

Arkadiusz Bruchwald<sup>1</sup>✉, Elżbieta Dmyterko<sup>2</sup>, Rafał Wojtan<sup>3</sup>

## Model wzrostu dla modrzewia europejskiego (*Larix decidua* Mill.) wykorzystujący cechy taksacyjne drzewostanu

A growth model for European larch (*Larix decidua* Mill.) based on stand characteristics

**Abstract.** Data from each forest stand in all the Forest Districts in Poland (about 2.5 million stands) are available in the State Forests Information System (SILP). These data can be used to predict the development of timber resources and to drive growth models that determine the possibility of harvesting timber in pre-final and final felling. The Polish growth models used are individual-tree growth models consisting of four main algorithms: initial (W), thinning (T), tree mortality (S) and incremental (P). The model consists of several variants, differing only in their initial algorithm. The aim of this study is to describe an algorithm for one of the growth model variants for larch stands. The growth model variant presented employs the following characteristics of a stand as input data: mean age (W), average diameter breast height (Dg), average height (Hg), and stocking density (Zad). These data are used to generate the distribution of diameter breast heights of trees and assign an appropriate height to each tree. This enables the other growth model algorithms to subsequently be used to predict the development of larch timber resources. In Poland, growth models have been built for the following trees species: pine, spruce, fir, oak, beech, alder and birch. The growth model for larch stands completes the list and opens new research perspectives. Linking this model with those built for other tree species will lead to the development of a model for mixed stands and then for uneven-aged stands.

**Key words:** tree and stand growth model, European larch, *Larix decidua*

### 1. Wstęp

Od wielu lat, zwłaszcza w Stanach Zjednoczonych Ameryki Północnej, prowadzone są badania, których celem jest budowa matematycznych modeli wzrostu drzew leśnych. Ich przegląd znajduje się m.in. w pracach Dudka i Eka (1980), Vanclaya (1995) i Zasady (2007), a jako przykład można podać model Eka i Monseruda (1974). W Polsce również począwszy od lat siedemdziesiątych, Zakład Dendrometrii i Nauki o Produkcyjności Lasu SGGW przy współpracy z zespołem urzędowania lasu Instytutu Badawczego Leśnictwa, realizuje odpowiednie programy badawcze. Ich wynikiem są stochastyczne modele wzrostu dla następujących gatunków drzew leśnych: sosny (Bruchwald 1986), świerka

(Bruchwald et al. 1999), jodły (Zasada 1998), dębu (Bruchwald et al. 1996; Dudzińska, Bruchwald 2008), buka (Dudzińska, Wirowski 1998), brzozy (Bruchwald et al. 2001) i olszy (Bruchwald et al. 2003). Z wymienionych prac na szczególną uwagę zasługuje praca zawierająca opis modelu wzrostu dla dębu (Dudzińska, Bruchwald 2008), w niej bowiem analizie podlegały również poszczególne procedury modelu.

Każdy z modeli może mieć różne warianty, zależne od dostępnych danych wyjściowych. Wariant 1 – podstawowy, zakłada, że danymi są wyniki pomiaru pierśnicy i wysokości drzew na powierzchniach próbnych oraz średni wiek drzewostanu (Bruchwald, Zasada 2010). W wariacie 2 danymi są: przeciętna pierśnica i średnia wysokość drzewostanu, czynnik zadrzewienia oraz

<sup>1</sup> Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Zakład Dendrometrii i Nauki o Produkcyjności Lasu, ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa; ✉ Fax: +4822 715 38 37, e-mail: A.Bruchwald@ibles.waw.pl

<sup>2</sup> Instytut Badawczy Leśnictwa, Zakład Zarządzania Zasobami Leśnymi, Sękocin Stary, ul. Braci Leśnej 3, 05-090 Raszyn

<sup>3</sup> Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Zakład Dendrometrii i Nauki o Produkcyjności Lasu, ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa.

średni wiek drzewostanu. W innej wersji, nazwanej modelem granicznym, danymi są wysokość górna i średni wiek drzewostanu (Bruchwald 1991). Model ten tworzy bazę danych wykorzystywaną przez inne warianty modelu.

