

O PEWNYM UPROSZCZONYM MODELU CIENKIEJ PŁYTY DWUWARSTWOWEJ

Jarosław Lewandowski

Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy

Streszczenie. W pracy skonstruowano nowy, uproszczony model płyty dwuwarstwowej złożonej z dwóch cienkich warstw anizotropowych z uwzględnieniem stanu tarczowego, w którym w odróżnieniu od innych, znanych modeli występuje tylko jedno równanie na ugięcie. Stan zwłóknienia i przemieszczenia poziomego warstw opisuje się wprowadzonymi dodatkowo funkcjami, które można wyznaczyć po wyliczeniu ugięcia z wyprowadzonych wzorów.

Słowa kluczowe: płyta, płyta warstwowa, modelowanie płyt warstwowych

WSTĘP

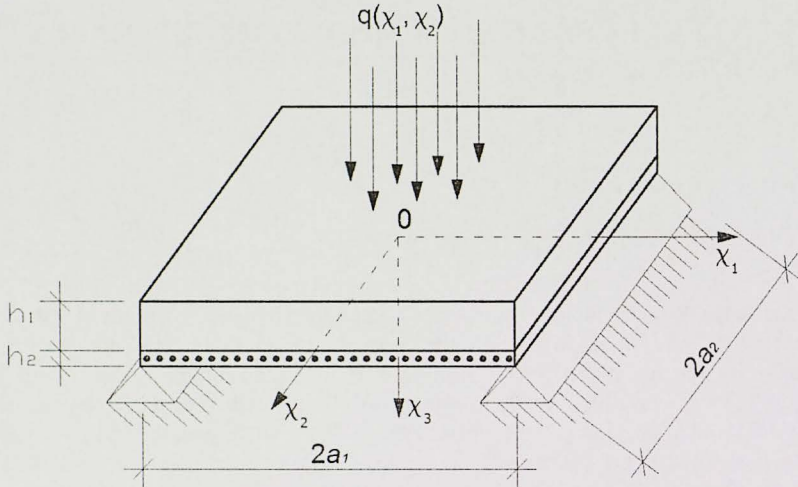
W praktyce inżynierskiej często stosuje się wzmocnienie elementów konstrukcyjnych (belek, płyt) cienkimi warstwami (taśmami) anizotropowymi. Modele matematyczne opisujące takie płyty wzmocnione są bardzo skomplikowane, prowadzą bowiem do układów równań różniczkowych wyższych rzędów. Opis takich modeli można znaleźć np. w monografii *Mechanika sprężystych płyt i powłok* [2001]. W pracy zostanie skonstruowany uproszczony model cienkiej anizotropowej płyty dwuwarstwowej, spełniający ściśle wszystkie założenia statyczne i kinematyczne na powierzchni podziału płyty na warstwy.

Rozważać będziemy płytę prostokątną, złożoną z dwóch różnych warstw anizotropowych, obciążoną na powierzchni górnej obciążeniem $q(x_1, x_2)$ – rysunek 1.

Oznaczmy grubość warstwy górnej przez h_1 , a warstwy dolnej przez h_2 . W każdej z warstw oddzielnie w jej geometrycznym środku wprowadzamy lokalny kartezjański

Adres do korespondencji – Corresponding author: Jarosław Lewandowski, Akademia Techniczno-Rolnicza w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Mechaniki Konstrukcji, ul. Kaliskiego 7, 85-796 Bydgoszcz

układ współrzędnych $Ox_1x_2x_3^{(k)}$. $K = 1, 2$ numeruje warstwy płyty (1 – warstwa górna, 2 – warstwa dolna). Osie $Ox_3^{(k)}$ są zawsze skierowane w dół płyty. Analizę warstwy górnej i dolnej przeprowadzamy oddzielnie, z tego powodu w dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu indeks k we współrzędnej x_3 będziemy pomijać.



Rys. 1. Schemat płyty dwuwarstwowej
Fig. 1. The scheme of the two layered plate

Założmy, że opis pola przemieszczeń w każdej warstwie jest postaci:

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1)} &= -\lambda_1^{(1)}(x_3)w_{,1} - \lambda_2^{(1)}(x_3)\Omega_{1,2} - \lambda_3^{(1)}(x_3)U_1 \\
 u_2^{(1)} &= -\lambda_1^{(1)}(x_3)w_{,2} - \lambda_2^{(1)}(x_3)\Omega_{2,1} - \lambda_3^{(1)}(x_3)U_2, \text{ dla } x_3 \in \left[-\frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{2}\right] \\
 u_1^{(2)} &= -\lambda_1^{(2)}(x_3)w_{,1} - \lambda_2^{(2)}(x_3)\Phi_{1,2} - \lambda_3^{(2)}(x_3)V_1 \\
 u_2^{(2)} &= -\lambda_1^{(2)}(x_3)w_{,2} - \lambda_2^{(2)}(x_3)\Phi_{2,1} - \lambda_3^{(2)}(x_3)V_2, \text{ dla } x_3 \in \left[-\frac{h_2}{2}, \frac{h_2}{2}\right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie: $w = w(x_1, x_2)$ – to samo ugięcie warstwy górnej i dolnej (warstwy są cienkie),

$U_\alpha(x_1, x_2)$, $V_\alpha(x_1, x_2)$, $\alpha = 1, 2$ – funkcje przemieszczeń poziomych,

$\Phi_{\alpha,\beta}$, $\Omega_{\alpha,\beta}$ – funkcje opisujące zwickerzenie włókien $\alpha, \beta = 1, 2$,

$\lambda_i^{(k)}(x_3)$ – funkcje opisujące rozkład przemieszczeń po grubości każdej warstwy.

Założenia kinematyczne (1) są znane w literaturze i stosowane w teoriach płyt uściślonych [Sokołowski 1958], [Bolotin i Novichkov 1980], [Reddy 1989].

