

ZENON MUSZYŃSKI

## Zastosowanie programowania liniowego do rejonizacji spedycji drewna ze składnic do zakładów odbiorczych

Применение линейного программирования для районизации вывозки древесины со складов на предприятия-потребители

The application of linear programming to the regional distribution of timber dispatching from depots to woodworking plants

**P**rzewozy ładunków drewna ze składnic spedycyjnych do zakładów odbiorczych nie zawsze przebiegają według najmniejszego nakładu środków. Składa się na to wiele przyczyn często niezależnych od decyzji podejmowanych przez kierownictwo składnic. W związku z tym chciałbym wskazać sposoby, za pomocą których określa się optymalne wielkości tych czynników, które można we własnym zakresie, w odpowiednich granicach kształtować. Zależy nam przede wszystkim na uniknięciu zbyt dalekich przerzutów surowca i o dalszą, bardziej wnikliwą analizę rejonizacji dostaw ładunków opartą o kryteria minimalizacji ogólnej liczby tonokilometrów.

Zagadnienie to ma istotne znaczenie w gospodarstwie leśnym ze względu na niedobór środków transportowych, który można w pewien sposób złagodzić przez zwiększenie rotacji pojazdów, a więc przez skrócenie ich przebiegu po sieci dróg kołowych i żelaznych. Należy podkreślić, że w bieżącym pięcioleciu przerób drewna na składnicach osiągnie poziom 7,5 mln m<sup>3</sup> (3).

W organizowaniu i planowaniu dostaw ładunków drewna ze składnic do zakładów odbiorczych zasadniczo kierujemy się doświadczeniem z lat ubiegłych, rutyną planistów i długoletnią praktyką pracowników inżynieryjno-technicznych. Nie mamy jednak, w odniesieniu do ustalonych kierunków dostaw, tego przeświadczenia, że określony plan spedycji jest optymalny, i że jego wskaźniki ekonomiczne są maksymalne.

W tej sytuacji istnieje potrzeba zastosowania rachunku ekonomicznego opartego na stosunkowo prostych i praktycznie przydatnych analizach matematycznych. Mam tu na myśli programowanie liniowe, na którego praktyczne zastosowanie chciałbym zwrócić uwagę leśników.

Teoria programowania liniowego, powstała w ostatnim dwudziestoleciu. Znajduje ona coraz to szersze zastosowanie w badaniach techniczno-ekonomicznych przy rozwiązywaniu różnych problemów, dających się ująć w odpowiedni model matematyczny o alternatywnych możliwościach podejmowania decyzji w warunkach istnienia ściśle określonych ograniczeń, które pozostają niezmiennie przy maksymalizowaniu lub minimalizowaniu pewnych wielkości.

Zagadnienia programowania liniowego wiążą się z efektywnym wykorzystaniem lub rozmieszczeniem ograniczonych środków, tak aby spełnić określone wymagania (4). Dzięki rozwojowi techniki obliczeniowej opartej o elektroniczne maszyny rachunkowe, możliwe jest już dziś dokładne i szybkie rozwiązywanie wielu skomplikowanych i uciążliwych zadań.

Programowanie liniowe jest wykorzystywane przy rozwiązywaniu różnych problemów życia gospodarczego, a szczególnie w tzw. zagadnieniach transportowych, jeżeli istnieją możliwości alternatywnego podejmowania decyzji i gdy wyznaczony jest cel działania oraz warunki umożliwiające jego optymalizację.

W literaturze jest wiele prac poświęconych konstruowaniu modeli matematycznych programowania liniowego oraz ich rozwiązywaniu. Praktyczne zastosowanie programowania liniowego, podawane w piśmiennictwie, dotyczą przede wszystkim działalności produkcyjnej zakładów przemysłowych (1, 2, 4—7). Sporadycznie można spotkać pozycje w literaturze omawiające zastosowania programowania liniowego w leśnictwie (8).

