated concrete, PCC – polymer cement concrete, PC – polymer concrete), betony uzbrojone włóknami ciągłymi (np. siatkobeton), betony uzbrojone krótkimi włóknami (np. fibrobeton).

W analizie materiałów kompozytowych stosuje się dwa podejścia oparte na zasadach makromechaniki i mikromechaniki. W podejściu makroskopowym kompozyt traktuje się jako ośrodek jednorodny (homogeniczny), ale jednocześnie anizotropowy, co oznacza, iż wieloskładnikowa budowa kompozytu nie ma znaczenia przy wyznaczeniu np. charakterystyk materiałowych. W podejściu mikroskopowym dla kompozytu zbudowanego z tych samych składników uwzględnia się różnice w wartościach charakterystyk materiałowych. Wynika to z mikroskopowej budowy kompozytu, charakteryzującej się wieloma parametrami dotyczącymi własności fizycznych, chemicznych, mechanicznych i geometrycznych. Z tych rozważań wynika, że kompozyt w istocie jest ośrodkiem niejednorodnym. Wszystkie znane materiały są zawsze w określonej skali niejednorodne. Skalę niejednorodności określa się skalą mikroskopową lub lokalną, w przeciwieństwie do skali makroskopowej, w której definiuje się zwykle ośrodek ekwiwalentny – jednorodny. Opis w skali makroskopowej ciała złożonego z materiałów niejednorodnych polega na określeniu związków fizycznych, równań fizycznych i parametrów efektywnych ośrodka jednorodnego w miejsce znanych związków fizycznych, równań bilansów, wielkości i parametrów fizycznych w skali niejednorodności. Opis makroskopowy może być uzyskany metodą fenomenologiczną (eksperymentalną) bezpośrednio w skali makroskopowej bądź też przy zastosowaniu metod teorii homogenizacji, tzn. poprzez przejście drogą teoretyczną od opisu procesów w skali mikroskopowej do skali makroskopowej [Christensen 1979, Dato 1991].

Poszukiwanie kompozytów o coraz lepszych właściwościach jest przedmiotem wielu badań teoretycznych i eksperymentalnych [Metody optymalizacji... 1994]. Materiałom tym stawia się różnorodne wymagania, np. dotyczące wytrzymałości na ściskanie, rozciąganie i zginanie, naprężeń rysujących, energii odkształcenia i zniszczenia [np. Marks 2004]. Niewiele jest natomiast prac, w których analizowana jest sztywność konstrukcji kompozytowych [np. Świtka i Podhorecki 1996, Dąbrowski i in. 2001]. Istnieje wiele konstrukcji budowlanych, w których warunek sztywności jest decydującym kryterium projektowym (np. dźwigary kablobetonowe). W przypadku kompozytów betonowych uzbrojonych rodzinami włókien sztywność konstrukcji zależy od ilości i rozmieszczenia zbrojenia. Jest to w ogólności dość oczywiste stwierdzenie. Jeżeli jednak rozpatrywać będziemy rzeczywiste konstrukcje żelbetowe, rzecz przestaje być tak oczywista, gdyż w tradycyjnym inżynierskim podejściu (na etapie obliczeń statycznych) rozpatrujemy materiał jednorodny i izotropowy, a nie dwuskładnikowy (matryca i rozmieszczone w niej włókna), jakim beton wzmacniany włóknami jest w rzeczywistości.

W pracy na przykładzie tarczy żelbetowej obciążonej dynamicznie, zbrojonej dwiema rodzinami włókien ciągłych, analizuje się istotność wpływu ilości i rozmieszczenia

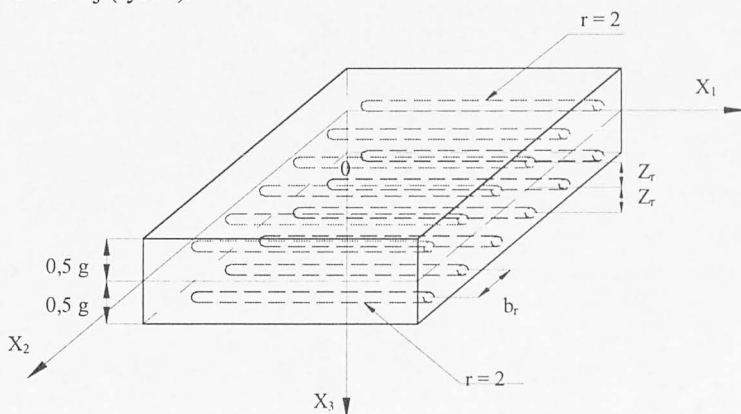
zbrojenia na sztywność obliczanego dźwigara. Tak postawiony problem ma ważne znaczenie praktyczne, gdyż może stanowić przyczynek np. do korekty warunków projektowych zawartych w obowiązujących normatywach.

## ROZPATRYWANE ZAGADNIENIE

W pracy rozpatruje się kompozyt dwufazowy zbrojony włóknami ciągłymi (długimi). Włókna rozmieszczone są w uporządkowany sposób w postaci np. siatek. Przykładem takiego kompozytu są np. siatkobetony. Do opisu makroskopowego stosuje się metodę fenomenologiczną i w takim przypadku równania opisujące zagadnienie początkowo-brzegowe definiowane są wprost w skali makroskopowej.

Przyjęto koncepcję ośrodka dwufazowego sformułowaną przez Holnickiego-Szulca [1978, 1990]. Pierwowzorem takiego modelu jest ośrodek ciągły z gęsto rozproszoną strukturą kratową. Otrzymamy wtedy wyidealizowany ciągły ośrodek dwufazowy charakteryzujący się tym, że każdemu punktowi geometrycznemu należącemu do tego ośrodka przyporządkowane są dwa punkty materialne należące do różnych faz.