Na powierzchni między warstwami powinny być spełnione warunki ciągłości przemieszczeń:

$$u_{\alpha}^{(1)} \Big|_{x_3=\frac{h_1}{2}} = u_{\alpha}^{(2)} \Big|_{x_3=-\frac{h_2}{2}} \quad (2)$$

Podstawiając do warunków (2) wyrażenia (1), otrzymujemy:

$$\lambda_1^{(2)} \left(-\frac{h_2}{2} \right) w_{,1} + \lambda_2^{(2)} \left(-\frac{h_2}{2} \right) \Phi_{1,2} + \lambda_3^{(2)} \left(-\frac{h_2}{2} \right) V_1 = \lambda_1^{(1)} \left(\frac{h_1}{2} \right) w_{,1} + \lambda_2^{(1)} \left(\frac{h_1}{2} \right) \Omega_{1,2} + \lambda_3^{(1)} \left(\frac{h_1}{2} \right) U_1 \quad (3)$$

Przyjmijmy, że funkcje rozkładu przemieszczeń na powierzchni podziału warstw spełniają następujący warunek:

$$\lambda_i^{(2)} \left(-\frac{h_2}{2} \right) = \lambda_i^{(1)} \left(\frac{h_1}{2} \right) \text{ dla } i = \overline{1,3} \quad (4)$$

Wówczas otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V_{\alpha}(x_1, x_2) &= U_{\alpha}(x_1, x_2) \quad \Phi_{\alpha}(x_1, x_2) = \Omega_{\alpha}(x_1, x_2) \\ V_1(x_1, x_2) &= U_1(x_1, x_2) \quad V_2(x_1, x_2) = U_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5)$$

Podstawiamy otrzymane związki (5) do wyrażeń (1) i otrzymujemy przemieszczenie każdej warstwy płyty:

$$\begin{aligned} u_1^{(k)} &= -\lambda_1^{(k)} \left(x_3 \right) w_{,1} - \lambda_2^{(k)} \left(x_3 \right) \Omega_{1,2} - \lambda_3^{(k)} \left(x_3 \right) U_1 \\ u_2^{(k)} &= -\lambda_1^{(k)} \left(x_3 \right) w_{,2} - \lambda_2^{(k)} \left(x_3 \right) \Omega_{2,1} - \lambda_3^{(k)} \left(x_3 \right) U_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Wyrażenia (6) tożsamościowo spełniają warunki ciągłości przemieszczeń na powierzchni podziału warstw. Po podstawieniu tych wyrażeń do związków geometrycznych otrzymujemy odkształcenia każdej warstwy, wyrażone przez pochodne ugięcia płyty w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= u_{1,1} = -\lambda_1^{(1)} \left(x_3 \right) w_{,11} - \lambda_2^{(1)} \left(x_3 \right) \Omega_{1,12} - \lambda_3^{(1)} \left(x_3 \right) U_{1,1} \\ \varepsilon_{22}^{(k)} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\lambda_1^{(1)} \left(x_3 \right) w_{,22} - \lambda_2^{(1)} \left(x_3 \right) \Omega_{2,12} - \lambda_3^{(1)} \left(x_3 \right) U_{2,2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\gamma_{12}^{(k)} = u_{1,2} + u_{2,1} = -2\lambda_1^{(k)} \left(x_3 \right) w_{,12} - \lambda_2^{(k)} \left(x_3 \right) (\Omega_{1,22} + \Omega_{2,11}) - \lambda_3^{(k)} \left(x_3 \right) (U_{1,2} + U_{2,1})$$

OPIS POLA NAPRĘŻEŃ W WARSTWACH

Naprężenia normalne i naprężenia styczne w warstwie „ k ” wyznaczamy z równań fizycznych. Zakładamy, że każda warstwa zawiera jedną płaszczyznę symetrii sprężystej. Oznacza to, że macierz sztywności materiału każdej warstwy w ogólnym przypadku zawiera 13 stałych sprężystych $b_{ijkl}^{(k)}$, $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Równanie konstytutywne dla każdej warstwy w przestrzennym stanie naprężenia ma postać:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = b_{ijkl}^{(k)} \cdot \varepsilon_{kl}^{(k)} \quad (8)$$

W dalszym ciągu wprowadzamy macierzowe oznaczenia naprężeń $\sigma_{\alpha\alpha}^{(k)} = \sigma_{\alpha}^{(k)}$, $\sigma_{12}^{(k)} = \sigma_6^{(k)}$, odkształceń $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(k)} = \varepsilon_{\alpha}^{(k)}$, $\gamma_{12}^{(k)} = \gamma_6^{(k)}$ i stałych sprężystych $b_{\alpha\beta}^{(k)} = b_{ijkl}^{(k)}$, gdzie $\alpha, \beta = 1, 2, 6$. Ponieważ rozpatrywany jest płaski stan naprężenia, więc uwzględniamy tylko 6 stałych sprężystych. Równanie konstytutywne (8) dla płaskiego stanu naprężenia ma postać:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(k)} &= b_{11}^{(k)} \varepsilon_1^{(k)} + b_{12}^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} + b_{16}^{(k)} \gamma_6^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} &= b_{21}^{(k)} \varepsilon_1^{(k)} + b_{22}^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} + b_{26}^{(k)} \gamma_6^{(k)} \\ \sigma_6^{(k)} &= b_{61}^{(k)} \varepsilon_1^{(k)} + b_{62}^{(k)} \varepsilon_2^{(k)} + b_{66}^{(k)} \gamma_6^{(k)} \end{aligned} \quad (9)$$