W praktyce spotykamy się z licznymi metodami programowania liniowego, które są ciągle udoskonalane dzięki czemu coraz bardziej rozszerza się zakres ich zastosowania.

Rozpatrzmy poniżej praktyczne zastosowanie jednej z metod programowania liniowego, zwaną metodą rozmieszczeń (albo metodą przekątnej rogu północno-zachodniego, albo metodą kąta północno-zachodniego, albo metodą dystrybucji) na przykładzie:  $m = 5$  składnic, spediujących  $a_i$  drewna do  $n = 3$  zakładów odbiorczych, do których dostarcza się  $b_j$  jednostek tego samego sortymentu.

Zadanie nasze będzie polegało na ustaleniu optymalnego planu transportu ładunków z 5 składnic spediujących 20, 30, 40, 50 i 15 tys. ton drewna do 3 zakładów odbierających 60, 35 i 60 tys. ton drewna.

Zakładamy, że całkowita ilość drewna  $\sum_{i=1}^m a_i = 155$  tys. ton, znaj-

dująca się na składnicach, jest równa sumie zapotrzebowań zakładów odbiorczych, czyli że:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1)$$

Jeżeli przez  $x_{ij}$  oznaczymy liczbę spedowanego drewna z posz-

czególnych składnic (S) do odpowiednich zakładów odbiorczych (Z) to powyższą współzależność możemy przedstawić za pomocą tabeli 1.

Tabela 1

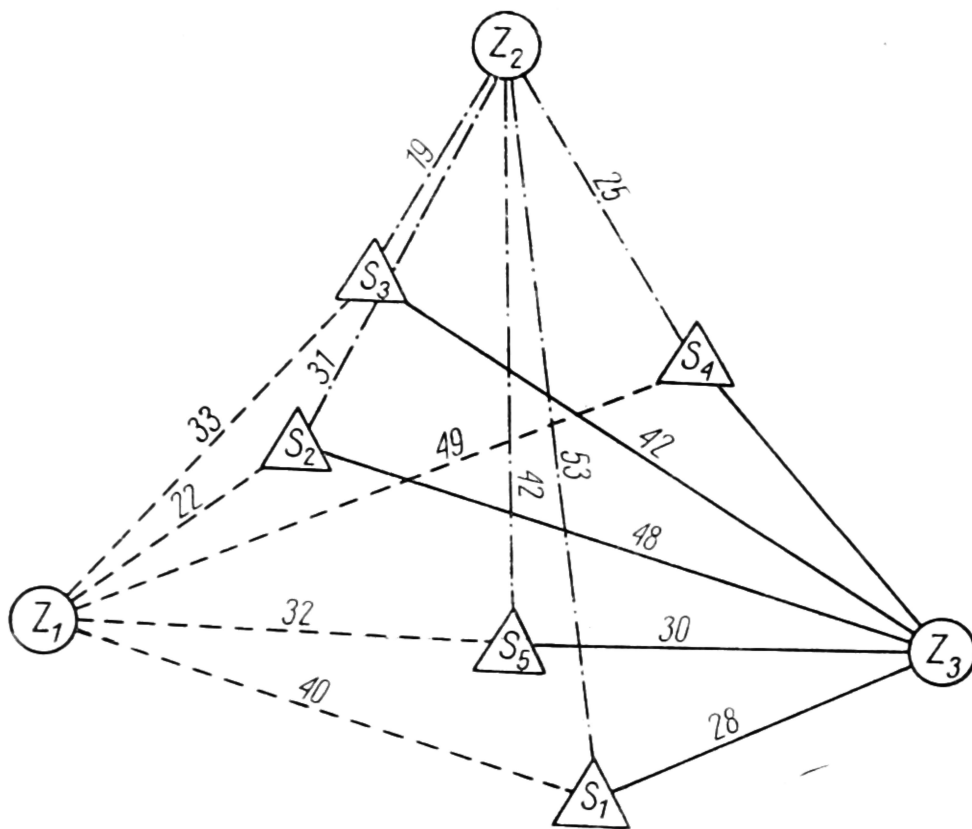
Składnice		Zakłady odbiorcze			Ilość spediowanego drewna	
		Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>	oznaczenie	tys. ton
S <sub>1</sub>		x <sub>11</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>13</sub>	a <sub>1</sub>	20
S <sub>2</sub>		x <sub>21</sub>	x <sub>22</sub>	x <sub>23</sub>	a <sub>2</sub>	30
S <sub>3</sub>		x <sub>31</sub>	x <sub>32</sub>	x <sub>33</sub>	a <sub>3</sub>	40
S <sub>4</sub>		x <sub>41</sub>	x <sub>42</sub>	x <sub>43</sub>	a <sub>4</sub>	50
S <sub>5</sub>		x <sub>51</sub>	x <sub>52</sub>	x <sub>53</sub>	a <sub>5</sub>	15
Ilość otrzymanego drewna	oznaczenie	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>		
	tys. ton	60	35	60		

