Dorota Kozioł-Kaczorek[1]
Katedra Ekonomiki Rolnictwa i Międzynarodowych Stosunków Gospodarczych
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Warszawa

Zastosowanie adaptacyjnego przedziału ufności do oszacowania różnicy dwóch średnich w badaniach ekonomicznych

Application of adaptive confidence interval for difference of two means in economic analysis

Synopsis. W niniejszej publikacji przedstawiono metodę estymacji przedziałowej różnicy dwóch średnich w przypadku jednoczesnego naruszenia założeń o normalności rozkładów porównywanych zmiennych i jednorodności wariancji. Proponowana metoda jest w literaturze opisywana jako adaptacyjny przedział ufności. W pracy została ona zilustrowana na przykładzie analizy porównawczej zadłużenia w wielkoobszarowych gospodarstwach prywatnych i dzierżawionych.

Słowa kluczowe: estymacja przedziałowa, test symetrii, przedział ufności Welch-Satterthwaite, adaptacyjny przedział ufności, zadłużenie, wskaźniki zadłużenia.

Abstract. A method of interval estimation of the difference of two means in the case of simultaneous violations of assumptions of normal distribution of variables and homogeneity of their variance is presented in this paper. In literature, the proposed method is described as an adaptive confidence interval. The confidence interval considered is presented on the example of a comparative analysis of the debt of large private or leased agricultural holdings.

Key words: interval estimation, test of symmetry, confidence interval Welch-Satterthwaite, adaptive confidence interval, ratios of debt.

Wprowadzenie

W analizach ilościowych często pojawia się potrzeba oceny różnicy pomiędzy średnimi pochodzącymi z dwóch niezależnych rozkładów. Rozwiązaniem są różne konstrukcje przedziałów ufności dla różnicy średnich. W przypadku zmiennych z rozkładu normalnego, których wariancje nie różnią się statystycznie istotnie, powszechnym podejściem jest wykorzystanie rozkładu t z sumaryczną wariancją próbkową. W sytuacji, gdy wariancje nie są jednorodne, problem porównywania średnich z dwóch populacji normalnych nosi w literaturze nazwę problemu Behrensa-Fishera. Jednym z jego rozwiązań jest przedział ufności Welch-Satterthwaite (I_{WS}). Natomiast w przypadku naruszenia założenia o normalności rozkładów wiadomym jest, że zarówno konstrukcje oparte o rozkład t jak i przedział ufności I_{WS} wykazują odporność, pod warunkiem jednakże, iż analizowane zmienne pochodzą z rozkładów symetrycznych [Miao i Chiou 2007]. W

[1] Dr, e-mail: dorota_koziol@sggw.pl.

praktyce jednak może się okazać, że porównywane rozkłady nie są rozkładami symetrycznymi oraz, że wariancje nie są jednorodne. Celem pracy jest prezentacja metody estymacji przedziałowej różnicy średnich w przypadku, gdy niespełnione są założenia dotyczące symetrii rozkładów oraz homogeniczności wariancji. Zaproponowana metoda nosi nazwę adaptacyjnego przedziału ufności. Obejmuje ona wykonanie testu symetrii dla zmiennych z obu porównywanych populacji. Jeżeli test wykaże symetryczność rozkładów, wtedy do oszacowania różnicy średnich wykorzystuje się przedział ufności I_{WS}. Jeżeli zaś badane rozkłady nie są symetryczne, to do ich porównanie zostanie wykorzystany przedział I_{log} skonstruowany na podstawie odpowiednio zmodyfikowanych danych. W skrócie schemat postępowania można zapisać następująco:

$$I_{adp} = \begin{cases} I_{log}, & \text{jeżeli rozkłady asymetryczne,} \\ I_{WS}, & \text{jeżeli rozkłady symetryczne.} \end{cases} \tag{1}$$

Proponowany sposób postępowania został zilustrowany na przykładzie analizy porównawczej średniego poziomu zadłużenia wielkoobszarowych gospodarstw dzierżawionych i wielkoobszarowych gospodarstw prywatnych. Analizowany poziom zadłużenia został przedstawiony za pomocą finansowych wskaźników zadłużenia. Obliczenia wykonano w pakiecie statystycznym R 2.11.1 [R: A language… 2005] oraz w programie Microsoft Excel 2007.

Adaptacyjny przedział ufności

Test symetrii

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie losową próbą z dowolnego rozkładu. Hipotezy zerowa i alternatywna mają postać:

H_0: cecha X ma rozkład symetryczny,

H_1: cecha X nie ma rozkładu symetrycznego.