Podstawiając do równań (8) wyrazy dla odkształceń (7), uzyskujemy naprężenia w każdej warstwie płyty:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(k)} &= - \left[\lambda_1^{(k)} (x_3) (b_{11}^{(k)} w_{,11} + b_{12}^{(k)} w_{,22} + 2b_{16}^{(k)} w_{,12}) \right] + \\ &- \lambda_1^{(k)} (x_3) [b_{11}^{(k)} \Omega_{1,12} + b_{12}^{(k)} \Omega_{2,21} + b_{16}^{(k)} (\Omega_{1,22} + \Omega_{2,11})] - \lambda_3^{(k)} (x_3) [b_{11}^{(k)} U_{1,1} + b_{12}^{(k)} U_{2,2} + b_{16}^{(k)} (U_{1,2} + U_{2,1})] \\ \sigma_2^{(k)} &= - \lambda_1^{(k)} (x_3) (b_{21}^{(k)} w_{,11} + b_{22}^{(k)} w_{,22} + 2b_{26}^{(k)} w_{,12}) + \\ &- \lambda_2^{(k)} (x_3) [b_{21}^{(k)} \Omega_{1,12} + b_{22}^{(k)} \Omega_{2,21} + b_{26}^{(k)} (\Omega_{1,22} + \Omega_{2,11})] - \lambda_3^{(k)} (x_3) [b_{21}^{(k)} U_{1,1} + b_{22}^{(k)} U_{2,2} + b_{26}^{(k)} (U_{1,2} + U_{2,1})] \\ \sigma_6^{(k)} &= - \lambda_1^{(k)} (x_3) (b_{61}^{(k)} w_{,11} + b_{62}^{(k)} w_{,22} + 2b_{66}^{(k)} w_{,12}) + \\ &- \lambda_2^{(k)} (x_3) [b_{61}^{(k)} \Omega_{1,12} + b_{62}^{(k)} \Omega_{2,21} + b_{66}^{(k)} (\Omega_{1,22} + \Omega_{2,11})] - \lambda_3^{(k)} (x_3) [b_{61}^{(k)} U_{1,1} + b_{62}^{(k)} U_{2,2} + b_{66}^{(k)} (U_{1,2} + U_{2,1})] \end{aligned} \quad (10)$$

Przyjęte założenia kinematyczne (1) pozwalają wyznaczyć z równań fizycznych naprężenia postaciowe $\sigma_{13} = \sigma_5$; $\sigma_{23} = \sigma_4$ i spełnić równania równowagi każdej warstwy $\sigma_{ij,j} = 0$ dla $i, j = 1, 2, 3$. Zbudowany w ten sposób model matematyczny jest opisany układem ośmiu równań różniczkowych 16-tego rzędu [Sokołowski 1959],

[Bolotin 1980], [Reddy 1989]. Rozwiązanie analityczne płyty dwuwarstwowej w ramach takiego modelu jest bardzo skomplikowane i uciążliwe. W związku z tym w celu dalszego uproszczenia modelu pomijamy naprężenia postaciowe $\sigma_{\alpha 3}^{(k)}$ w równaniach fizycznych i określamy je z równań równowagi jak w klasycznej teorii Kirchhoffa-Love'a. Oczywiście takie podejście jest niedokładne, lecz popełniony błąd nie jest istotny, gdyż rozpatrywana płyta jest cienka. W dalszym ciągu pomijając też będziemy siły masowe. Korzystając z równań równowagi dla k -tej warstwy na kierunkach osi x_1, x_2 :

$$\sigma_{\alpha 1,1}^{(k)} + \sigma_{\alpha 2,2}^{(k)} + \sigma_{\alpha 3,3}^{(k)} = 0 \quad (11)$$

uzyskujemy wzory na naprężenia postaciowe w każdej warstwie płyty:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(k)} = & \lambda_1^{(k)'}(x_3) \left[b_{11}^{(k)} w_{,111} + (b_{12}^{(k)} + 2b_{66}^{(k)}) w_{,122} + 3b_{16}^{(k)} w_{,112} + b_{26}^{(k)} w_{,222} \right] - \lambda_2^{(k)'}(x_3) \left[b_{11}^{(k)} \Omega_{1,121} + \right. \\ & + 2b_{16}^{(k)} \Omega_{1,221} + b_{66}^{(k)} \Omega_{1,222} + b_{16}^{(k)} \Omega_{2,111} + (b_{11}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) \Omega_{2,121} + b_{26}^{(k)} \Omega_{2,212} - \lambda_3^{(k)'}(x_3) \left[b_{11}^{(k)} U_{1,11} + 2b_{16}^{(k)} U_{1,21} + \right. \\ & + b_{66}^{(k)} U_{1,22} + b_{16}^{(k)} U_{2,11} + b_{26}^{(k)} U_{2,22} + (b_{12}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) U_{2,12} + f_1^{(k)}(x_1, x_2) \left. \right. \end{aligned} \quad (12)$$

oraz dolnej:

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(k)} = & \lambda_1^{(k)'}(x_3) \left[b_{61}^{(k)} w_{,111} + (b_{12}^{(k)} + 2b_{66}^{(k)}) w_{,112} + 3b_{26}^{(k)} w_{,122} + b_{22}^{(k)} w_{,222} \right] - \lambda_2^{(k)''}(x_3) \left[b_{61}^{(k)} \Omega_{1,121} + \right. \\ & + (b_{11}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) \Omega_{1,122} + b_{16}^{(k)} \Omega_{1,222} + (b_{62}^{(k)} + b_{16}^{(k)}) \Omega_{2,211} + b_{66}^{(k)} \Omega_{2,111} + b_{12}^{(k)} \Omega_{2,212} - \lambda_3^{(k)''}(x_3) \left[b_{61}^{(k)} U_{1,11} + \right. \\ & + (b_{11}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) U_{1,12} + b_{16}^{(k)} U_{1,22} + (b_{62}^{(k)} + b_{16}^{(k)}) U_{2,21} + b_{66}^{(k)} U_{2,11} + b_{12}^{(k)} U_{2,22} \left. \right] + f_2^{(k)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie $f_\alpha^{(k)}(x_1, x_2)$ – dowolne funkcje całkowania.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(k)*} = & b_{11}^{(k)} w_{,111} + (b_{12}^{(k)} + 2b_{66}^{(k)}) w_{,122} + 3b_{16}^{(k)} w_{,112} + b_{26}^{(k)} w_{,222} \\ F_1^{(k)}(x_1, x_2) = & b_{11}^{(k)} \Omega_{1,121} + 2b_{16}^{(k)} \Omega_{1,221} + b_{66}^{(k)} \Omega_{1,222} + b_{16}^{(k)} \Omega_{2,111} + (b_{11}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) \Omega_{2,121} + b_{26}^{(k)} \Omega_{2,212} \\ \Psi_1^{(k)}(x_1, x_2) = & b_{11}^{(k)} U_{1,11} + 2b_{16}^{(k)} U_{1,21} + b_{66}^{(k)} U_{1,22} + b_{16}^{(k)} U_{2,11} + b_{26}^{(k)} U_{2,22} + (b_{12}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) U_{2,12} \\ \sigma_{23}^{(k)*} = & b_{61}^{(k)} w_{,111} + (b_{12}^{(k)} + 2b_{66}^{(k)}) w_{,112} + 3b_{26}^{(k)} w_{,122} + b_{22}^{(k)} w_{,222} \\ F_2^{(k)}(x_1, x_2) = & b_{61}^{(k)} \Omega_{1,121} + (b_{11}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) \Omega_{1,122} + b_{16}^{(k)} \Omega_{1,222} + (b_{62}^{(k)} + b_{16}^{(k)}) \Omega_{2,211} + b_{66}^{(k)} \Omega_{2,111} + b_{12}^{(k)} \Omega_{2,212} \\ \Psi_2^{(k)} = & b_{61}^{(k)} U_{1,11} + (b_{11}^{(k)} + b_{66}^{(k)}) U_{1,12} + b_{16}^{(k)} U_{1,22} + (b_{62}^{(k)} + b_{16}^{(k)}) U_{2,21} + b_{66}^{(k)} U_{2,11} + b_{12}^{(k)} U_{2,22} \end{aligned} \quad (14)$$