Jeżeli przez  $l_{ij}$  oznaczymy odległość pomiędzy składnicami i zakładami odbiorczymi, to powyższą współzależność dla wszystkich możliwych rozwiązań naszego przykładu możemy przedstawić za pomocą tabeli 2.

Tabela 2

Składnice	Zakłady odbiorcze					
	Z <sub>1</sub>		Z <sub>2</sub>		Z <sub>3</sub>	
	oznaczenie	km	oznaczenie	km	oznaczenie	km
S <sub>1</sub>	l <sub>11</sub>	40	l <sub>12</sub>	53	l <sub>13</sub>	28
S <sub>2</sub>	l <sub>21</sub>	22	l <sub>22</sub>	31	l <sub>23</sub>	48
S <sub>3</sub>	l <sub>31</sub>	33	l <sub>32</sub>	19	l <sub>33</sub>	42
S <sub>4</sub>	l <sub>41</sub>	49	l <sub>42</sub>	25	l <sub>43</sub>	26
S <sub>5</sub>	l <sub>51</sub>	32	l <sub>52</sub>	42	l <sub>53</sub>	30

Schemat maksymalnej liczby bezpośrednich połączeń składnic z zakładami odbiorczymi przedstawiono na ryc. 1.



Ryc. 1. Schemat maksymalnej liczby bezpośrednich połączeń składnic (S) z zakładami odbiorczymi (Z) oraz ich odległości w kilometrach.

Rozwiązanie rozpatrywanego przykładu metodą programowania liniowego sprowadza się do znalezienia minimum funkcji:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{ij} = \text{minimum} \quad (2)$$

czyli, że:

$$l_{11}x_{11} + l_{12}x_{12} + l_{13}x_{13} + l_{21}x_{21} + l_{22}x_{22} + l_{23}x_{23} + l_{31}x_{31} + l_{32}x_{32} + l_{33}x_{33} + l_{41}x_{41} + l_{42}x_{42} + l_{43}x_{43} + l_{51}x_{51} + l_{52}x_{52} + l_{53}x_{53} = \text{minimum},$$

która spełnia następujące ograniczenia:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 20\,000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 30\,000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 40\,000 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} &= 50\,000 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} &= 15\,000 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 60\,000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 35\,000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 60\,000 \end{aligned} \quad (3)$$

przy

$$m + n - 1 = 5 + 3 - 1 \quad (4)$$

elementów liczbowych.

Oznacza to, że dla powyższego przykładu zmierzającego do określenia minimalnej liczby tono-kilometrów spediowanych ładunków ze składnic do zakładów odbiorczych może występować tylko 7 dróg dostaw drewna na łączną liczbę  $mn = 15$ .