Statystyką testu symetrii jest

$$T = \frac{\bar{X} - M}{J}, \text{ gdzie } J = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i - M|, \tag{2}$$

gdzie $\bar{X}$ i M są odpowiednio próbkową średnią oraz medianą, π to stała matematyczna. Zauważmy, że licznik statystyki T jest różnicą pomiędzy próbkową średnią i medianą, a mianownik jest odpornym estymatorem odchylenia standardowego. Taka statystyka testowa ma asymptotyczny rozkład normalny. Hipotezę zerową odrzucamy na poziomie istotności α jeżeli

$$|T| \geq \frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{0.5708}}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

gdzie stała 0.5708 jest asymptotyczną wariancją statystyki T w przypadku, gdy rozkład zmiennej X jest rozkładem normalnym, a $U_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jest kwantylem rzędu $(1 - \alpha/2)$ standardowego rozkład normalnego N(0,1) [Miao i Chiou 2007].

Przedział ufności Welch-Satterthwaite (I_{WS})

Niech $X_1, \dots, X_n$ oraz $Y_1, \dots, Y_m$ będą losowymi próbami z dwóch niezależnych rozkładów ze średnimi µX, µY oraz wariancjami σ_X^2, σ_Y^2 odpowiednio. Ponadto, niech $\bar{X}$, $\bar{Y}$, S_X^2, S_Y^2 będą estymatorami punktowymi średnich i wariancji dla zmiennych X i Y odpowiednio. Przyjmijmy również, że t_k^* jest kwantylem rzędu $(1 - \alpha/2)$ rozkładu t z k stopniami swobody. Interesuje nas przedział ufności dla µX - µY (na poziomie ufności $1 - \alpha$). Przedział ufności Welch-Satterthwaite (I_{WS}) ma postać:

$$I_{WS} = (\bar{X} - \bar{Y}) \pm t_k^* \sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}, \tag{4}$$

gdzie

$$k = \frac{(w_1 + w_2)^2}{\frac{w_1^2}{(n_X - 1)} + \frac{w_2^2}{(n_Y - 1)}} \quad \text{oraz} \quad w_1 = \frac{S_X^2}{n_X} \text{ i } w_2 = \frac{S_Y^2}{n_Y}. \tag{5}$$

Wiadomym jest, że jeżeli obie zmienne X i Y pochodzą z rozkładu normalnego, to przedział ten jest odporny na niespełnienie założenia o równości wariancji, czyli sprawdza się zarówno w przypadku nierównych wariancji, jak i w przypadku, gdy wariancje są jednorodne [Miao i Chiou 2007]. Podobnie, jeżeli zmienne X i Y nie pochodzą z rozkładu normalnego, ale ich rozkłady są symetryczne, to naruszenie wspomnianego założenia nie wpływa na jakość uzyskanych wyników.

Skorygowany przedział ufności dla asymetrycznych rozkładów(I_{log})

W przypadku asymetrycznych rozkładów wystarczy zlogarytmowanie danych, aby uczynić je bardziej symetrycznymi. Dlatego też przy konstruowaniu przedziału ufności I_{log} pierwszym krokiem będzie modyfikacja danych X_i na $\log(X_i + cX)$ oraz Y_i na $\log(Y_i + cY)$, gdzie cX i cY są stałymi zapewniającymi $X_i + cX > 0$ oraz $Y_i + cY > 0$. Na tak zmodyfikowanych danych konstruuje się przedział ufności I_{WS}. Następny krok polega skorygowaniu uzyskanych wyników ze względu na wcześniejsze przekształcenia danych. Niech wobec tego $[L_{log}, U_{log}]$ oznacza granice przedziału ufności I_{WS} skonstruowanego na podstawie danych $\log(X_1 + cX), \dots, \log(X_nX + cX)$ oraz $\log(Y_1 + cY), , \dots, \log(Y_nY + cY)$. Skorygowany przedział ufności dla µX - µY (na poziomie ufności $1 - \alpha$) w przypadku asymetryczności obu porównywanych rozkładów ma wówczas postać:

$$I_{log} = \left[\bar{Y}(e^{L_{log}} - 1) + (c_Y \cdot e^{L_{log}} - c_X), \bar{Y}(e^{U_{log}} - 1) + (c_Y \cdot e^{U_{log}} - c_X)\right] \tag{6}$$

Uzasadnienie tej konstrukcji oraz jej własności są szczegółowo opisane w pracy Miao i Chiou [2007].