otrzymujemy:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(k)} = \lambda_1^{(k)'}(x_3) \sigma_{\alpha 3}^{(k)*}(x_1, x_2) + \lambda_2^{(k)'}(x_3) F_\alpha^{(k)}(x_1, x_2) + \lambda_3^{(k)'}(x_3) \Psi_\alpha^{(k)}(x_1, x_2) + f_\alpha^{(k)}(x_1, x_2) \quad (15)$$

Spełniamy warunki zerowania naprężeń postaciowych na powierzchniach górnej i dolnej płyty:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} \Big|_{x_3 = -h_1/2} = 0, \quad \sigma_{\alpha 3}^{(2)} \Big|_{x_3 = h_2/2} = 0 \quad (16)$$

skąd uzyskujemy:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = \lambda_1^{(1)'} \left(-\frac{h_1}{2} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(1)*} + \lambda_2^{(1)'} \left(-\frac{h_1}{2} \right) F_{\alpha}^{(1)} + \lambda_3^{(1)'} \left(-\frac{h_1}{2} \right) \Psi_{\alpha}^{(1)} + f_{\alpha}^{(1)}(x_1, x_2) = 0 \quad (17)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = \lambda_1^{(2)'} \left(\frac{h_2}{2} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(2)*} + \lambda_2^{(2)'} \left(\frac{h_2}{2} \right) F_{\alpha}^{(2)} + \lambda_3^{(2)'} \left(\frac{h_2}{2} \right) \Psi_{\alpha}^{(2)} + f_{\alpha}^{(2)}(x_1, x_2) = 0$$

Te warunki możemy spełnić tożsamościowo, jeżeli przyjmiemy:

$$\lambda_i^{(1)'} \left(-h_1/2 \right) = 0, \quad \lambda_i^{(2)'} \left(h_2/2 \right) = 0 \quad \text{dla } i = \overline{1, 3} \quad (18)$$

Skąd otrzymujemy, że: $f_{\alpha}^{(k)}(x_1, x_2) = 0$.

W takim razie wzory na naprężenia $\sigma_{\alpha 3}^{(k)}$ (17) przyjmują postać:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(k)} = \lambda_1^{(k)'}(x_3) \sigma_{\alpha 3}^{(k)*}(x_1, x_2) + \lambda_2^{(k)'}(x_3) F_{\alpha}^{(k)}(x_1, x_2) + \lambda_3^{(k)'}(x_3) \Psi_{\alpha}^{(k)}(x_1, x_2) \quad (19)$$

Uwzględnijmy teraz warunki ciągłości naprężeń stycznych na powierzchni międzywarstwowej:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} \Big|_{x_3 = \frac{h_1}{2}} = \sigma_{\alpha 3}^{(2)} \Big|_{x_3 = -\frac{h_2}{2}} \quad (20)$$

Podstawiamy do tych warunków wyrażenia (17) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \lambda_1^{(1)'} \left(\frac{h_1}{2} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(1)*} + \lambda_2^{(1)'} \left(\frac{h_1}{2} \right) F_{\alpha}^{(1)} + \lambda_3^{(1)'} \left(\frac{h_1}{2} \right) \Psi_{\alpha}^{(1)} = \\ & = \lambda_1^{(2)'} \left(-\frac{h_2}{2} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(2)*} + \lambda_2^{(2)'} \left(-\frac{h_2}{2} \right) F_{\alpha}^{(2)} + \lambda_3^{(2)'} \left(-\frac{h_2}{2} \right) \Psi_{\alpha}^{(2)} \end{aligned} \quad (21)$$

Warunki (21) będą spełnione tożsamościowo, przyjmując:

$$\lambda_2^{(2)'} \left(-\frac{h_2}{2} \right) F_{\alpha}^{(2)} + \lambda_3^{(2)'} \left(-\frac{h_2}{2} \right) \Psi_{\alpha}^{(2)} = \lambda_1^{(1)'} \left(\frac{h_1}{2} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(1)*} \quad (22)$$

$$\lambda_2^{(1)'} \left(\frac{h_1}{2} \right) F_{\alpha}^{(1)} + \lambda_3^{(1)'} \left(\frac{h_1}{2} \right) \Psi_{\alpha}^{(1)} = \lambda_1^{(2)'} \left(-\frac{h_2}{2} \right) \sigma_{\alpha 3}^{(2)*}$$