W pracy na przykładzie tarczy geometrycznie i fizycznie liniowej, obciążonej dynamicznie, wyznacza się funkcje pola przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w funkcji czasu. Tarczę stanowi włóknokompozyt, który modeluje się z dwóch faz: faza I – matryca (np. beton), faza II – włókna (np. pręty stalowe, struny). Zbrojenie rozmieszczone jest w osnowie w sposób uporządkowany i składa się z dowolnej liczby ( $r$ ) rodzin włókien. Każda rodzina składa się z prętów leżących w jednej płaszczyźnie. Wszystkie pręty są do siebie równoległe i dostatecznie gęsto rozmieszczone. Warunkiem wystąpienia stanu tarczowego jest rozlokowanie włókien symetrycznie względem powierzchni środkowej (rys. 1).



Rys. 1. Model włóknokompozytu zbrojony dwiema rodzinami włókien ( $r = 1$  oraz  $r = 2$ )

Fig. 1. The model of fibre composite reinforced with two families of fibre ( $r = 1$  and  $r = 2$ )

Zgodnie z przyjętą koncepcją obie fazy stanowią ośrodek ciągły, tzn. są doskonale ze sobą połączone (niemożliwy jest „poślizg” jednej fazy względem drugiej), stąd:

$$\sigma = \sigma^I + \sigma^{II}, \quad \varepsilon = \varepsilon^I = \varepsilon^{II} \quad (1)$$

gdzie:  $\sigma, \varepsilon$  – macierze odpowiednio naprężeń i odkształceń wypadkowych,

$\sigma^I, \varepsilon^I$  – macierze odpowiednio naprężeń i odkształceń fazy I,

$\sigma^{II}, \varepsilon^{II}$  – macierze odpowiednio naprężeń i odkształceń fazy II.

## OPIS DRGAŃ TARCZY WŁÓKNOKOMPOZYTOWEJ W UJĘCIU LOKALNYM

W celu wyznaczenia równań fizycznych przyjęto, iż siła w pojedynczym rozpatrywanym włóknie (pręcie) rodziny  $r - S_1^r$  (rys. 2.) dana jest wzorem [Świtka 1992]:

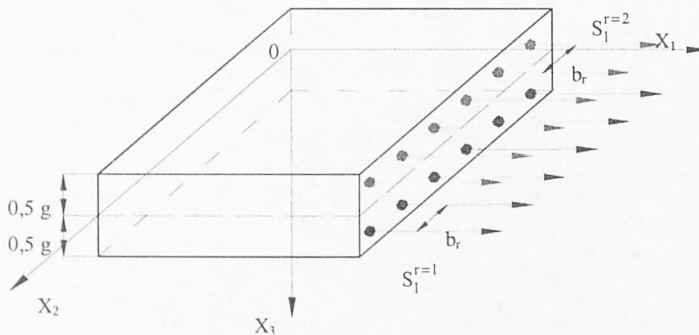
$$S_1^r = E_r A_r (\varepsilon_1^r - \varepsilon_1^{or}) \quad (3)$$

gdzie:  $E_r$  – moduł Younga pręta rodziny  $r$ ,

$A_r$  – pole przekroju pręta rodziny  $r$ ,

$\varepsilon_1^r$  – odkształcenie podłużne pręta rodziny  $r$ ,

$\varepsilon_1^{or}$  – dystorsja (np. wstępny naciąg) pręta rodziny  $r$ .



Rys. 2. Siły w prętach ( $S_1^r$ ) włókno kompozytu

Fig. 2. Forces ( $S_1^r$ ) in the fibres of fibre composite

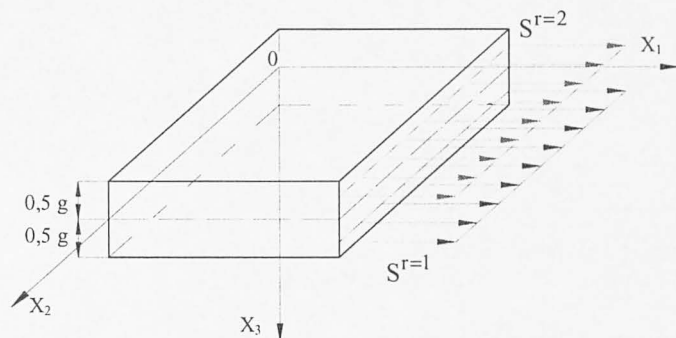
Pręty w każdej rodzinie  $r$  rozmieszczone są dostatecznie gęsto, stąd można przyjąć (rys. 3), że siły skupione  $(S_1^r)$  tworzą obciążenie rozłożone na jednostkę długości  $(S^r)$  [Świtka 1992]:

$$S^r = \frac{E_r A_r}{b_r} (\varepsilon^r - \varepsilon^{or}) \quad (4)$$

gdzie:  $b_r$  – odległość między prętami rodziny  $r$ ,

$\varepsilon^r$  – odkształcenie podłużne prętów rodziny  $r$ ,

$\varepsilon^{or}$  – dystorsja (np. wstępny naciąg) prętów rodziny  $r$ .