Pierwowzorem modeli wzrostu są tablice zasobności. W Polsce stosowany jest zestaw takich tablic sporządzony przez Szymkiewicza (1961), a zawierający opracowania Schwappacha (1912), Wiedemanna, Schobera (1957) i Tjurina (1956). Tablice zasobności zakładają prowadzenie drzewostanu według ściśle określonych reguł. Dla danej bonitacji jest jedna opcja, w której czynnik zadrzewienia w każdym wieku przed trzebieżą jest wielkością stałą, równą 1. Modele wzrostu pozwalają na przeprowadzenie wielowariantowej prognozy rozwoju drzewostanu, poczynając od dowolnego wieku, przy różnej średniej wysokości i różnym czynniku zadrzewienia. W przeciwieństwie do zastosowań tablic zasobności, opisywane w pracy stochastyczne modele wzrostu pozwalają na dość dokładne określenie m.in. miąższości i przyrostu miąższości drzewostanu, a dla nadleśnictwa ustalenie etatu użytkowania rębnego i przedrębego (Bruchwald 1995; Siekierski 1995). Realizacja tych ostatnich zadań wymaga zastosowania modeli dla drzewostanów wielogatunkowych i różnowiekowych, w tym również modeli dla upraw i młodników. Dla nowo zakładanych upraw wiąże się to z planowaniem składu gatunkowego.

Model wzrostu składa się z czterech głównych algorytmów: wstępnego (W), trzebieżowego (T), śmiertelności drzew (S) i przyrostowego (P). Poszczególne warianty modelu różnią się tylko algorytmem wstępnym. Opis tego algorytmu dla drugiego wariantu modelu wzrostu modrzewia, czyli opartego na przeciętnej pierśnicy i średniej wysokości drzewostanu, czynnika zadrzewienia oraz średnim wieku drzewostanu, jest celem niniejszej pracy.

## 2. Materiał badawczy

Badania oparto na materiale empirycznym zebranych w 137 drzewostanach modrzewiowych. Były to drzewostany lite lub z niewielką domieszką innych gatunków drzew. Najwięcej powierzchni założono w nadleśnictwach: Dobrzany (RDLP w Szczecinie – 18), Kolbudy (RDLP w Gdańsku – 17), Pińczów (RDLP w Radomiu – 15), Prudnik (RDLP w Katowicach – 21).

Wiek poszczególnych drzewostanów wahał się od 12 do 172 lat, przeciętna pierśnica drzewostanu zmieniała się od 15,3 do 68,6 cm, a średnia wysokość od 11,4 do 44,8 m. Drzewostany zajmowały żyzne siedliska lasowe, o czym świadczy ich wysoka bonitacja, która dla

76,3% powierzchni drzewostanów była w granicach od 30 do 40 m, a dla 20,0% przekroczyła 40 m.

W poszczególnych drzewostanach założono od jednej do trzech powierzchni próbnych, tak aby łączna liczba drzew na tych powierzchniach wyniosła około 100 lub nieco więcej. Na powierzchniach zmierzono pierśnicę wszystkich drzew, a na około 25 drzewach w każdym drzewostanie – także ich wysokość. Pomiarów te wykorzystano do sporządzenia krzywej wysokości z zastosowaniem funkcji Näslanda.

W 60 drzewostanach ścięto po 10 drzew próbnych i na nich przeprowadzono szeroki zakres pomiarów dendrometrycznych. Określono miąższość drzew sposobem sekcyjnym i przyrost miąższości metodą Bruchwalda (1971). Na dwóch drzewach każdego drzewostanu wykonano analizę wzrostu wysokości. Z około 5–10 drzew drzewostanu pobrano wywierty z przekroju pierśnicowego, które wykorzystano do określenia wieku drzew oraz opracowania funkcji wzrostu pierśnicy.

## 3. Budowa i funkcjonowanie modelu wzrostu

Algorytm wstępny modelu wzrostu określa cechy drzewostanu w roku wykonania w nim pomiarów i ocen. Wcześniej jednak dane pierwotne należy tak przetworzyć, aby uzyskać zbiór wyjściowy opisujący każde drzewo pierśnicą, wysokością i wiekiem. Zbiór powinien być powiązany z określoną w modelu wielkością powierzchni próbnej oraz z wydzieleniem drzewostanowym.