Dokonyjemy kolejnego uproszczenia, nakładając kolejne ograniczenia na funkcje rozkładu przemieszczeń po grubości płyty $\lambda_i^{(k)}(x_3)$ w postaci:

$$\lambda_2^{(2)'}\left(-\frac{h_2}{2}\right) = \lambda_3^{(2)'}\left(-\frac{h_2}{2}\right) = \lambda_1^{(1)'}\left(\frac{h_1}{2}\right) \quad (23)$$

$$\lambda_2^{(1)'}\left(\frac{h_1}{2}\right) = \lambda_3^{(1)'}\left(\frac{h_1}{2}\right) = \lambda_1^{(2)'}\left(-\frac{h_2}{2}\right)$$

Wówczas z wyrażen (22) uzyskujemy związki między wprowadzonymi funkcjami $F_\alpha^{(k)}$, $\Psi_\alpha^{(k)}$ a naprężeniami postaciowymi:

$$F_\alpha^{(2)} + \Psi_\alpha^{(2)} = \sigma_{\alpha 3}^{(1)*}; \quad F_\alpha^{(1)} + \Psi_\alpha^{(1)} = \sigma_{\alpha 3}^{(2)*} \quad (24)$$

Korzystając z zależności (24), zastępujemy w wyrażeniach (19) funkcje $F_\alpha^{(k)}$, $\Psi_\alpha^{(k)}$ naprężeniami postaciowymi $\sigma_{\alpha 3}^{(k)*}$. Łatwo zauważyć, że jest to możliwe tylko wtedy, jeśli $\lambda_2^{(k)}(x_3) = \lambda_3^{(k)}(x_3)$. Gdy tak jest, otrzymujemy:

$$\sigma_{\alpha 3}^{(1)} = \lambda_1^{(1)'}(x_3) \mathfrak{B}_{\alpha 3}^{(1)*} + \lambda_2^{(1)'}(x_3) \mathfrak{B}_{\alpha 3}^{(2)*} \quad (25)$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(2)} = \lambda_1^{(2)'}(x_3) \mathfrak{B}_{\alpha 3}^{(2)*} + \lambda_2^{(2)'}(x_3) \mathfrak{B}_{\alpha 3}^{(1)*}$$

Podstawiamy do wzorów (25) zamiast naprężeń $\sigma_{\alpha 3}^{(k)*}$ ich oznaczenia (14) i grupując wyrażenia podobne, otrzymujemy:

$$\sigma_{13}^{(k)} = B_{11}^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,111} + B_3^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,122} + 3B_{16}^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,112} + B_{26}^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,222} \quad (26)$$

$$\sigma_{23}^{(k)} = B_{16}^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,111} + B_3^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,112} + 3B_{26}^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,112} + B_{22}^{(k)}(x_3) \mathfrak{w}_{,222}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$B_{ij}^{(1)}(x_3) = \lambda_1^{(1)'}(x_3) \mathfrak{B}_{ij}^{(1)} + \lambda_2^{(1)'}(x_3) \mathfrak{B}_{ij}^{(2)}; \quad B_{ij}^{(2)}(x_3) = \lambda_1^{(2)'}(x_3) \mathfrak{B}_{ij}^{(2)} + \lambda_2^{(2)'}(x_3) \mathfrak{B}_{ij}^{(1)}; \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$B_3^{(k)}(x_3) = B_{12}^{(k)}(x_3) + 2B_{66}^{(k)}(x_3) \quad (27)$$

Naprężenia normalne $\sigma_{33}^{(k)}$ określamy z warunku równowagi zapisanego na kierunku Ox_3 :

$$\sigma_{33}^{(k)} = -\left(\sigma_{31}^{(k)} + \sigma_{32}^{(k)}\right) \quad (28)$$

Wyznaczając pochodne od naprężeń postaciowych (26) i całkując otrzymane wyrażenia po zmiennej x_3 , uzyskujemy:

$$\sigma_{33}^{(k)} = - \left[C_{11}^{(k)}(x_3)w_{,1111} + C_3^{(k)}(x_3)w_{,1122} + 4C_{16}^{(k)}(x_3)w_{,1112} + \right. \\ \left. + 4C_{26}^{(k)}(x_3)w_{,1222} + C_{22}^{(k)}(x_3)w_{,2222} \right] + f_3^{(k)}(x_1, x_2) \quad (29)$$

gdzie:

$$C_{ij}^{(1)}(x_3) = \int B_{ij}^{(1)}(x_3) dx_3 = \lambda_1^{(1)}(x_3) b_{ij}^{(1)} + \lambda_2^{(1)}(x_3) b_{ij}^{(2)} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 6$$

$$C_{ij}^{(2)}(x_3) = \int B_{ij}^{(2)}(x_3) dx_3 = \lambda_1^{(2)}(x_3) b_{ij}^{(2)} + \lambda_2^{(2)}(x_3) b_{ij}^{(1)} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, 6$$

$$C_3^{(k)}(x_3) = C_{12}^{(k)}(x_3) + 2C_{66}^{(k)}(x_3).$$

Występujące w wyrażeniu (29) nieznanne funkcje $f_3^{(k)}(x_1, x_2)$ wyznaczamy z warunku ciągłości naprężeń normalnych $\sigma_{33}^{(k)}$ na powierzchni podziału warstw:

$$\sigma_{33}^{(1)} \Big|_{x_3 = h_1/2} = \sigma_{33}^{(2)} \Big|_{x_3 = -h_2/2} \quad (30)$$

Podstawiając wyrażenie (29) do (30), otrzymujemy:

$$- \left\{ C_{11}^{(1)}(h_1/2)w_{,1111} + C_3^{(1)}(h_1/2)w_{,1122} + 4C_{16}^{(1)}(h_1/2)w_{,1112} + 4C_{26}^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right)w_{,1222} + C_{22}^{(1)}(h_1/2)w_{,2222} + \right. \\ \left. + f_3^{(1)}(x_1, x_2) = - \left\{ C_{11}^{(2)}(-h_2/2)w_{,1111} + C_3^{(2)}(-h_2/2)w_{,1122} + 4C_{16}^{(2)}(-h_2/2)w_{,1112} + 4C_{26}^{(2)}(-h_2/2)w_{,1222} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{22}^{(2)}(-h_2/2)w_{,2222} \right\} + f_3^{(2)}(x_1, x_2) \right\} \quad (31)$$