Rys. 3. Obciążenie rozłożone  $(S^r)$

Fig. 3. Distributed load  $(S^r)$

Pręty danej rodziny  $r$  mogą być ukierunkowane pod różnym kątem w stosunku do osi  $X_1, X_2$  (rys. 4) i dlatego obciążenie  $S^r$  musi zostać przetransformowane do przyjętego układu odniesienia  $X_1, X_2$ :

$$S_{ij}^r = \frac{E_r A_r}{b_r} (\varepsilon_{kl}^r s_k^r s_l^r - \varepsilon_{kl}^{or} s_k^r s_l^r) s_i^r s_j^r \quad (5)$$

$$i, j = 1, 2 \quad \mathbf{X}, t \in A \times (0, \infty)$$

gdzie:  $A$  – powierzchnia środkowa tarczy,

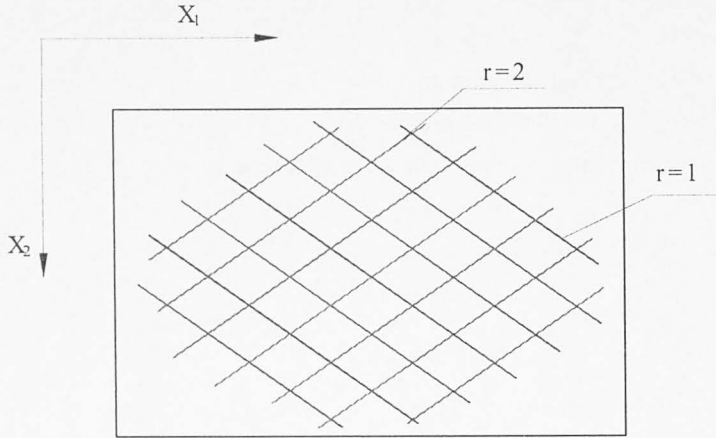
$$s_i^r = \cos \kappa (\bar{\mathbf{S}}^r, X_i) \quad (6)$$

są cosinusami kierunkowymi orientującymi włókna rodziny  $r$ .

Następnie to obciążenie sprowadzamy do naprężeń  $\sigma_{ij}^{II}$ :

$$\sigma_{ij}^I = \sum_r \frac{S_{ij}^r}{g} \quad (7)$$

gdzie  $g$  – grubość tarczy.



Rys. 4. Rodziny włókien mogą być usytuowane dowolnie względem osi  $X_1, X_2$   
Fig. 4. Fibres families can be arranged arbitrarily in relation to  $X_1, X_2$  axes

Równania fizyczne zapisujemy także dla matrycy:

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I (\varepsilon_{kl}^I - \varepsilon_{kl}^{ol}) \quad (8)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}^I, \varepsilon_{kl}^I$  – tensor naprężeń i odkształceń matrycy,

$\varepsilon_{kl}^{ol}$  – tensor dystorsji matrycy (powstały np. podczas produkcji włóknokompozytu),

$C_{ijkl}^I$  – tensor zawierający stałe materiałowe matrycy:

$$C_{ijkl}^I = \begin{bmatrix} \frac{E_b}{1-\nu_b^2} & \frac{\nu_b E_b}{1-\nu_b^2} & & & & \\ & \frac{E_b}{1-\nu_b^2} & & & & \\ \frac{\nu_b E_b}{1-\nu_b^2} & & \frac{E_b}{1-\nu_b^2} & & & \\ & & & & & \\ & & & & \frac{E_b}{1+\nu_b} & \\ & & & & & \frac{E_b}{1+\nu_b} \end{bmatrix} \quad (9)$$

gdzie  $E_b, \nu_b$  oznaczają odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona matrycy.

Ostatecznie równanie konstytutywne, opisujące przyjęty kompozyt, ma postać:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} = C_{ijkl}^I (\varepsilon_{kl}^I - \varepsilon_{kl}^{oI}) + \frac{1}{g} \sum_r \frac{E_r A_r}{b_r} (\varepsilon_{kl}^r s_k^r s_l^r - \varepsilon_{kl}^{or} s_k^r s_l^r) s_i^r s_j^r \quad (10)$$

Zagadnienie początkowo-brzegowe opisują ponadto następujące równania określone dla  $i, j, k, l = 1, 2$  oraz  $(X, t) \in A \times (0, \infty)$ :

– równania równowagi

$$\sigma_{ij,i} + \rho f_j = \rho \ddot{u}_j \quad (11)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość materiału,

$\rho f_j$  – składowe wektora sił masowych włóknokompozytu,

$\ddot{u}_j$  – składowe wektora przyspieszeń przemieszczeń,

$\rho \ddot{u}_j$  – składowe wektora sił bezwładności,

– równania geometryczne

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (12)$$

gdzie  $u_i$  – składowe wektora przemieszczeń.

Uzupełnieniem równań (10)–(12) są warunki brzegowe typu geometrycznego i statycznego:

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{u}_i & \text{na } \partial A_u, \\ p_i &= \sigma_{ij} n_j & \text{na } \partial A_p, \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie:  $p_j$  – składowe wektora obciążenia zewnętrznego,

$n_j$  – cosinus kierunkowy,  $n_j = \cos \angle (p, X_j)$ ,

$p$  – wektor obciążenia zewnętrznego,

$\partial A_u$  – powierzchnia graniczna, na której znane są przemieszczenia,

$\partial A_p$  – powierzchnia graniczna, na której znane są obciążenia oraz warunki początkowe:

$$u_i = u_i^0, \quad \dot{u}_i = v_i^0 \quad (14)$$

gdzie  $u_i$  – składowe wektora prędkości przemieszczeń.