**Bonitacja drzewostanu.** Bonitacja (B) jest zdefiniowana jako wysokość górna, jaką drzewostan uzyska lub uzyskał w wieku 100 lat. Za wysokość górną ( $H_{100}$ ) przyjęto średnią wysokość 100 najgrubszych drzew przypadających na 1 ha. Przed wygenerowaniem rozkładu wysokości drzew, wysokość górna nie jest znana. Przyjęto więc wstępne założenie  $H_{100}=H_g$ , gdzie  $H_g$  jest średnią wysokością drzewostanu. Znając wiek drzewostanu (W), określono jego bonitację wzorem:

$$B = 2,9151397 \cdot H_{100} \left( \frac{11 + 0,3 \cdot W}{W} \right)^{1,2} \quad (1)$$

Jest to funkcja potęgowa, spełniająca warunek  $B=H_{100}$ , gdy  $W=100$ . Sposób dochodzenia do współczynników równania opisano w pracy Bruchwalda (1977).

**Maksymalna liczba drzew drzewostanu.** Za maksymalną przyjmuje się liczbę drzew w takim drzewostanie, w którym nie prowadzi się żadnych zabiegów pielęgnacyjnych, i w którym czynniki środowiska, zwłaszcza

cza abiotyczne, nie spowodowały szkód (Bruchwald, Zasada 2010). Zmianę tej cechy z wiekiem drzewostanu ( $W$ ) opisują dwie funkcje (określone wzorami 3a i 3b) łączące się w wieku  $W_1$ :

$$W_1 = \frac{9,1476}{0,00013 \cdot B - 0,00034} \quad (2)$$

Gdy zachodzi  $W < W_1$  wówczas stosuje się funkcję okręgu o postaci:

$$p = 0,025 + \frac{[(0,00013 \cdot B - 0,00034) \cdot W_1 - 0,0238] \cdot W^2}{W_1^2} \quad (3a)$$

a gdy  $W \geq W_1$  to funkcję prostej:

$$p = -0,0488 + (0,00013 \cdot B - 0,00034) \cdot W \quad (3b)$$

gdzie  $p$  jest średnią powierzchnią zajmowaną przez jedno drzewo.

Maksymalną liczbę drzew drzewostanu określa wzór:

$$N_{\max} = \left( \frac{100}{p} \right)^2 \quad (4)$$

Maksymalna liczba drzew jest wykorzystywana do określania stopnia zagęszczenia drzewostanu ( $Zag$ ):

$$Zag = \frac{N_{ha}}{N_{\max}} \quad (5)$$

gdzie  $N_{ha}$  jest przeliczoną na 1 ha liczbą drzew drzewostanu.

**Generowanie rozkładu pierśnic drzew.** Rozkład pierśnic drzew ma kształt asymetrycznego dzwonu. Jeżeli rozkład pierśnic nie jest znany, wówczas zachodzi potrzeba jego wygenerowania. Dla rozwiązania tego problemu przyjęto założenie, że rozkład pierśnic drzew można przedstawić dwoma uciętymi rozkładami normalnymi, a cięcie to przeprowadza się w miejscu pierśnicy modalnej. Pierwszy rozkład ucięty jest stale rosnący do wartości modalnej i tworzy lewy ogon rozkładu połączonego. Drugi rozkład ucięty jest stale malejący począwszy od wartości modalnej i tworzy prawy ogon rozkładu połączonego.

Wygenerowanie rozkładu całkowitego z dwóch rozkładów uciętych, wymaga znajomości następujących parametrów tych rozkładów:

- wartości modalnej ( $Do$ ),
- odchylenia standardowego lewego ogona rozkładu ( $Odl$ ),
- odchylenia standardowego prawego ogona rozkładu ( $Odp$ ),
- liczby jednostek statystycznych lewego ogona rozkładu ( $nl$ ),

– liczby jednostek statystycznych prawego ogona rozkładu ( $np$ ).