Z ogólnej liczby bezpośrednich połączeń pomiędzy składnicami i zakładami odbiorczymi jest  $(m-1) \cdot (n-1) = 8$  dróg, tzw. zerowych, po



Składnice	Zakłady odbiorcze						Tys. ton
	Z <sub>1</sub>		Z <sub>2</sub>		Z <sub>3</sub>		
	km	tys. ton	km	tys. ton	km	tys. ton	
S <sub>1</sub>	40	20	53		28		20
S <sub>2</sub>	22		31	30	48		30
S <sub>3</sub>	33		19	5	42	35	40
S <sub>4</sub>	49	25	25		26	25	50
S <sub>5</sub>	32	15	42		30		15
		60		35		60	155

których nie przewiduje się przewozu dostaw drewna w optymalnym modelu rejonizacji spedycji ładunków.

Do rozwiązania zadania przygotowujemy tabelę 3 i umieszczamy w niej odpowiednie wartości  $x$  w dowolnych polach rozpoczynając od lewego górnego rogu, kończąc na prawym dolnym, mając na uwadze spełnienie warunków określonych w równaniach 1, 3 i 4. Jeżeli przyporządkujemy  $x_{11}$  wartość równą 20 000 ton drewna, to w kolumnie pierwszej (zakład odbiorczy Z<sub>1</sub>) możemy wpisać w następnych kolejnych wierszach tylko 40 000 ton, natomiast ze składnicy S<sub>1</sub> nie możemy wysłać do zakładów Z<sub>2</sub> i Z<sub>3</sub> żadnych ładunków, ponieważ całkowitą masę drewna skierowaliśmy do zakładu Z<sub>1</sub>. W przypadku wypełnienia pola drugiego wiersza drugiej kolumny liczbą 30 000 ton, wykluczamy możliwość spedycji drewna ze składnicy S<sub>2</sub> do zakładów Z<sub>1</sub> i Z<sub>3</sub> ze względu na konieczność utrzymania zgodności wewnętrznej planu przewozów. Podobnie przewożąc ze składnicy S<sub>3</sub> do zakładu Z<sub>2</sub> — 5 000 ton oraz do zakładu Z<sub>3</sub> — 35 000 ton drewna wyłączamy z dalszych rozważań rozmieszczenie ładunków składnicy S<sub>3</sub> oraz przewóz drewna do zakładu Z<sub>2</sub>. Postępując w podobny sposób wypełniamy tabelę 3 lokalizując wszystkie dostawy na odpowiednich drogach wiodących do zakładów odbiorczych.

Przy wypełnianiu tabeli 3 należy zwracać również uwagę na możliwość przeprowadzenia linii zamkniętej od poszczególnych pól zerowych przez pola węzłowe (tj. pola, którym przyporządkowano odpowiednie liczby ładunków drewna) do odpowiednich pól zerowych, według zasady, która będzie szerzej omówiona w dalszej części artykułu.

Liczba tono-kilometrów (P) dla pierwszego planu rejonizacji przewozu drewna wynosi:

$$P_1 = l_{11}x_{11} + l_{22}x_{22} + l_{32}x_{32} + l_{33}x_{33} + l_{41}x_{41} + l_{43}x_{43} + l_{51}x_{51}$$

czyli, że:

$$P_1 = 1\,000(40 \cdot 20 + 31 \cdot 30 + 19 \cdot 5 + 42 \cdot 35 + 49 \cdot 25 + 26 \cdot 25 + 32 \cdot 15)$$

$$P_1 = 5\,650 \text{ tys. tono-kilometrów.}$$

Kolejnym etapem w metodzie rozmieszczeń programowania linio-

wego jest ulepszanie planu wyjściowego (tab. 3) przez stopniowe zbliżanie się (iterację) do optymalnego rozwiązania.

W tym celu przeprowadza się analizę  $(m-1) \cdot (n-1)$  pól zerowych, tj. pól dotychczas nie obsadzonych. Dla każdego z nich istnieje tylko jeden zamknięty obwód mający swój początek i koniec w polu zerowym. Tok postępowania jest następujący.

Pole zerowe w tym samym wierszu łączymy z polem węzłowym, po czym przeciągamy linię z pola węzłowego do następnych pól węzłowych w kolumnie, potem w wierszu i znowu w kolumnie itd., aż do uzyskania połączenia z punktem wyjściowym pola zerowego.