## OPIS DRGAŃ TARCZY WŁÓKNOKOMPOZYTOWEJ W UJĘCIU GLOBALNYM

Do sformułowania globalnego wykorzystano uogólnioną zasadę prac wirtualnych (zasadę wariacyjną), która umożliwia przekształcenie równań różniczkowych (10)–(14) w równanie całkowe. Związek ten Kączkowski [1975, 1976] nazywa równaniem czasopracy wirtualnej:

$$\begin{aligned}
 & g \int_{t_0}^{t_k} \left( \int_A \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dA - \int_A \delta \dot{u}_j \rho \dot{u}_j dA - \int_A \delta u_j \rho f_j dA - \int_{\partial A_p} \delta u_j p_j d(\partial A) \right) dt + \\
 & - g \int_A \delta u_j \rho \dot{u}_j dA \Big|_{t_0}^{t_k} = 0 \quad \text{dla } i, j = 1, 2
 \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie:  $\langle t_0, t_k \rangle$  – czas obserwacji,

$\delta u_j, \delta \dot{u}_j$  – funkcje wirtualne odpowiednio przemieszczeń i prędkości przemieszczeń,

$\delta \varepsilon_{ij}$  – funkcja wirtualna odkształceń.

## RÓWNANIA MECZ

Do rozwiązania równania czasopracy wirtualnej (15) zastosowano metodę elementów czasoprzestrzennych (MECZ). Metoda elementów czasoprzestrzennych jest metodą numeryczną opracowaną przez Kączkowskiego [1975, 1976]. W MECZ czas ( $t$ ) traktuje się jako czwartą współrzędną, na równi z trzema współrzędnymi kartezjańskimi  $\mathbf{X}$ . Takie traktowanie czasu pozwala na wyprowadzenie pojęcia skończonego elementu czasoprzestrzennego (SKECZ) poprzez analogię do elementu skończonego (w metodzie elementów skończonych) oraz stosowanie znanych procedur wyznaczania macierzy sztywności ustroju, bez konieczności ich modyfikacji. Obierając funkcję przemieszczeń jako niewiadome podstawowe, opisujemy je w obrębie SKECZ za pomocą przemieszczeń węzłowych ( $r_\alpha$ ):

$$\begin{aligned}
 u^e(\mathbf{X}, t) &= \Phi_\alpha^e(\mathbf{X}, t) r_\alpha^e \\
 (\mathbf{X}, t) &\in \Omega_e
 \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie:  $\Phi_\alpha^e(\mathbf{X}, t)$  – macierz kształtu zawierająca funkcje czasoprzestrzenne,

$\Omega_e$  – obszar SKECZ,

$\alpha = 1, 2, \dots, a$  – liczba węzłów SKECZ,

$e = 1, 2, \dots, n$  – liczba SKECZ.

Wyrażając wielkości występujące w równaniu (15) za pomocą aproksymacji (16), ostatecznie otrzymamy w zapisie macierzowym równanie MECZ w postaci:

$$\mathbf{K} \mathbf{r} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{17}$$

gdzie:

$$K_{\alpha\beta}^e = g \left[ \int_{\Omega_e} B_{ij\alpha}^e \left( C_{ijkl}^e B_{kl\beta}^e + \frac{1}{d} \sum_r \frac{E_r A_r}{b_r} B_{kl\beta}^e s_k^r s_l^r s_i^r s_j^r \right) d\Omega - \int_{\Omega_e} \Phi_{i\alpha}^e \rho^e \Phi_{i\beta}^e d\Omega \right] \tag{18}$$



jest macierzą sztywności czasoprzestrzennej SKECZ,

$$F_{\alpha}^e = g \left( \int_{\Omega_c} B_{ij\alpha}^e C_{ijkl}^{le} \varepsilon_{kl}^{ole} d\Omega + \frac{1}{d} \int_{\Omega_c} \sum_r \frac{E_r A_r}{b_r} B_{ij\alpha}^e \varepsilon_{kl}^{ore} s_k^r s_l^r s_i^r s_j^r d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_c} \Phi_{j\alpha}^e \rho^e f_j^e d\Omega + \int_{\partial\Omega_{pe}} \Phi_{j\alpha}^e p_j d(\partial\Omega) + \int_{A_e} \Phi_{j\alpha}^e \rho^e u_j^e dA \right) \Big|_{t_0^e}^{t_k^e} \quad (19)$$

opisuje wektor impulsów węzłowych SKECZ,

$r$  – wektor przemieszczeń węzłowych zdyskretyzowanej struktury czasoprzestrzennej,

$K$  – globalna macierz sztywności czasoprzestrzennej,

$F$  – wektor impulsów dyskretyzacji,

$\partial\Omega_{pe}$  – powierzchnia graniczna SKECZ, na której znane są obciążenia,

$B_{ij\alpha}^e(X, t)$  – zależy od funkcji kształtu

$$B_{ij\alpha}^e = \frac{1}{2} (\Phi_{i\alpha, j}^e + \Phi_{j\alpha, i}^e) \quad (20)$$

We wzorze (18) widać wyraźnie wpływ zbrojenia na sztywność macierzy czasoprzestrzennej. Element ten jest źródłem anizotropii ośrodka kompozytowego.