Analiza porównawcza poziomu zadłużenia

Proponowany powyżej sposób postępowania zostanie zilustrowany na przykładzie analizy porównawczej średniego poziomu zadłużenia wielkoobszarowych gospodarstw dzierżawionych i wielkoobszarowych gospodarstw prywatnych. Do badań wykorzystano informacje dotyczące gospodarstw wielkoobszarowych zlokalizowanych na terenie Polski. Dane te pochodzą ze sprawozdań finansowych tych gospodarstw z 2008 roku. Za gospodarstwo wielkoobszarowe uznano gospodarstwa o powierzchni powyżej 100 ha użytków rolnych [Ziętara 2005]. W analizowanej próbie znajdowało się 46 gospodarstw prywatnych i 62 gospodarstwa dzierżawione. Celem analizy było porównanie średniego poziomu zadłużenia w zależności od formy organizacyjno-prawnej gospodarstwa.

Oceny zadłużenia poszczególnych gospodarstw dokonano na podstawie wskaźnika wyposażenia w kapitał własny, wskaźnika zadłużenia długoterminowego kapitału własnego, wskaźnika zadłużenia krótkoterminowego kapitału własnego oraz wskaźnika ogólnego zadłużenia [Jarka 2004]. W tabeli 1 przedstawiono formuły, według których obliczono wspomniane wskaźniki [Dębski 2005].

Tabela 1. Wskaźniki analizy finansowej

Table 1. Indices of financial analysis

Wskaźnik	Formuła
wyposażenia w kapitał własny	kapitał własny / pasywa
ogólnego zadłużenia	dług ogółem / aktywa ogółem
zadłużenia długoterminowego kapitału własnego	zadłużenie długoterminowe / kapitał własny
zadłużenia krótkoterminowego kapitału własnego	zadłużenie krótkoterminowe / kapitał własny

Źródło: opracowanie własne.

Analiza porównawcza średniego poziomu zadłużenia polegała na oszacowaniu różnic pomiędzy średnimi wartościami poszczególnych wskaźników z grupy gospodarstw prywatnych i z grupy gospodarstw dzierżawionych. Przyjęto następujące oznaczenia:

W^d_{WKW}, W^P_{WKW} – wskaźnik wyposażenia w kapitał własny odpowiednio gospodarstwa dzierżawionego i gospodarstwa prywatnego,

W^d_{OZ}, W^P_{OZ} – wskaźnik ogólnego zadłużenia odpowiednio gospodarstwa dzierżawionego i gospodarstwa prywatnego,

W^d_{ZDKW}, W^P_{ZDKW} – wskaźnik zadłużenia długoterminowego kapitału własnego odpowiednio gospodarstwa dzierżawionego i gospodarstwa prywatnego,

W^d_{ZKKW}, W^P_{ZKKW} – wskaźnik zadłużenia krótkoterminowego kapitału własnego odpowiednio gospodarstwa dzierżawionego i gospodarstwa prywatnego.

Celem analizy było uzyskanie odpowiedzi, na następujące pytania:

- jaka jest różnica między średnim wskaźnikiem wyposażenia w kapitał własny gospodarstw dzierżawionych i gospodarstw prywatnych $\left(\mu_{W^d_{WKW}} - \mu_{W^P_{WKW}}\right)$,
- jaka jest różnica między średnim wskaźnikiem ogólnego zadłużenia gospodarstw dzierżawionych i gospodarstw prywatnych $\left(\mu_{W^d_{OZ}} - \mu_{W^P_{OZ}}\right)$,
- jaka jest różnica między średnim wskaźnikiem zadłużenia długoterminowego kapitału własnego gospodarstw dzierżawionych i gospodarstw prywatnych $\left(\mu_{W^d_{ZDKW}} - \mu_{W^P_{ZDKW}}\right)$,

- jaka jest różnica między średnim wskaźnikiem zadłużenia krótkoterminowego kapitału własnego gospodarstw dzierżawionych i gospodarstw prywatnych $\left(\mu_{W^d_{ZKKW}} - \mu_{W^p_{ZKKW}}\right)$.