Przyjęto dowolną wielkość powierzchni próbnej ( $a$ ), która reprezentować będzie drzewostan. Może to być powierzchnia powiązana z wiekiem drzewostanu, np. następującym wzorem:

$$a = \frac{W}{2000} \quad (6)$$

gdzie  $a$  jest powierzchnią wyrażoną w hektarach.

Dla danej powierzchni  $a$  określa się liczbę drzew na niej występującą ( $N$ ):

$$N = a \cdot Zad \cdot N_{\max} \quad (7)$$

gdzie  $Zad$  jest czynnikiem zadrzewienia, a więc daną podstawową, natomiast  $N_{\max}$  to maksymalna liczba drzew drzewostanu.

Liczbę drzew lewego ogona rozkładu pierśnic drzew ( $nl$ ) określa się wzorem:

$$nl = N \cdot \frac{Odl}{Odl + Odp} \quad (8)$$

a prawego ( $np$ ):

$$np = N - nl \quad (9)$$

Dla odchyłeń standardowych rozkładów uciętych wyprowadzono następujące wzory empiryczne:

$$Odl = \left( \frac{D_g}{14,8 + 0,159 \cdot D_g} \right)^2 + 0,7 \quad (10a)$$

$$Odp = \left( \frac{D_g}{12 + 0,12 \cdot D_g} \right)^2 + 0,5 \quad (10b)$$

gdzie  $D_g$  jest średnią pierśnicą drzewostanu, obliczoną na podstawie jego pola przekroju, a więc daną podstawową.

Przeprowadzono następnie generowanie rozkładu zmiennej losowej  $X$ , przy założeniu, że miejscem styku dwóch rozkładów uciętych jest zmienna  $X_0$  o wartości zero. Dla lewego ogona rozkładu generuje się  $nl$  liczb wg wzoru:

$$x_i = -Odl \cdot |z_i| \quad i = 1, 2, \dots, nl \quad (11a)$$

i dla prawego ogona  $np$  liczb:

$$x_j = -Odp \cdot |z_j| \quad j = 1, 2, \dots, np \quad (11b)$$

gdzie  $z$  jest zmienną losową standaryzowanego rozkładu normalnego. Parę takich zmiennych można uzyskać wzorami:

$$z_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln u_1} \cdot \cos 2\pi u_2 \quad (12a)$$

$$z_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln u_1} \cdot \sin 2\pi u_2 \quad (12b)$$

gdzie  $u_1$  i  $u_2$  są wylosowanymi liczbami zmiennej losowej rozkładu jednostajnego z przedziału od 0 do 1. Liczby te można otrzymać z generatora liczb pseudolosowych. Większość języków komputerowych ma procedurę pozwalającą na ich generowanie.

Dla wygenerowanego rozkładu zmiennej  $X$  określa się średnią kwadratową  $X_g$  wzorem:

$$X_g = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

Pozwala to na określenie pierśnicy modalnej ( $D_o$ ) wzorem:

$$D_o = D_g - X_g \quad (14)$$

Zbiór pierśnic drzew ( $d_i$ ) otrzymuje się dodając do każdej wartości zmiennej  $X$  pierśnicę modalną:

$$d_i = D_o - Odl \cdot |z_i| \quad i = 1, 2, \dots, nl \quad (15a)$$

$$d_j = D_o + Odp \cdot |z_j| \quad j = 1, 2, \dots, np \quad (15b)$$

**Generowanie wysokości drzew.** Polega ono na przyporządkowaniu każdemu drzewu określonej wysokości. Przyporządkowanie to przeprowadza się wzorem:

$$h_i = \frac{d_i^2 \cdot (H_g - 1,3)}{\left[ D_g - 0,6162 \cdot H_g^{-0,4046} \cdot \sqrt{h - 1,3} \cdot (D_g - d_i) \right]^2} + 1,3 + z_i \cdot Ohd \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

$$Ohd = 0,1171 \cdot H_g^{0,7903} \quad (17)$$

gdzie:

$h$  – wysokość drzewa w metrach,

$d$  – pierśnica drzewa w centymetrach,

$D_g$  – średnia pierśnica drzewostanu w centymetrach,

$H_g$  – średnia wysokość drzewostanu w metrach,

$z_i$  – liczby losowe rozkładu normalnego określone wzorami (12a) i (12b),

$Ohd$  – odchylenie standardowe wysokości drzew z wyłączeniem wpływem pierśnicy.

