ACTA Scientiarum Polonorum Architectura 3 (2) 2004, 95–102

MATEMATYCZNY MODEL DYNAMIKI POZIOMU WODY GRUNTOWEJ JAKO PODSTAWA PROJEKTOWANIA OBIEKTÓW INŻYNIERSKICH

Helena Kazieko, Lucyna Kazieko
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. W pracy sformułowano analityczny model zmiany poziomu wód gruntowych w ośrodku dwuwarstwowym w wyniku zasilania gruntu wodą. Zagadnienie to opisano równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi. Do rozwiązania równania zastosowano przekształcenie Hankela. Otrzymane rozwiązanie pozwala określić poziom wód gruntowych przy uwzględnieniu przeciekania z dołu lub bez uwzględnienia przeciekania z dołu. Otrzymane wzory mogą być zastosowane w praktyce inżynierskiej.

Słowa kluczowe: poziom wód gruntowych, model matematyczny

WSTĘP

Przy projektowaniu budowli ziemnych istotne znaczenie ma określenie poziomu wód gruntowych w danym obszarze. Jeśli rozpatrywany obszar jest zasilany wodą, ważnym problemem wydaje się opis zmian zachodzących w warstwie wód gruntowych w danych punktach rozpatrywanego obszaru i w danym czasie t.

Niniejsza praca ma na celu analityczny opis zjawiska zmiany poziomu wód gruntowych w wyniku zasilania wodą.

SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozpatrujemy nieustalony ruch wód gruntowych spowodowany zwiększonym zasilaniem wodą. Przyjmujemy następujące założenia:

Adres do korespondencji – Corresponding author: Helena Kazieko, Lucyna Kazieko, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Katedra Zastosowań Matematyki, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa

1. Zasilany grunt składa się z dwóch warstw o różnej wodoprzepuszczalności.
2. Podłoże zasilanego gruntu stanowi słabo przepuszczalna warstwa.
3. Powierzchnia zasilanego gruntu ograniczona jest okręgiem o promieniu R.
4. W punkcie r rozpatrywanego obszaru i w początkowym okresie czasu $t = 0$ wody gruntowe zajmują stałe położenie horyzontalne, tzn:

$$h(r,0) = H\,, \quad H = \text{const}$$

5. Podczas zasilania na powierzchni występuje stały wydatek wody (q).

Przy powyższych założeniach zagadnienie określenia podniesienia poziomu wód gruntowych w dowolnym punkcie rozpatrywanego obszaru i w różnych momentach czasu można sprowadzić do rozwiązania równania różniczkowego [Połubarinowa-Koczina 1977]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{q h_{śr}}{m} - \beta^2 (U - U_0) \tag{1}$$

gdzie: $U = \dfrac{h^2}{2}$, $\quad h = h(r,t)$

$U_0 = \dfrac{H^2}{2}$, $\quad a^2 = \dfrac{k h_{śr}}{m}$ – współczynnik przepuszczalności,

$\beta^2 = \dfrac{2k_0}{md}$

r – zmienna położenia,
t – czas,
h – ciśnienie w górnej warstwie z powierzchnią swobodną,
H – ciśnienie w dolnej warstwie,
$h_{śr}$ – ciśnienie średnie,
k – współczynnik filtracji w górnej warstwie,
k_0 – współczynnik filtracji w dolnej warstwie,
d – grubość słabo przepuszczalnej warstwy,
m – niedostatek nasycenia gruntu.

Przyjmujemy następujące warunki:
– warunek początkowy:

$$U(r,0) = \frac{H^2}{2}, \quad q > 0 \quad \text{dla} \quad 0 \le r \le R \tag{2}$$

– warunek brzegowy:

$$U(r,t) = \frac{H^2}{2}, \quad q = 0 \quad \text{dla} \quad R \le r < \infty \tag{3}$$

Sens fizyczny warunków (2) i (3) jest następujący.

W chwili początkowej $t = 0$ w każdym punkcie r rozpatrywanego (kołowego) obszaru zasilanego poziom wód gruntowych jest stały i równy $\frac{H^2}{2}$ (wydatek wody $q > 0$).

Na brzegu rozpatrywanego obszaru i poza jego granicami (okrąg koła o promieniu R i jego zewnętrze) poziom wód gruntowych jest stały i równy $\frac{H^2}{2}$ (wydatek wody $q = 0$).

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Zajmiemy się obecnie rozwiązaniem równania różniczkowego (1) z warunkami (2) i (3), tzn. znajdziemy funkcję $U(r, t)$ spełniającą warunki (2) i (3).