Ten warunek spełnimy tożsamościowo, przyjmując:

$$f_3^{(2)}(x_1, x_2) = - \left[C_{11}^{(1)}(h_1/2)w_{,1111} + C_3^{(1)}(h_1/2)w_{,1122} + 4C_{16}^{(1)}(h_1/2)w_{,1112} + 4C_{26}^{(1)}(h_1/2)w_{,1222} + C_{22}^{(1)}(h_1/2)w_{,2222} \right] \\ f_3^{(1)}(x_1, x_2) = - \left[C_{11}^{(2)}(-h_2/2)w_{,1111} + C_3^{(2)}(-h_2/2)w_{,1122} + 4C_{16}^{(2)}(-h_2/2)w_{,1112} + \right. \\ \left. + 4C_{26}^{(2)}(-h_2/2)w_{,1222} + C_{22}^{(2)}(-h_2/2)w_{,2222} \right] \quad (32)$$

Po podstawieniu wyrażenia (32) do (29) otrzymujemy:

$$\sigma_{33}^{(k)} = - \left[D_{11}^{(k)}(x_3)w_{,1111} + 4D_{16}^{(k)}(x_3)w_{,1112} + 2D_3^{(k)}(x_3)w_{,1122} + 4D_{26}^{(k)}(x_3)w_{,1222} + D_{22}^{(k)}(x_3)w_{,2222} \right] \quad (33)$$

tutaj:

$$D_{ij}^{(1)}(x_3) = C_{ij}^{(1)}(x_3) + C_{ij}^{(2)}\left(-\frac{h_2}{2}\right) = \left[\lambda_1^{(1)}(x_3) + \lambda_2^{(2)}\left(-\frac{h_2}{2}\right)\right] b_{ij}^{(1)} + \left[\lambda_2^{(1)}(x_3) + \lambda_1^{(2)}\left(-\frac{h_2}{2}\right)\right] b_{ij}^{(2)}$$

$$D_{ij}^{(2)}(x_3) = C_{ij}^{(2)}(x_3) + C_{ij}^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right) = \left[\lambda_2^{(2)}(x_3) + \lambda_1^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right)\right] b_{ij}^{(1)} + \left[\lambda_1^{(2)}(x_3) + \lambda_2^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right)\right] b_{ij}^{(2)} \quad (34)$$

Następnie spełniamy warunek graniczny na powierzchni dolnej warstwy 2 dla naprężenia normalnego:

$$\sigma_{33}^{(2)} \Big|_{x_3=h_2/2} = 0 \quad (35)$$

Po podstawieniu do tego warunku wyrażenia (33) otrzymujemy:

$$D_{11}^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right)w_{,1111} + 4D_{16}^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right)w_{,1112} + 2D_{33}^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right)w_{,1122} + 4D_{26}^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right)w_{,1222} + D_{22}^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right)w_{,2222} = 0 \quad (36)$$

Warunek (36) jest spełniony tylko wtedy, jeśli wszystkie funkcje $D_{ij}^{(2)}(x_3)$ na powierzchni dolnej warstwy 2 są równe 0, tj. $D_{ij}^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right) = 0$.

Uwzględniając związki (34), otrzymujemy:

$$D_{ij}^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right) = \left[\lambda_2^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right) + \lambda_1^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right)\right] b_{ij}^{(1)} + \left[\lambda_1^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right) + \lambda_2^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right)\right] b_{ij}^{(2)} = 0 \quad (37)$$

Ponieważ $b_{ij}^{(k)} \neq 0$, to dla spełnienia warunku (37) między funkcjami $\lambda_\alpha^{(k)}(x_3)$ muszą zachodzić zależności:

$$\lambda_1^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right) = -\lambda_2^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right), \quad \lambda_1^{(2)}\left(\frac{h_2}{2}\right) = -\lambda_2^{(1)}\left(\frac{h_1}{2}\right) \quad (38)$$

Następnie z warunku brzegowego powierzchni górnej warstwy 1:

$$\sigma_{33}^{(1)} \Big|_{x_3=-\frac{h_1}{2}} = -q(x_1, x_2) \quad (39)$$

Po wykorzystaniu wyrażenia (33) otrzymujemy:

$$D_{11}^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right)w_{,1111} + 4D_{16}^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right)w_{,1112} + 2D_{33}^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right)w_{,1122} + 4D_{26}^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right)w_{,1222} + D_{22}^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right)w_{,2222} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = -q \quad (40)$$

Zgodnie z wyrażeniami (34):

$$D_{ij}^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right) = \left[\lambda_1^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right) + \lambda_2^{(2)}\left(-\frac{h_2}{2}\right)\right] b_{ij}^{(1)} + \left[\lambda_2^{(1)}\left(-\frac{h_1}{2}\right) + \lambda_1^{(2)}\left(-\frac{h_2}{2}\right)\right] b_{ij}^{(2)} \quad (41)$$

Oznaczamy $D_{ij}^{(1)}(-h_1/2)$ przez D_{ij} i traktujemy je jako sztywności zastępcze płyty dwuwarstwowej złożonej z warstw anizotropowych. W ostatecznym wyniku otrzymujemy podstawowe równanie opisujące zginanie takich płyt:

$$D_{11}w_{,1111} + 4D_{16}w_{,1112} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,1122} + 4D_{26}w_{,1222} + D_{22}w_{,2222} = q \quad (42)$$

Z równań (44) otrzymujemy ugięcie płyty $w(x_1, x_2)$.