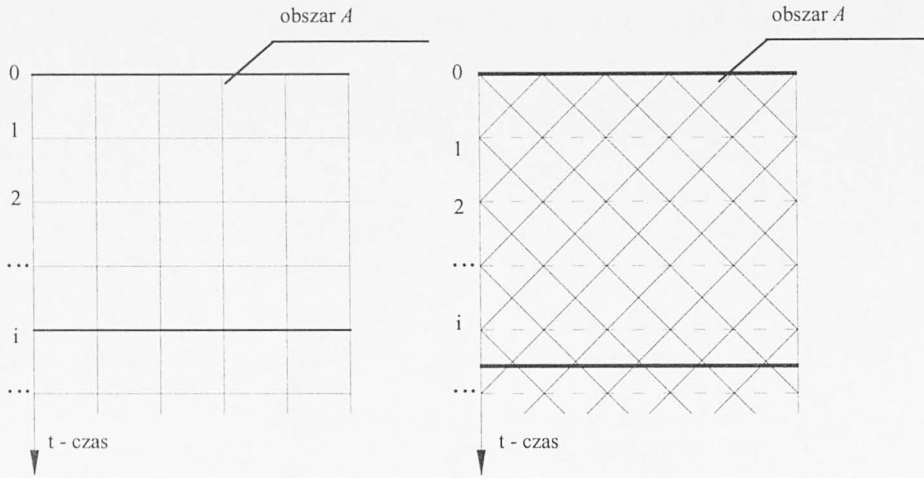
Równania MECZ, niezależnie od sposobu dyskretyzacji, mają następującą strukturę [Kączkowski 1979]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^0 & \mathbf{B}^0 & & & & & \\ \mathbf{C}^1 & \mathbf{D}^1 + \mathbf{A}^1 & \mathbf{B}^1 & & & & \\ & \mathbf{C}^2 & \mathbf{D}^2 + \mathbf{A}^2 & \mathbf{B}^1 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & \mathbf{C}^i & \mathbf{D}^i + \mathbf{A}^i & \mathbf{B}^i & \\ & & & & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^0 \\ \mathbf{r}^1 \\ \mathbf{r}^2 \\ \dots \\ \mathbf{r}^i \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^0 \\ \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \\ \dots \\ \mathbf{F}^i \\ \dots \end{bmatrix} \quad (21)$$

gdzie:  $\mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i, \mathbf{C}^i, \mathbf{D}^i$  są macierzami składowymi macierzy sztywności czasoprzestrzennej  $\mathbf{K}$  sformułowanymi w chwili  $t = t_i$ . Przy danych warunkach początkowych (14) równania te rozwiązujemy rekurencyjnie [Kączkowski 1976, 1979]:

$$\mathbf{r}^{i+1} = (\mathbf{B}^i)^{-1} \left\{ \mathbf{F}^i - \mathbf{C}^i \mathbf{r}^{i-1} - (\mathbf{A}^i + \mathbf{D}^i) \mathbf{r}^i \right\} \quad (22)$$

gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots$  są punktami na osi czasu (rys. 5).



Rys. 5. Dowolny podział pasma czasoprzestrzennego  
 Fig. 5. Arbitrary division of the space – time bend

Przedstawiona wersja MECZ jest metodą warunkowo stabilną, stąd na wymiary SKECZ nałożone są pewne ograniczenia [Podhorecki 1991].

## PRZYKŁAD

Do analizy wybrano jednostronnie utwardzoną tarczę żelbetową wykonaną z betonu B-30. Zbrojenie tarczy stanowią dwie niezależne rodziny siatek prętowych o module sprężystości  $E_r = 200$  GPa. Jedna z tych rodzin składa się z 10 prętów (2 siatki po 5 prętów), a druga z 30 prętów (2 siatki po 15 prętów). W trakcie obliczeń zmieniano średnicę prętów (czyli ilość zbrojenia) i kąt nachylenia prętów. Geometrię tarczy i przykładowe rozmieszczenie zbrojenia przedstawiono na rysunku 6. Tarcza została obciążona na końcu siłą Heaviside'a  $P(t) = P_0 H(t)$ , gdzie  $P_0 = 100$  kN, natomiast:

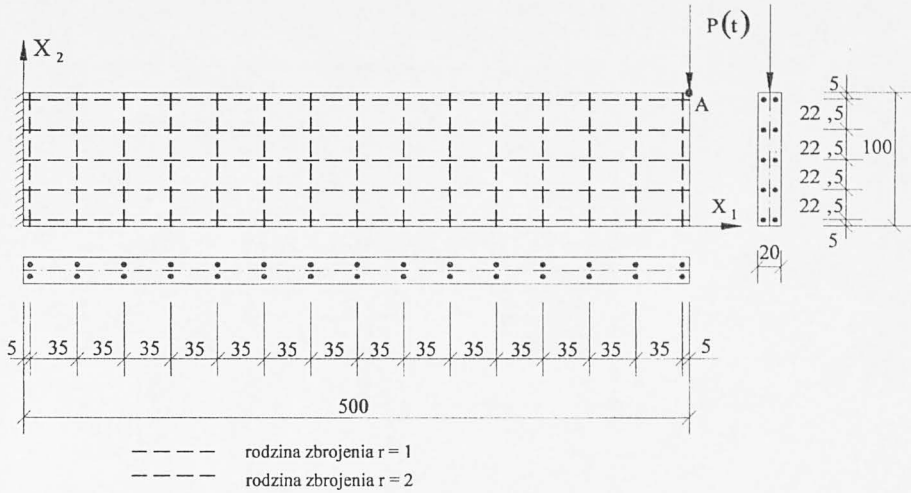
$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

Przyjęto zerowe warunki początkowe

$$r(t=0) = \dot{r}^0 = 0, \quad \dot{r}(t=0) = \dot{r}^0 = 0 \quad (24)$$

Celem analizy jest zilustrowanie wpływu ilości zbrojenia oraz jego rozmieszczenia na sztywność rozpatrywanej tarczy.