W tym celu wprowadzimy nową funkcję $Z(r, t)$ określoną zależnością:

$$U(r,t) = \frac{H^2}{2} + Z(r,t)\,e^{-\beta^2 t} \tag{4}$$

Wówczas równanie (1) przyjmie postać:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r}\right) + \frac{q h_{\acute{s}r}}{m} \tag{5}$$

oraz warunek początkowy (2) przyjmie postać:

$$Z(r,0) = 0, \quad q > 0 \quad \text{dla} \quad 0 \le r \le R \tag{6}$$

warunek brzegowy (3) przyjmie postać:

$$Z(\infty,t) = 0 \quad q = 0 \quad \text{dla} \quad R \le r < \infty \tag{7}$$

W celu rozwiązania równania (5) z warunkami (6) i (7) zastosujemy przekształcenie Hankela względem zmiennej r, oznaczając [Sneddon 1955]:

$$\overline{Z} = \int_0^\infty Z(r,t)\, r I_0(pr)\, dr \tag{8}$$

gdzie I_0 – funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego:

Weźmy najpierw prawą stronę równania (5). Mnożąc ją przez jądro przekształcenia $rI_0(pr)$ i całkując przez części, otrzymujemy:

$$\wp = \int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} \right) r I_0(pr) dr + \frac{q h_{\acute{s}r}}{m} \int_0^\infty r I_0(pr) dr =$$

$$= \left[r \frac{\partial Z}{\partial r} I_0(pr) \right]_0^\infty - p \int_0^\infty r I_0'(pr) \frac{\partial Z}{\partial r} dZ + \frac{q h_{\acute{s}r}}{m} \overline{f}(p) =$$

$$= -p\left[Z r I_0'(pr) \right]_0^\infty + p \int_0^\infty [I_0'(pr) - p r I_0''(pr)] Z dr + \frac{q h_{\acute{s}r}}{m} \overline{f}(p)$$

Zauważając, że $I_0(pr)$ spełnia równanie Bessela – jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego ze względu na funkcję $I_0(pr)$:

$$I_0''(pr) + \frac{1}{pr} I_0'(pr) + I_0(pr) = 0$$

otrzymujemy

$$\wp = -p^2 \overline{Z} + \frac{q h_{\acute{s}r}}{m} \overline{f}(p), \qquad \overline{f}(p) = \int_0^\infty r I_0(pr) dr \tag{9}$$

Mnożąc teraz lewą stronę równania (5) przez jądro przekształcenia $r I_0(pr)$ i całkując względem r, otrzymujemy:

$$\ell = \int_0^\infty \frac{\partial Z}{\partial t} r I_0(pr)\, dr = \frac{dZ}{dt} \tag{10}$$

Po uwzględnieniu równań (9) i (10), przekształcone równanie (5) przyjmie postać:

$$\frac{d\overline{Z}}{dt} + a^2 p^2 \overline{Z} = \frac{q h_{\acute{s}r}}{m} \overline{f}(p) \tag{11}$$

Warunek początkowy (6) przyjmie postać:

$$\overline{Z}(r, 0) = 0 \tag{12}$$

Rozwiązując równanie (11) z warunkiem (12), otrzymujemy:

$$\overline{Z} = \frac{q h_{\acute{s}r}}{m} \overline{f}(p) \int_0^t e^{-a^2 p^2 (t-\tau)} d\tau \tag{13}$$

W naszym przypadku funkcja $\overline{f}(p)$ wyraża się zależnością:

$$\overline{f}(p)=\int_0^R rI_0(pr)dr=\begin{cases}\dfrac{RI_1(pR)}{p} & \text{dla} \quad 0\le r\le R\\ 0 & \text{dla} \quad R\le r<\infty\end{cases}$$

Podstawiając wartość $\overline{f}(p)$ do równania (13), otrzymujemy:

$$\overline{Z}=\frac{qh_{\text{śr}}}{m}\frac{RI_2(pR)}{p}\int_0^t \mathrm{e}^{-a^2p^2(t-\tau)}d\tau \tag{14}$$

Funkcja określona wzorem (14) jest więc rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego (11) z warunkiem początkowym (12).

Zastosujemy teraz przekształcenie odwrotne Hankela określone następująco [Sneddon 1955]:

$$Z(r,t)=\int_0^\infty \overline{Z}pI_0(rp)\,dp$$

Wówczas znajdujemy rozwiązanie równania (5) z warunkami (6) i (7):

$$\begin{aligned}Z(r,t)&=\frac{qh_{\text{śr}}R}{m}\int_0^\infty I_1(pR)I_0(pr)\int_0^t \mathrm{e}^{-a^2p^2(t-\tau)}d\tau dp=\\&=\frac{qh_{\text{śr}}R}{m}\int_0^t\int_0^\infty I_1(pR)I_0(pr)\,\mathrm{e}^{-a^2p^2(t-\tau)}dpd\tau\end{aligned} \tag{15}$$

Przechodząc do „starych" zmiennych r i t, otrzymujemy:

$$U(r,t)=\frac{H^2}{2}+\frac{qh_{\text{śr}}R\mathrm{e}^{-\beta^2t}}{m}\int_0^t\int_0^\infty I_1(pR)I_0(rp)\,\mathrm{e}^{-a^2p^2(t-\tau)}dpd\tau \tag{16}$$

Wzór (16) jest szukanym rozwiązaniem. Pozwala obliczyć podniesienie poziomu wód gruntowych w warunkach zasilania gruntu o powierzchni ograniczonej okręgiem o promieniu R w dowolnym momencie t.