WYZNACZENIE FUNKCJI PRZESUNIĘCIA POZIOMEGO ($U_\alpha^{(k)}$) I PIONOWEGO ($\Omega_\alpha^{(k)}$)

Funkcje $U_\alpha(x_1, x_2)$ oraz $\Omega_\alpha(x_1, x_2)$ wyznaczamy z warunków ciągłości naprężeń postaciowych na powierzchni międzywarstwowej, a mianowicie ze związków (24). Podstawiając do nich wzory (14), otrzymujemy układ czterech związanych równań różniczkowych cząstkowych na nieznane funkcje $U_\alpha^{(k)}$, $\Omega_\alpha^{(k)}$:

$$\begin{aligned} & b_{11}^{(2)}\Omega_{,1,21} + 2b_{16}^{(2)}\Omega_{,1,22} + b_{66}^{(2)}\Omega_{,1,222} + b_{16}^{(2)}\Omega_{,2,111} + (b_{11}^{(2)} + b_{66}^{(2)})\Omega_{,2,121} + b_{26}^{(2)}\Omega_{,2,212} + b_{11}^{(2)}U_{,1,11} + \\ & + 2b_{16}^{(2)}U_{,1,21} + b_{66}^{(2)}U_{,1,22} + b_{16}^{(2)}U_{,2,11} + b_{26}^{(2)}U_{,2,22} + (b_{12}^{(2)} + b_{66}^{(2)})U_{,2,12} = \\ & = b_{11}^{(1)}w_{,111} + (b_{12}^{(1)} + 2b_{66}^{(1)})w_{,122} + 3b_{16}^{(1)}w_{,112} + b_{26}^{(1)}w_{,222} \\ & b_{11}^{(1)}\Omega_{,1,21} + 2b_{16}^{(1)}\Omega_{,1,22} + b_{66}^{(1)}\Omega_{,1,222} + b_{16}^{(1)}\Omega_{,2,111} + (b_{11}^{(1)} + b_{66}^{(1)})\Omega_{,2,121} + b_{26}^{(1)}\Omega_{,2,212} + \\ & + b_{11}^{(1)}U_{,1,11} + 2b_{16}^{(1)}U_{,1,21} + b_{66}^{(1)}U_{,1,22} + b_{16}^{(1)}U_{,2,11} + b_{26}^{(1)}U_{,2,22} + (b_{12}^{(1)} + b_{66}^{(1)})U_{,2,12} = \\ & = b_{11}^{(2)}w_{,111} + (b_{12}^{(2)} + 2b_{66}^{(2)})w_{,122} + 3b_{16}^{(2)}w_{,112} + b_{26}^{(2)}w_{,222} \\ & b_{61}^{(2)}\Omega_{,1,21} + (b_{11}^{(2)} + b_{66}^{(2)})\Omega_{,1,22} + b_{16}^{(2)}\Omega_{,1,222} + (b_{62}^{(2)} + b_{16}^{(2)})\Omega_{,2,211} + b_{66}^{(2)}\Omega_{,2,111} + b_{12}^{(2)}\Omega_{,2,212} + \\ & + b_{61}^{(2)}U_{,1,11} + (b_{11}^{(2)} + b_{66}^{(2)})U_{,1,12} + b_{16}^{(2)}U_{,1,22} + (b_{62}^{(2)} + b_{16}^{(2)})U_{,2,21} + b_{66}^{(2)}U_{,2,11} + b_{12}^{(2)}U_{,2,22} = \\ & = b_{61}^{(1)}w_{,111} + (b_{12}^{(1)} + 2b_{66}^{(1)})w_{,112} + 3b_{26}^{(1)}w_{,122} + b_{22}^{(1)}w_{,222} \\ & b_{61}^{(1)}\Omega_{,1,21} + (b_{11}^{(1)} + b_{66}^{(1)})\Omega_{,1,22} + b_{16}^{(1)}\Omega_{,1,222} + (b_{62}^{(1)} + b_{16}^{(2)})\Omega_{,2,211} + b_{66}^{(1)}\Omega_{,2,111} + b_{12}^{(1)}\Omega_{,2,212} + \\ & + b_{61}^{(1)}U_{,1,11} + (b_{11}^{(1)} + b_{66}^{(1)})U_{,1,12} + b_{16}^{(1)}U_{,1,22} + (b_{62}^{(1)} + b_{16}^{(1)})U_{,2,21} + b_{66}^{(1)}U_{,2,11} + b_{12}^{(1)}U_{,2,22} = \\ & = b_{61}^{(2)}w_{,111} + (b_{12}^{(2)} + 2b_{66}^{(2)})w_{,112} + 3b_{26}^{(2)}w_{,122} + b_{22}^{(2)}w_{,222} \end{aligned} \quad (43)$$

Prawe części tych równań są rozwiązaniem ogólnym niejednorodnego równania (42), które przedstawiono w pracy Delyavsky'ego i Lewandowskiego [2005] w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 w = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \cos \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + B_{mn} \cos \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 + C_{mn} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + \right. \\
 & + D_{mn} \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 \left. \right] + \sum_{k=1}^8 \sum_{\nu=1}^8 \left[R_{1(k)}^{[1]} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[1]} x_1) \cdot \cos \delta_k^{[2]} x_2 + \right. \\
 & + R_{3(k)}^{[1]} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[1]} x_1) \cdot \sin \delta_k^{[2]} x_2 + R_{4(k)}^{[2]} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[2]} x_2) \cdot \sin \delta_k^{[1]} x_1 \left. \right] \quad (44)
 \end{aligned}$$

Parametry A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} są tutaj znane i wyrażone przez obciążenie zewnętrzne; nieznanne parametry $R_{\nu k}^{[j]}$ określa się z warunków brzegowych na krawędziach płyty.

W celu rozwiązania rozważanej płyty dwuwarstwowej wystarczy znaleźć całkę szczególną układu równań (43), gdyż pominięcie całki ogólnej tego układu spowoduje tylko niespełnienie warunków brzegowych dla sił tarczowych na krawędziach płyty, podczas gdy istotnie upraszcza rozwiązanie układu płytowego.