**Określanie miąższości drzew.** Określanie miąższości drzewa wymaga znajomości jego pierśnicy i wysokości oraz pierśnicowej liczby kształtu. Sposoby ustalania pierśnicy i wysokości drzewa zostały już przedstawione. Dla określenia pierśnicowej liczby kształtu opracowano, wykorzystując bogaty materiał empiryczny, odpowiednie wzory. Dotyczą one następujących liczb kształtu:

– strzały w korze ( $f_1$ ),

– grubizny drzewa ( $f_q$ ),

Wzory empiryczne na odpowiednią liczbę kształtu dla modrzewia mają postać:

$$f_1 = 0,355 + 0,6d^{-0,5} \quad (18)$$

$$f_q = f_1 \left[ 1 - 225(d-1)^{-3,25} \right] \quad (19)$$

Zakładając, że pierśnica drzewa ( $d$ ) jest wyrażona w centymetrach, a wysokość ( $h$ ) w metrach, miąższość drzewa ( $v$ ) wyrażona w  $m^3$  jest równa:

$$v = \frac{\pi}{40000} \cdot d^2 \cdot h \cdot f \quad (20)$$

Miąższość drzewostanu lub grupy drzew oblicza się sumując miąższość poszczególnych drzew.

## 4. Wnioski

1. W bazie danych Systemu Informatycznego Lasów Państwowych (SILP) zawarte są m.in. dane dla drzewostanu: średni wiek ( $W$ ), przeciętna pierśnica ( $D_g$ ) i średnia wysokość ( $H_g$ ) oraz czynnik zadrzewienia ( $Zad$ ). W wariantcie 2. modelu wzrostu można wykorzystać te dane do wygenerowania rozkładu pierśnic drzew i przyporządkowania każdemu drzewu odpowiedniej wysokości. Umożliwia to zastosowanie pozostałych algorytmów modelu wzrostu, a tym samym prognozowanie rozwoju zasobów drzewnych. Opracowanie takiego narzędzia, jakim jest przedstawiony w niniejszej pracy wariant modelu wzrostu, ma zatem znaczenie dla praktyki leśnictwa.

2. Zawarte w bazie SILP dane są co roku aktualizowane, powiększany jest wiek drzewostanu, zmienia się przeciętna pierśnica, średnia wysokość, czynnik zadrzewienia i inne cechy drzewostanu. Niekiedy dokonuje się podziału wydzielenia, starodrzew ulega zamianie na uprawę, luki w drzewostanie najczęściej powiększają się, zakładane są gniazda, przeprowadzany jest zabieg pielęgnacyjny. Model wzrostu może być pomocny w aktualizacji cech drzewostanu. Dotyczy to zwłaszcza przeciętnej pierśnicy, średniej wysokości, czynnika zadrzewienia i miąższości drzewostanu.

3. Jedną z ważniejszych cech drzewostanu określaną modelem wzrostu jest bieżący przyrost miąższości. Liczony jest on w przód, co umożliwia zastosowanie modelu nie tylko do prognozowania zasobów drzewnych, ale również do wypracowania sposobów optymalizujących kolejność naboru drzewostanów do cięć rębnych i przedrębnych.

4. Model wzrostu dla drzewostanów modrzewiowych stwarza nowe perspektywy badawcze. Dotyczy one mogą sprzężenia modelu dla modrzewia z modelami zbudowanymi dla innych gatunków drzew oraz podjęcia badań zmierzających do opracowania modeli dla drzewostanów mieszanych i różnowiekowych.

5. Model wzrostu dla modrzewia wymaga weryfikacji. Do tego celu najlepiej nadają się stałe powierzchniowo doświadczalne, tych jednak w Polsce brakuje.

Możliwe jest natomiast zastosowanie do oceny dokładności modelu tymczasowych powierzchni badawczych, na których przeprowadzono pomiar przyrostu miazszości za okres ubiegły.