Obszar czasoprzestrzenny podzielono na jednakowe elementy czasoprzestrzenne (SKECZ) – prostopadłościany (rys. 7). Przyjęto, iż w węzłach SKECZ mamy po dwa stopnie swobody. Do opisu pola przemieszczeń wykorzystano funkcję kształtu (funkcję aproksymującą), analogiczną jak dla trójwymiarowych prostopadłościennych elementów skończonych (ES) [Zienkiewicz 1972]:



Rys. 6. Geometria analizowanej tarczy z przykładowym rozmieszczeniem zbrojenia  
 Fig. 6. Geometry of the considered shield and example of arrangement of fibres

$$\Phi_{\alpha}(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_{\alpha}) (1 + \eta \eta_{\alpha}) (1 + \tau \tau_{\alpha}) \quad (24)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, 16$

gdzie:

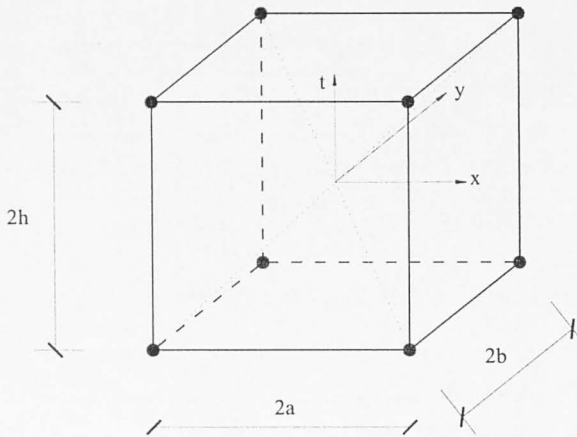
$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \tau = \frac{t}{h} \quad (25)$$

natomiast  $\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, \tau_{\alpha}$  są parametrami znaku przyjmującymi wartość 1 lub -1. Krok całkowania po czasie przyjęto o  $h = 0,0001$  s. Mając funkcję kształtu, można na podstawie wyrażenia (18) określić wyrazy macierzy sztywności czasoprzestrzennej SKECZ:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} = & g a b h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ B_{1\kappa} \left( \frac{E_b}{1-\nu_b^2} B_{1\beta} + \frac{\nu_b E_b}{1-\nu_b^2} B_{22\beta} \right) + \frac{2 E_b}{1+\nu_b} B_{12\alpha} B_{12\beta} + \right. \\ & + B_{22\alpha} \left( \frac{\nu_b E_b}{1-\nu_b^2} B_{1\beta} + \frac{E_b}{1-\nu_b^2} B_{22\beta} \right) + \frac{1}{g} \sum_r \frac{E_r A_r}{b_r} \left\{ (s_1^4 B_{1\kappa} + 2 s_1^3 s_2 B_{12\alpha} + s_1^2 s_2^2 B_{22\alpha}) B_{1\beta} + \right. \\ & + (2 s_1^3 s_2 B_{1\kappa} + 4 s_1^2 s_2^2 B_{12\alpha} + 2 s_1 s_2^3 B_{22\alpha}) B_{12\beta} + \\ & \left. \left. + (s_1^2 s_2^2 B_{1\kappa} + 2 s_1 s_2^3 B_{12\alpha} + s_2^4 B_{22\alpha}) B_{22\beta} \right\} - \Phi_{1\alpha}^e \rho^e \Phi_{1\beta}^e - \Phi_{2\alpha}^e \rho^e \Phi_{2\beta}^e \right] d\xi d\eta d\tau \end{aligned} \quad (26)$$

$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 16$

Dla uproszczenia zapisu przyjęto oznaczenie  $s'_i = s_i$ .



Rys. 7. Zastosowany prostopadłościenny element czasoprzestrzenny  
 Fig. 7. Applied rectangular space – time element

Następnie stosując procedurę rekurencyjną, obliczono przemieszczenia i naprężenia w rozpatrywanym obszarze czasoprzestrzennym. Przedmiotem pracy jest sztywność dźwigara, stąd w dalszych rozważaniach analizuje się wyłącznie przemieszczenia. W rozpatrywanym przypadku maksymalne przemieszczenie pionowe wystąpi przy nieutwierdzonym końcu tarczy wspornikowej, stąd analizie poddano przemieszczenie pionowe przykładowo wybranego punktu  $A$ , znajdującego się na kierunku  $i$  w miejscu przyłożenia siły  $P(t)$ . Wyniki amplitud przemieszczeń pionowych punktu  $A$  zestawiono w tabelach 1–3:

- tabela 1: włókna znajdują się na kierunkach osi  $X_1, X_2$ , zmianie ulega ich pole przekroju poprzecznego,
- tabela 2, 3: włókna jednej rodziny przy stałym kącie nachylenia zmieniają pole przekroju poprzecznego, a drugiej rodziny przy stałym kącie nachylenia mają niezmiennie pole przekroju poprzecznego.

Na rysunku 8. przedstawiono umowę znakowania kątów  $\alpha_1, \alpha_2$ , które określają ułożenie włókna względem osi  $X_1, X_2$ .

W przypadku braku zbrojenia przemieszczenie pionowe jednorodnej i izotropowej tarczy żelbetowej w punkcie  $A$  wynosi:

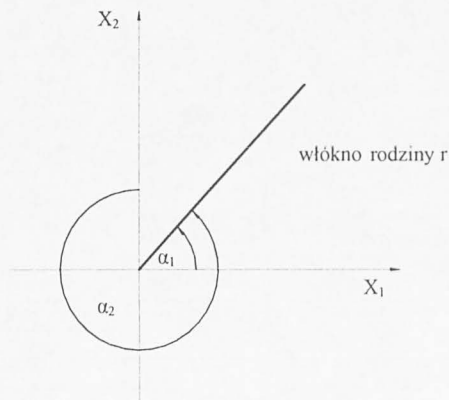
$$u = 144,26388 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad (27)$$

Taki sposób liczenia przemieszczeń przyjmuje się także w obliczeniach inżynierskich konstrukcji żelbetowych, co praktycznie oznacza, że ilość i rozmieszczenie zbrojenia nie ma bezpośredniego wpływu na faktyczną sztywność tej konstrukcji.