Całkę szczególną układu równań (43) wybieramy w postaci wyrażenia (44) z innymi współczynnikami:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn}^+ \cos \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + B_{mn}^+ \cos \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 + C_{mn}^+ \sin \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + \right. \\
 & + D_{mn}^+ \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 \left. \right] + \sum_{k=1}^8 \sum_{\nu=1}^8 \left[R_{1(k)}^{[1]+} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[1]} x_1) \cdot \cos \delta_k^{[2]} x_2 + \right. \\
 & + R_{2(k)}^{[2]+} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[2]} x_2) \cdot \cos \delta_k^{[1]} x_1 + R_{3(k)}^{[1]+} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[1]} x_1) \cdot \sin \delta_k^{[2]} x_2 + R_{4(k)}^{[2]+} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[2]} x_2) \cdot \sin \delta_k^{[1]} x_1 \left. \right] \\
 U_1 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{mn}^* \cos \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + B_{mn}^* \cos \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 + C_{mn}^* \sin \delta_m^{[1]} x_1 \cos \delta_n^{[2]} x_2 + \right. \\
 & + D_{mn}^* \sin \delta_m^{[1]} x_1 \sin \delta_n^{[2]} x_2 \left. \right] + \sum_{k=1}^8 \sum_{\nu=1}^8 \left[R_{1(k)}^{[1]*} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[1]} x_1) \cdot \cos \delta_k^{[2]} x_2 + \right. \\
 & + R_{2(k)}^{[2]*} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[2]} x_2) \cdot \cos \delta_k^{[1]} x_1 + R_{3(k)}^{[1]*} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[1]} x_1) \cdot \sin \delta_k^{[2]} x_2 + R_{4(k)}^{[2]*} \exp(\lambda_{\nu(k)}^{[2]} x_2) \cdot \sin \delta_k^{[1]} x_1 \left. \right] \quad (45)
 \end{aligned}$$

Dla funkcji U_2 oraz Ω_2 stosujemy odpowiednio symbole „+” i „*” zamiast „+” i „*”. Podstawiamy wyrażenia (47) do układu (45), przyrównujemy wyrażenia przy tych samych harmonikach i wyznaczamy nieznanne współczynniki A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} i D_{mn} .

FUNKCJE ROZKŁADU PRZEMIESZCZEŃ PO GRUBOŚCI PŁYTY

Funkcje $\lambda_i^{(k)}(x_3)$, opisujące rozkład przemieszczeń po grubości płyty występujące w związkach (1), wybieramy w postaci wielomianu. Stopień tego wielomianu odpowiada liczbie ograniczeń nałożonych na rozważane funkcje. W ramach opracowanego modelu zostały przyjęte 4 warunki ograniczające opisane wzorami (4), (18), (23), (38). Wobec tego funkcje $\lambda_i^{(k)}(x_3)$ przyjęto w postaci wielomianu czwartego stopnia:

$$\lambda_i^{(k)} = x_3^4 + a_{i3}^{(k)} \cdot x_3^3 + a_{i2}^{(k)} \cdot x_3^2 + a_{i1}^{(k)} \cdot x_3 + a_{i0}^{(k)} \quad (46)$$

Wykorzystując równanie (46) do podanych warunków ograniczających, otrzymujemy układ 4 liniowych równań algebraicznych, z którego wyznaczamy nieznanne współczynniki $a_{ip}^{(k)}$; $i = 1, 2$; $p = 0, 1, 2, 3$.

PODSUMOWANIE

W pracy skonstruowano nowy uproszczony model cienkiej anizotropowej płyty dwuwarstwowej, w którym w odróżnieniu od innych znanych modeli występuje tylko jedno równanie na ugięcie, jak w klasycznej teorii Kirchhoffa-Love'a. Wprowadzone dodatkowe funkcje, opisujące stan zwichrzenia i przesunięcia poziomego warstw, wyraża się przez ugięcie płyty. Uzyskane w ramach zbudowanego modelu rozwiązanie dla płyty anizotropowej o dowolnej konfiguracji możemy wykorzystać do obliczenia stanu płyty dwuwarstwowej o tej samej konfiguracji i obciążeniu, co jest istotnym uproszczeniem w stosunku model od innych modeli płyt. Wprowadzone funkcje rozkładu przemieszczeń po grubości warstw powodują dokładne spełnienie wszystkich warunków statycznych i kinematycznych na powierzchni podziału warstw. Model może być stosowany do rozwiązywania zagadnień konstrukcyjnych dla płyt, belek warstwowych oraz elementów konstrukcyjnych wzmocnionych warstwami i taśmami włóknistymi.

PIŚMIENNICTWO

- Bolotin V.V., Novichkov Yu.N., 1980. *Mekanika mnogoslojnykh konstruktii*. Mashinostroenie, Moskva.
- Delyavskyy M., Lewandowski J., 2005. Zginanie poprzeczne płyty włókno-kompozytowej zbudowanej symetrycznie. *Mechanika Ośrodków Niejednorodnych*. Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra.
- Reddy J.N., 1989. On the generalization of displacement based laminate theories. *Appl. Mech. Rev.* 42, 5213–5222.
- Sokołowski M., 1958. The Bendig of transversally non-homogenous plates of moderate thickness. *Arch. Mech. Stos.* 10, 3, 315–328; *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Tech.* 6, 4, 181–186.
- Sokołowski M., 1959. O granicy stosowania hipotezy Kirchhoffa w teorii zginania płyt poprzecznie niejednorodnych i warstwowych. *Arch. Inż. Ląd.* 5, 1, 3–13.
- Mechanika sprężystych płyt i powłok (red.) Cz. Woźniak. *Mechanika techniczna*. T. VIII. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

THE MATHEMATICAL MODEL OF THIN TWO LAYERED PLATE

Abstract. The new simplified model of two-layered plate constructed from thin anisotropic layers has been suggested. The model taking into consideration the tensile state of stresses. In contrast of another known models the suggested model is described only by one differential equation. At it the twisting state and horizontal displacement state are described with help of deflection of the plate.

Key words: plate, layered plate, modelling of layered plate

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 30.11.2005