Dla pola zerowego  $x_{12}$  (tab. 3) otrzymamy obwód zamknięty łącząc następujące pola węzłowe: w wierszu  $x_{12}-x_{11}$ , w kolumnie  $x_{11}-x_{41}$ , w wierszu  $x_{41}-x_{43}$ , w kolumnie  $x_{43}-x_{33}$ , w wierszu  $x_{33}-x_{32}$ , w kolumnie  $x_{32}-x_{12}$  (tab. 4).

Tabela 4

	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>3</sub>
S <sub>1</sub>	20		
S <sub>2</sub>		30	
S <sub>3</sub>		5	35
S <sub>4</sub>	25		25
S <sub>5</sub>	15		

Niekiedy dla zamknięcia obwodu wystarczą tylko cztery pola, jak to ma miejsce dla  $x_{13}$ , gdzie obwód zamknięty otrzymujemy z połączeń  $x_{13}-x_{11}-x_{41}-x_{43}$  (tab. 4).

Dla pól zerowych zamkniętych odpowiednim obwodem sporządzamy tabelę z sum algebraicznych odległości, przy czym poszczególnym wartościom liczbowym, zaczynając zawsze od pola zerowego, przyporządkowujemy na przemian znak dodatni i ujemny (tab. 5).

Dalszym krokiem w metodzie rozmieszczeń jest analizowanie obwodów zamkniętych dla poszczególnych pól zerowych. Do poprawienia planu rejonizacji dostaw drewna wybieramy tylko obwody ujemne, a z nich jeden o maksymalnej wartości bezwzględnej. W obwodzie tym znajdujemy najmniejszą wielkość ładunku drewna występującą ze znakiem ujemnym, którą z kolei dodajemy do ładunków drewna zalegających we wszystkich dodatnich polach danego obwodu i odejmujemy od wszystkich wartości ujemnych pól. Oznacza to, że poza zmianą wielkości ładunków drewna w odpowiednich polach obwodu, dotychczas wolne pole zerowe otrzymało pewien ładunek drewna o wielkości pola z najmniejszą ujemną wartością liczbową, które z kolei stało się polem zerowym. W ten sposób doszliśmy do nowego planu rozmieszczeń spediowanych ładunków drewna ze składnic do zakładów odbiorczych.

W planie tym została zmniejszona liczba tona-kilometrów o iloczyn

Pole zerowe		Pola węzłowe										Suma
+		-		+		-		+		-		
s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	
x <sub>12</sub>	53	x <sub>11</sub>	40	x <sub>41</sub>	49	x <sub>43</sub>	26	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19	+59
x <sub>13</sub>	28	x <sub>11</sub>	40	x <sub>41</sub>	49	x <sub>43</sub>	26					+11
x <sub>21</sub>	22	x <sub>22</sub>	31	x <sub>32</sub>	19	x <sub>33</sub>	42	x <sub>43</sub>	26	x <sub>41</sub>	49	-55
x <sub>23</sub>	48	x <sub>22</sub>	31	x <sub>32</sub>	19	x <sub>33</sub>	42					-7
x <sub>31</sub>	33	x <sub>33</sub>	42	x <sub>43</sub>	26	x <sub>41</sub>	49					-32
x <sub>42</sub>	25	x <sub>43</sub>	26	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19					+22
x <sub>52</sub>	42	x <sub>51</sub>	32	x <sub>41</sub>	49	x <sub>43</sub>	26	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19	+56
x <sub>53</sub>	30	x <sub>51</sub>	32	x <sub>41</sub>	49	x <sub>43</sub>	26					+21

s = symbol

przemieszczanego ładunku drewna i jego sumy odległości zamkniętego obwodu.