W pierwszym etapie zbadano jednorodność wariancji kolejnych par wskaźników. W tym celu dla każdej pary sformułowano hipotezę o równości wariancji, którą następnie zweryfikowano testem F Snedecora. Wykorzystanie tego testu było możliwe ze względu na fakt, iż jest on odporny na niespełnienie założenia o normalności rozkładów [Tarasińska 2007]. Zestawienie sformułowanych hipotez i wyniki ich weryfikacji w postaci wartości statystyk testowych F_{emp} oraz wartości poziomu krytycznego przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Wyniki weryfikacji hipotez H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Table 2. Results of the verification of hypotheses H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

hipoteza zerowa	F_{emp}	poziom krytyczny
H_0: $\sigma^2_{W^d_{WKW}} = \sigma^2_{W^p_{WKW}}$	1.875	0.03248
H_0: $\sigma^2_{W^d_{OZ}} = \sigma^2_{W^p_{OZ}}$	1.879	0.03178
H_0: $\sigma^2_{W^d_{ZDKW}} = \sigma^2_{W^p_{ZDKW}}$	3.148	0.00010
H_0: $\sigma^2_{W^d_{ZKKW}} = \sigma^2_{W^p_{ZKKW}}$	8.510	0.00000

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku przeprowadzonego testowania wszystkie hipotezy zerowe zostały odrzucone na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Oznacza to, że wariancje kolejnych par wskaźników nie są jednorodne.

Następnym krokiem było sprawdzenie normalności rozkładów badanych zmiennych. W tym celu dla każdego wskaźnika sformułowano hipotezę normalności rozkładu, którą następnie zweryfikowano testem Shapiro-Wilka. Zestawienie sformułowanych hipotez i wyniki ich weryfikacji w postaci w postaci wartości statystyk testowych W_{emp} oraz wartości poziomu krytycznego przedstawia tabela 3.

Tabela 3. Wyniki weryfikacji hipotez H_0: zmienna ma rozkład normalny

Table 3. Results of the verification of hypotheses H_0: the variable is normally distributed

hipoteza zerowa	W_{emp}	poziom krytyczny
H_0: W^d_{WKW} ma rozkład normalny	0.8979	0.0000
H_0: W^p_{WKW} ma rozkład normalny	0.9237	0.0057
H_0: W^d_{OZ} ma rozkład normalny	0.8979	0.0000
H_0: W^p_{OZ} ma rozkład normalny	0.9237	0.0057
H_0: W^d_{ZDKW} ma rozkład normalny	0.5462	0.0000
H_0: W^p_{ZDKW} ma rozkład normalny	0.6545	0.0000
H_0: W^d_{ZKKW} ma rozkład normalny	0.7334	0.0000
H_0: W^p_{ZKKW} ma rozkład normalny	0.6475	0.0000

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku przeprowadzonego testowania wszystkie hipotezy zerowe zostały odrzucone na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Oznacza to, że badane wskaźniki nie mają rozkładów normalnych.

Wobec tego zbadano, czy rozkłady wskaźników zadłużenia są symetryczne. W tym celu zastosowano test symetrii. W tabeli 4 przedstawiono wyniki weryfikacji hipotez o symetryczności rozkładów w postaci wartości statystyki testowej T (wzór 2) i wartości krytycznej (wzór 3).

Tabela 4. Wyniki weryfikacji hipotez H_0: nieznany rozkład zmiennej jest symetryczny

Table 4. Results of the verification of hypotheses H_0: the underlying distribution is symmetric

hipoteza zerowa	statystyka testowa T	wartość krytyczna
H_0: W^d_{WKW} ma rozkład symetryczny	0.3700	0.1900
H_0: W^p_{WKW} ma rozkład symetryczny	0.2700	0.2200
H_0: W^d_{OZ} ma rozkład symetryczny	0.2600	0.1900
H_0: W^p_{OZ} ma rozkład symetryczny	0.3500	0.2200
H_0: W^d_{ZDKW} ma rozkład symetryczny	0.2000	0.1900
H_0: W^p_{ZDKW} ma rozkład symetryczny	0.4600	0.2200
H_0: W^d_{ZKKW} ma rozkład symetryczny	0.4300	0.1900
H_0: W^p_{ZKKW} ma rozkład symetryczny	0.5600	0.2200

Źródło: opracowanie własne

W wyniku przeprowadzonego testowania wszystkie hipotezy zerowe zostały odrzucone na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ (wartości statystyki testowej T > wartości krytycznej, patrz wzór 3). Oznacza to, że rozkłady analizowanych wskaźników nie są symetryczne. Wobec tego do oszacowania różnicy pomiędzy średnimi wartościami wskaźników skonstruowano przedziały ufności I_{log}. Najpierw zmodyfikowano dane według formuły $\log(X_i + cX)$. Stałą cX przyjęto w minimalnej wielkości, zapewniającej $X_i + cX > 0$, czyli $cX = 0.1$.