Tabela 1. Amplitudy przemieszczeń pionowych punktu  $A$  przy pracy obu rodzin włókien  $r = 1$  (zbrojenie podłużne) oraz  $r = 2$  (zbrojenie poprzeczne)

Table 1. Amplitudes of vertical displacement of point  $A$  with both families  $r = 1$  and  $r = 2$  fibres working (length – and widthwise reinforcement elements)

Średnica zbrojenia Diameter of reinforcement fibre $\phi$ [mm]	Sumaryczne pole przekroju zbrojenia rodziny $r = 1$ (zbrojenie podłużne) Total cross section area of family $r = 1$ fibres (lengthwise reinforcement) $A_{r=1} \cdot 10^{-4}$ [m <sup>2</sup> ]	Sumaryczne pole przekroju zbrojenia rodziny $r = 2$ (zbrojenie poprzeczne) Total cross section area of family $r = 2$ fibres (widthwise reinforcement) $A_{r=2} \cdot 10^{-4}$ [m <sup>2</sup> ]	Amplituda przemieszczenia pionowego punktu $A$ Amplitudes of vertical displacement of point $A$ $u_{MECZ} \cdot 10^{-4}$ [m]	Różnica wyników Difference of results $\varepsilon = \left  \frac{u_{MECZ} - u}{u} \right  \cdot 100\%$
4,5	1,60	4,80	141,14169	2,16
5	2,00	6,80	140,04477	2,92
6	2,83	8,48	138,92440	3,70
8	5,03	15,08	136,39968	5,45
10	7,85	23,60	131,81409	8,63
12	11,30	34,00	129,67613	10,11
14	15,40	60,30	126,14289	12,56
16	20,10	64,20	124,33723	13,81
18	25,40	76,24	121,98293	15,44



Rys. 8. Umowa znakowania kątów  $\alpha_1, \alpha_2$

Fig. 8. Conventional marking of angles  $\alpha_1, \alpha_2$

Tabela 2. Amplitudy przemieszczeń pionowych punktu  $A$  przy pracy prętów rodziny  $r = 1$  w postaci 2 siatek po 5 prętów, przy  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 300^\circ$  oraz prętów rodziny  $r = 2$  w postaci 2 siatek po 15 prętów przy  $\alpha_1 = 120^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$

Table 2. Amplitudes of vertical displacement of point  $A$  with family  $r = 1$  fibres working – 2 meshes 5 fibres each, angles  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 300^\circ$  and with family  $r = 2$  fibres working – 2 meshes 15 fibres each, angles  $\alpha_1 = 120^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$

Średnica zbrojenia Diameter of reinforcement fibre $\phi$ [mm]	Sumaryczne pole przekroju zbrojenia rodziny $r = 1$ (zbrojenie podłużne) Total cross section area of family $r = 1$ fibres (lengthwise reinforcement)	Sumaryczne pole przekroju zbrojenia rodziny $r = 2$ (zbrojenie poprzeczne) Total cross section area of family $r = 2$ fibres (widthwise reinforcement)	Amplituda przemieszczenia pionowego punktu $A$ Amplitudes of vertical displacement of point $A$ $u_{MECZ} \cdot 10^{-4}$ [m]	Różnica wyników Difference of results $\varepsilon = \left  \frac{u_{MECZ} - u}{u} \right  \cdot 100\%$
	$A_{r=1} \cdot 10^{-4}$ [m <sup>2</sup> ]	$A_{r=2} \cdot 10^{-4}$ [m <sup>2</sup> ]		
4,5	1,60	34,00	141,92604	1,62
5	2,00	34,00	141,47796	1,93
6	2,83	34,00	140,39458	2,68
8	5,03	34,00	138,27016	4,15
10	7,85	34,00	135,08715	6,36
12	11,30	34,00	133,40097	7,52
14	15,40	34,00	130,08199	9,83
16	20,10	34,00	128,30594	11,06
18	25,40	34,00	126,19760	12,52

Tabela 3. Amplitudy przemieszczeń pionowych punktu  $A$  przy pracy prętów rodziny  $r = 1$  w postaci 2 siatek po 5 prętów, przy  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 330^\circ$  oraz prętów rodziny  $r = 2$  w postaci 2 siatek po 15 prętów przy  $\alpha_1 = 150^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$

Table 3. Amplitudes of vertical displacement of point  $A$  with family  $r = 1$  fibres working – 2 meshes 5 fibres each, angles  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 330^\circ$  and with family  $r = 2$  fibres working – 2 meshes 15 fibres each, angles  $\alpha_1 = 150^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$

Średnica zbrojenia Diameter of reinforcement fibre $\phi$ [mm]	Sumaryczne pole przekroju zbrojenia rodziny $r = 1$ (zbrojenie podłużne) Total cross section area of family $r = 1$ fibres (lengthwise reinforcement)	Sumaryczne pole przekroju zbrojenia rodziny $r = 2$ (zbrojenie poprzeczne) Total cross section area of family $r = 2$ fibres (widthwise reinforcement)	Amplituda przemieszczenia pionowego punktu $A$ Amplitudes of vertical displacement of point $A$ $u_{MECZ} \cdot 10^{-4}$ [m]	Różnica wyników Difference of results $\varepsilon = \left  \frac{u_{MECZ} - u}{u} \right  \cdot 100\%$
	$A_{r=1} \cdot 10^{-4}$ [m <sup>2</sup> ]	$A_{r=2} \cdot 10^{-4}$ [m <sup>2</sup> ]		
4,5	1,60	34,00	143,49542	0,53
5	2,00	34,00	143,36725	0,62
6	2,83	34,00	143,13744	0,78
8	5,03	34,00	142,64325	1,12
10	7,85	34,00	142,15111	1,46
12	11,30	34,00	141,53573	1,89
14	15,40	34,00	141,16254	2,15
16	20,10	34,00	140,25314	2,78
18	25,40	34,00	139,70549	3,16