Dla przykładu podaje się, że w tabeli 3 największą bezwzględną wartość (-55) z liczb ujemnych ma obwód zaczynający się od zerowego pola o symbolu x<sub>21</sub>. Natomiast najmniejszą ujemną wartość liczbową ładunku drewna w tym obwodzie posiada pole x<sub>41</sub>, który wynosi 25 000 ton drewna. Stosownie do przyjętej metodyki przemieszczania ładunków w pole oznaczone symbolem x<sub>21</sub> wpisujemy 25 000 i następnie naprzemian odejmujemy i dodajemy powyższą wartość od kolejnych pól x<sub>22</sub>, x<sub>32</sub>, x<sub>33</sub>, x<sub>43</sub>, x<sub>41</sub> (tab. 6). W ten sposób doszliśmy do nowego planu bardziej zbliżonego od poprzedniego do rozwiązania optymalnego, które nazwiemy II iteracją (tab. 6).

Rozmieszczenie ładunków w każdym nowym planie musi być zgodne z podanymi w równaniach 1, 3 i 4 ograniczeniami.

Liczba tono-kilometrów (P) dla drugiego planu rejonizacji przewozu drewna wynosi:

$$P_2 = l_{11}x_{11} + l_{21}x_{21} + l_{22}x_{22} + l_{32}x_{32} + l_{33}x_{33} + l_{43}x_{43} + l_{51}x_{51}$$

$$P_2 = 4\,275\,000 \text{ tono-kilometrów.}$$

Różnica pomiędzy planem I i II iteracji wynosi:

$$P_1 - P_2 = 5\,650\,000 - 4\,275\,000 = 1\,375\,000 \text{ tono-kilometrów.}$$

Liczbę tę otrzymamy również z iloczynu sumy odległości (-55, tab. 5) obwodu zamkniętego pola zerowego x<sub>21</sub> o największej bezwzględnej ujemnej wartości i przemieszczanego w tym obwodzie ładunku drewna (25 000 ton, pole x<sub>41</sub>, tab. 6).

Tabela 6

Składnice	Zakłady odbiorcze						Tys. ton
	Z <sub>1</sub>		Z <sub>2</sub>		Z <sub>3</sub>		
	km	tys. ton	km	tys. ton	km	tys. ton	
S <sub>1</sub>	40	20	53		28		20
S <sub>2</sub>	22	25	31	5	48		30
S <sub>3</sub>	33		19	30	42	10	40
S <sub>4</sub>	49		25		26	50	50
S <sub>5</sub>	32	15	42		30		15
		60		35		60	155

W celu dalszego ulepszenia planu II iteracji postępujemy według metody podanej dla planu wyjściowego, tj.:

a) przeprowadzamy analizę  $(m-1) \cdot (n-1)$  pól tzw. zerowych sporządzając tabelę ich zamkniętych obwodów (tab. 7),

b) jeżeli wystąpią wartości ujemne w sumach obwodów pól zerowych, wówczas do dalszej analizy wybieramy tylko jeden obwód o największej ujemnej wartości bezwzględnej ( $-44$ , tab. 7),

c) sporządzamy następnie nowy plan rozmieszczeń ładunków drewna (tab. 8), przemieszczając w analizowanym obwodzie zamkniętego pola zerowego ładunek drewna o najmniejszej wartości liczbowej pola ujemnego, który dodajemy do ładunków drewna umieszczonych w polach dodatnich i odejmujemy od ujemnych pól odnośnego obwodu,

Tabela 7

Pole zerowe		Pola węzłowe										Suma
+		-		+		-		+		-		
s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	
x <sub>12</sub>	53	x <sub>11</sub>	40	x <sub>21</sub>	22	x <sub>22</sub>	31					+ 4
x <sub>13</sub>	28	x <sub>11</sub>	40	x <sub>21</sub>	22	x <sub>22</sub>	31	x <sub>32</sub>	19	x <sub>33</sub>	42	-44
x <sub>23</sub>	48	x <sub>22</sub>	31	x <sub>32</sub>	19	x <sub>33</sub>	42					- 6
x <sub>31</sub>	33	x <sub>32</sub>	19	x <sub>22</sub>	31	x <sub>21</sub>	22					+22
x <sub>41</sub>	49	x <sub>43</sub>	26	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19	x <sub>22</sub>	31	x <sub>21</sub>	22	+55
x <sub>42</sub>	25	x <sub>43</sub>	26	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19					+22
x <sub>52</sub>	42	x <sub>51</sub>	32	x <sub>21</sub>	22	x <sub>22</sub>	31					+ 1
x <sub>53</sub>	30	x <sub>51</sub>	32	x <sub>21</sub>	22	x <sub>22</sub>	31	x <sub>32</sub>	19	x <sub>33</sub>	42	-34