DYSKUSJA ROZWIĄZANIA W SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKACH

I. Z punktu widzenia praktyki inżynierskiej interesujące może być określenie podniesienia poziomu wód gruntowych w środku rozpatrywanej powierzchni (środek okręgu ograniczającego zasilaną powierzchnię). W tym celu w równaniu (16) wstawiamy $r=0$ i uwzględniając, że $I_0(0)=1$ oraz:

$$\int_0^\infty I_1(pR)\,\mathrm{e}^{-a^2p^2(t-\tau)}dp = \frac{1}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right) \tag{17}$$

znajdujemy:

$$U(0,t) = \frac{H^2}{2} + \frac{qh_{\text{śr}}R\mathrm{e}^{-\beta^2 t}}{m}\int_0^t\left[1-\exp\left(-\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right]d\tau \tag{18}$$

II. Rozpatrzymy przypadek, gdy dolna warstwa jest nieprzepuszczalna. Wówczas w rozwiązaniu (16) przyjmujemy, że $\beta = 0$, a podniesienie poziomu wód gruntowych określone jest następująco:

$$U(r,t) = \frac{H^2}{2} + \frac{qh_{\text{śr}}R}{m}\int_0^t\int_0^\infty I_1(pR)I_0(pr)\,\mathrm{e}^{-a^2p^2(t-\tau)}dp\,d\tau \tag{19}$$

W tym przypadku podniesienie poziomu wód gruntowych w środku okręgu, gdy $r = 0$ i $\beta = 0$ – we wzorze (18), określone jest wzorem:

$$U(0,t) = \frac{H^2}{2} + \frac{qh_{\text{śr}}}{m}\int_0^t\left[1-\exp\left(-\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right]d\tau \tag{20}$$

lub

$$U(0,t) = \frac{H^2}{2} + \frac{qh_{\text{śr}}t}{m}[1+\exp(-\mu)-\mu Ei(-\mu)] \tag{21}$$

gdzie: $\mu = \dfrac{R^2}{4a^2t}$,

$$Ei(-\mu) = -\int_\mu^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}d\alpha.$$

PODSUMOWANIE

Otrzymane wzory (16), (18), (19) i (21) mogą być wykorzystane do obliczeń podniesienia poziomu wód gruntowych w warunkach zasilania powierzchni ograniczonej okręgiem z uwzględnieniem lub bez uwzględnienia przeciekania z dołu.

Rozwiązanie dane wzorem (16) można przekształcić do innej postaci, jeśli wykorzystamy zależność [Janke i in. 1960]. Wówczas:

$$U(r,t)=\frac{H^2}{2}+\frac{qh_{\acute{s}r}Re^{-\beta^2 t}}{m}\int_0^{\mu}\eta^{n+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}F\left(-n,\ -1-n,\ 1,\ \frac{r^2}{R^2}\right)d\eta \tag{22}$$

gdzie: $\mu=\frac{R^2}{4a^2t}$,

$$\eta=\frac{R^2}{4a^2(t-\tau)},$$

$$F\left(-n,\ -1-n,\ 1,\ \frac{r^2}{R^2}\right)=-n+\frac{n(n+1)}{1}\frac{r^2}{R^2}+\frac{n^2(n+1)^2}{1\cdot 2}\frac{r^4}{R^4}+\cdots$$ szereg hipergeometryczny

Przestawiając znak całki i sumy, wykonując całkowanie i ograniczając się do dwóch wyrazów rozwinięcia szeregu (22), otrzymujemy:

$$U(r,t)=\frac{H^2}{2}+\frac{qh_{\acute{s}r}Re^{-\beta^2 t}}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mu^{n+2}}{(n+2)(n+1)!}\left(-n+\frac{n(n+1)r^2}{\mathrm{R}^2}\right) \tag{23}$$

Funkcja określona wzorem (23) jest rozwiązaniem równania różniczkowego (1) z warunkami (2), (3). Wzór (23) może być wykorzystany w praktyce inżynierskiej do obliczania poziomu wód gruntowych przy warunkach opisanych w zagadnieniu.

PIŚMIENNICTWO

Dagan G., 1967. Linearized solutions of free-surface groundwater flow. J. Geophys. Res. 72, 4.

Janke E., Emde F., Lösch F., 1960. Tafeln Höherer Functionen, Stuttgart.

Połubarinowa-Koczina P.J., 1977. Teorija dwiżenija gruntowych wod. Izd. Nauka, Moskwa.

Sharma J.N., Singh K., 2000. Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. N. Delhi.

Sneddon I., 1955. Preobrazowanije Furje. Moskwa.

MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF GROUNDWATER LEVEL AS A BASIC OF ENGINEERING OBJECTS DESIGN

Abstract. The mathematical model of groundwater level fluctuation in two-layers subsoil due to water supply was formulated. This phenomenon was described using two order partial equation with boundary and initial conditions. In order to solve the partial equation the Hankel transform approach was applied. The model allow to determine the groundwater level for two assumptions: permeable and impermeable bottom of subsoil. The proposed model is helpful in engineering practice.

Key words: groundwater level, mathematical model

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 20.10.2004