## PODSUMOWANIE

Przeprowadzone analizy pozwalają sformułować wniosek, że uwzględnienie w obliczeniach statycznych konstrukcji żelbetowych ilości i rozmieszczenia zbrojenia mają istotny wpływ na sztywność tych konstrukcji. W analizowanej tarczy żelbetowej, przy umiarkowanym zbrojeniu podłużnym w ilości  $\mu = 1,27\%$  ( $\mu$  oznacza tzw. procent zbrojenia), przy uwzględnieniu faktycznej ilości i rozmieszczenia zbrojenia, otrzymano przemieszczenia mniejsze mniej więcej o 15,5% od przemieszczeń tarczy jednorodnej i izotropowej. Dokonano analogicznej analizy tarcz żelbetowych o innych schematach statycznych i innych obciążeniach dynamicznych i za każdym razem otrzymywano zbliżone rezultaty.

W pracy [Marks 2004] rozwiązano zagadnienie analizy i optymalizacji tarczy składającej się z matrycy uzbrojonej dwiema rodzinami włókien ułożonymi symetrycznie względem płaszczyzny środkowej. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum energii odkształcenia oraz koszt elementu kompozytowego. Biorąc pod uwagę sformułowany wyżej wniosek o istotnym wpływie ilości i rozmieszczenia zbrojenia na wartości przemieszczeń konstrukcji żelbetowych warto wzbogacić optymalizację dźwigarów włóknokompozytowych o warunki sztywności.

## PIŚMIENNICTWO

- Brandt A.M., 2003. Struktury materiałów kompozytowych o cementowej matrycy. *Drogi i Mosty* 3, 43–71.
- Christensen R.M., 1979. *Mechanics of composite materials*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Datoo M.H., 1991. *Mechanics of fibrous composites*. Elsevier Applied Science, London & New York.
- Dąbrowski H., Kałwak J., Kania A., 2001. Kompozyty polimerowo-szklane w konstrukcjach wież i masztów telekomunikacyjnych. Materiały kompozytowe – właściwości, wytwarzanie, zastosowanie. III Konferencja Naukowo-Techniczna, Wrocław.
- Holnicki-Szulc J., 1978. Zagadnienia sprężania w ośrodkach dwufazowych. *Mech. Teoret. i Stos.* 1 (16), 41–55.
- Holnicki-Szulc J., 1990. *Dystorsje w układach konstrukcyjnych: analiza, identyfikacja, sterowanie*. PWN, Poznań – Warszawa.
- Kączkowski Z., 1975. The method of finite space-time elements in dynamics of structures. *J. Techn. Phys.* 1 (16), 69–84.
- Kączkowski Z., 1976. Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Inż. Łąd.* XXII, 3, 365–378.
- Kączkowski Z., 1979. General formulation of the stiffness matrix for the space – time finite elements. *Arch. Inż. Łąd.* XXV, 3, 351–357.
- Marks M., 2004. O kompozytach uzbrojonych dwiema rodzinami włókien. *Prace IPPT* 1.
- Metody optymalizacji materiałów kompozytowych o matrycach cementowych, 1994 (red.) A.M. Brandt. *Studia z Zakresu Inżynierii*, 38, Warszawa
- Podhorecki A., 1991. Metoda elementów czasoprzestrzennych w geometrycznie nieliniowej teorii sprężystości. *Rozp.* 45, ATR Bydgoszcz.
- Świtka R., Podhorecki A., 1996. Behavior of fibre composite plate cantilever in bending. *Arch. of Civil Eng.* XLII, 3, 293–306.
- Świtka R., 1992. Equations of the fibre composite plates. *Eng. Trans.* 2 (40), 187–201.
- Zienkiewicz O.C., 1972. *Metoda elementów skończonych*. Arkady, Warszawa.

## INFLUENCE OF FIBROUS PHASE ON THE FIBRE COMPOSITE GIRDER STIFFNESS FOR EXAMPLE OF REINFORCED CONCRETE SHIELD

**Abstract.** Reinforced concrete is one of the most often used fibre composite construction materials. In a traditional engineer analysis (at the stage of structural analysis) it is considered a homogenous, isotropic material and not two elements medium (matrix + reinforcement elements) as reinforced concrete is in reality. It is enough obvious that quantity and arrangement of fibres influence on fibre composite constructions stiffness. Many scientific publications about composites analyse criterion of material effort in the first place and against of this background optimum composite material is searched. Rarely the fibre composite construction stiffness has been analysed therefore the influence of fibrous phase on value of displacement is not enough clear. The dynamically loaded reinforced with two families of fibres (reinforcement elements nets) concrete shield was used in this article as an example to show that regarding quantity and arrangement of fibres in structural analysis have important influence on the fibre composite construction stiffness. The analysis of the discussed initial – boundary value problem was performed with the application of the space – time finite elements method.

**Key words:** reinforced concrete shield stiffness, fibre composite, reinforcement elements arrangement, space – time finite elements method

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 12.05.2005