Dla tak skonstruowanych danych, na poziomie ufności $1 - \alpha = 0{,}95$, oszacowano przedział I_{WS}, a następnie na jego podstawie skonstruowano przedział I_{log}. Uzyskane wyniki przedstawia tabela 5.

Tabela 5. Przedziały ufności I_{log}

Table 5. Confidence intervals I_{log}

Przedział ufności dla różnicy średnich I_{log}	
$\mu_{W^d_{WKW}} - \mu_{W^p_{WKW}}$	(- 0.024; 0.004)
$\mu_{W^d_{OZ}} - \mu_{W^p_{OZ}}$	(- 0.021; 0.043)
$\mu_{W^d_{ZDKW}} - \mu_{W^p_{ZDKW}}$	(- 0.051; 0.047)
$\mu_{W^d_{ZKKW}} - \mu_{W^p_{ZKKW}}$	(0.030; 0.176)

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku wskaźnika wyposażenia w kapitał własny skonstruowany przedział ufności dla różnicy średnich zawiera zero. Oznacza to, że nie udało się rozróżnić badanych średnich, czyli można uznać je za takie same. Podobnie w przypadku wskaźnika ogólnego zadłużenia i wskaźnika zadłużenia długoterminowego kapitału własnego. Oba skonstruowane przedziały ufności przechodzą przez zero, co oznacza, że można średnie uznać za takie same. Natomiast w przypadku wskaźnika zadłużenia krótkoterminowego kapitału własnego różnica pomiędzy ich wartościami średnimi jest statystycznie istotna i zawiera się w przedziale od 0,03 do około 0,18. Oznacza to, że średnie wskaźniki zadłużenia krótkoterminowego w porównywanych grupach gospodarstw nie są takie same.

Wnioski

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, iż forma organizacyjno-prawna nie wpływa na wysokość wskaźnika wyposażenia w kapitał własny, wysokość wskaźnika ogólnego zadłużenia, ani na wysokość wskaźnika zadłużenia długoterminowego kapitału własnego. Jedynie w przypadku wskaźnika zadłużenia krótkoterminowego kapitału własnego odnotowano wpływ formy organizacyjno-prawnej. Oszacowany przedział ufności wskazuje, że gospodarstwa dzierżawione mają większy stosunek zobowiązań krótkoterminowych do kapitału własnego niż gospodarstwa prywatne. Oznacza to, że częściej niż gospodarstwa prywatne korzystają z finansowania się zobowiązaniami, których wymagalność jest nie dłuższa niż rok.

Zaproponowany adaptacyjny przedział ufności dla różnicy średnich jest łatwym do zastosowania sposobem szacowania różnicy dwóch średnich w przypadku naruszenia założeń dotyczących normalności i symetryczności rozkładu oraz jednorodności wariancji. W literaturze można spotkać również propozycję zastosowania przedstawionego w pracy adaptacyjnego przedziału ufności już po stwierdzeniu, że badane zmienne nie mają rozkładu normalnego (bez testowania symetryczności). Sposób postępowania jest identyczny z prezentowanym w niniejszej publikacji.

Literatura

Jarka S. [2004]: Restrukturyzacja państwowych przedsiębiorstw rolniczych. Szanse i ograniczenia. Wydawnictwo SGGW.

Dębski W. [2005]: Teoretyczne i praktyczne aspekty zarządzania finansami przedsiębiorstwa. Wydawnictwo PWN.

Miao W., Chiou P. [2008]: Confidence intervals for difference between two means. *Computational Statistics & Data Analysis* nr 52, sS. 2238-2248.

R: A language and environment for statistical computing. [2005]. R Development Core Team. R Fundation for Statistical Computing, Wiedeń [Tryb dostępu:] http://www.R-project.org. [Data odczytu: wrzesien 2011].

Tarasińska J. [2007]: Power comparison of four tests in Beherens-Fisher problem. *Colloquium Biometricum* nr 37, ss. 125-135.

Ziętara W. [2005]: Perspektywy rozwoju gospodarstw rolniczych w Polsce. *Wieś Jutra* nr 10, s. 42.