## Literatura

- Bruchwald A. 1971. Metoda określania bieżącego przyrostu miazszości drzewostanu przy zastosowaniu właściwej liczby kształtu  $f_{1/3}$ . *Folia Forestalia Polonica, Series A*, 18: 99–131.
- Bruchwald A. 1977. Change in top height of pine forest stands with age. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Biologiques*, 5: 335–342.
- Bruchwald A. 1986. Simulation growth model MDI-1 for Scots pine. *Annales of Warsaw Agricultural University SGGW-AR, Forestry and Wood Technology*, 34: 47–52.
- Bruchwald A. 1991. Limiting Growth Model for Pine. *Bulletin of Polish Academy of Sciences. Biological Sciences*, 2: 213–220.
- Bruchwald A. 1995. Metoda regulacji użytkowania przedrębego. *Sylwan*, 6: 5–13.
- Bruchwald A., Dudek A., Dudzińska T., Michalak K., Wróblewski L., Zasada M. 1999. Model wzrostu dla drzewostanów świerkowych. *Sylwan*, 1: 19–31.
- Bruchwald A., Dudzińska M., Wirowski M. 1996. Model wzrostu dla drzewostanów dębu szypułkowego. *Sylwan*, 10: 35–44.
- Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T., Dudek A., Michalak K., Wróblewski L., Zasada M., Tomusiak R. 2001. Model wzrostu dla drzewostanów brzoźowych. Dokumentacja naukowa w Zakładzie Dendrometrii i Nauki o Produkcyjności Lasu SGGW, Warszawa (maszynopis).
- Bruchwald A., Dudzińska M., Wirowski M. 2003. Model wzrostu dla olszy czarnej (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) *Sylwan*, 8: 3–10.
- Bruchwald A., Zasada M. 2010. Model wzrostu modrzewia europejskiego (*Larix decidua* Mill.). *Sylwan*, 9: 615–624.
- Dudek A., Ek A.R. 1980. A bibliography of worldwide literature on individual tree based forest stand growth models. University of Minnesota, College of Forestry, Department of Forest Resources, Staff Paper Series, 12.
- Dudzińska M., Bruchwald A. 2008. Znaczenie i praktyczne możliwości wykorzystania wyników badań na stałych powierzchniach doświadczalnych założonych przez Schwappacha i Wiedemanna w drzewostanach dębowych. *Rozprawy i Monografie*, 11. Warszawa, Instytut Badawczy Leśnictwa.
- Dudzińska M., Wirowski M. 1998. Model wzrostu dla buka. Dokumentacja naukowa. Warszawa, Instytut Badawczy Leśnictwa (maszynopis).
- Ek A., Monserud R. 1974. FOREST: A computer model for simulating the growth and reproduction of mixed species forest stands. Univ. of Wisconsin – Madison, College of Agricultural and Life Sciences, Research Report, R2635.
- Wiedemann E., Schober R. 1957. Ertragstabeln wichtiger Holzarten bei verschiedener Durchforstung. Verlag M. u. H. Schaper, Hannover.
- Schwappach A. 1912. Ertragstabeln der wichtigeren Holzarten. Neudamm.
- Szymkiewicz B. 1961. Tablice zasobności i przyrostu drzewostanów. Warszawa, PWRiL.
- Siekierski K. 1995. Zastosowanie modeli wzrostu w regulacji użytkowania rębego drzewostanów. Warszawa, Fundacja "Rozwój SGGW": 6–188.
- Tjurin A. 1956. Normalnaja proizvoditelnost' nasażdenij sosny, berjozy, osiny i jeli. Moskwa-Leningrad, Selskokochoziz.
- Vanclay J.K. 1995. Growth models for tropical forests: a synthesis of models and methods. *Forest Science*, 41: 7–42.
- Zasada M. 1999. Model wzrostu dla jodły (*Abies alba* Mill.). *Folia Forestalia Polonica, Series A*, 44: 37–46.
- Zasada M. 2007. Zastosowanie modeli wzrostu do prognozowania długookresowych zmian zasobów leśnych na podstawie danych z wielkoobszarowej inwentaryzacji lasu. *Rozprawy Naukowe i Monografie*, 310. Warszawa, Wydawnictwo SGGW: 7–95.