Składnice	Zakłady odbiorcze						Tys. ton
	Z <sub>1</sub>		Z <sub>2</sub>		Z <sub>3</sub>		
	km	tys. ton	km	tys. ton	km	tys. ton	
S <sub>1</sub>	40	15	53		28	5	20
S <sub>2</sub>	22	30	31		48		30
S <sub>3</sub>	33		19	35	42	5	40
S <sub>4</sub>	49		25		26	50	50
S <sub>5</sub>	32	15	42		30		15
		60		35		60	155

d) dalszy tok postępowania powtarza się od pkt. a. Rozwiązanie danego zadania uważamy za zakończone, jeżeli poszczególne sumy zamkniętych obwodów pól zerowych osiągną wartość dodatnią. Oznacza to, że otrzymany plan jest rozwiązaniem optymalnym.

Z tabeli 7 wynika, że plan zawarty w tabeli 6 nie jest optymalnym rozwiązaniem, ponieważ trzy jego obwody zamknięte pól zerowych ( $x_{13}$ ,  $x_{23}$  i  $x_{33}$ ) mają sumy ujemne. Do poprawienia powyższego planu bierzemy pod uwagę zamknięty obwód pola zerowego  $x_{13}$ , z którego najmniejszą wartość liczbową pola ujemnego (5 000 ton, pole  $x_{22}$ , tab. 7) przenosimy do odpowiednich pól według znanej nam już zasady. Otrzymujemy w ten sposób nowe rozwiązanie o zmniejszonej liczbie tonokilometrów o  $5\,000 \cdot 44 = 220\,000$ .

Kolejny plan, który nazwiemy III iteracją (tab. 8) wynosi:  
 $P_3 = l_{11}x_{11} + l_{13}x_{13} + l_{21}x_{21} + l_{32}x_{32} + l_{33}x_{33} + l_{43}x_{43} + l_{51}x_{51}$   
 $P_3 = 4\,055\,000$  tonokilometrów.

Różnica pomiędzy planem II i III iteracji wynosi:  
 $P_2 - P_3 = 4\,275\,000 - 4\,055\,000 = 220\,000$  tonokilometrów.

W celu stwierdzenia, czy III iteracja zawarta w tabeli 8 stanowi optymalne rozwiązanie, sporządzamy tabelę zamkniętych obwodów pól zerowych (tab. 9).

Z tabeli 9 wynika, że III iteracja nie jest planem optymalnym, ponieważ suma zamkniętego obwodu pola zerowego  $x_{31}$  jest ujemna.

W celu poprawienia powyższego planu przenosimy 5 000 ton, tj. najmniejszy ładunek drewna znajdujący się w ujemnym polu obwodu zerowego  $x_{31}$  dodając go do wszystkich pól dodatnich tego obwodu oraz odejmując od pól ujemnych.

Otrzymane kolejne rozwiązanie jest IV iteracją (tabela 10), dla którego liczba tonokilometrów wynosi:

$P_4 = l_{11}x_{11} + l_{13}x_{13} + l_{21}x_{21} + l_{31}x_{31} + l_{32}x_{32} + l_{43}x_{43} + l_{51}x_{51}$   
 $P_4 = 3\,950\,000$  tonokilometrów.

Dla IV iteracji (tab. 10), podobnie jak w poprzednich przypadkach przeprowadzamy analizę  $(m-1) \cdot (n-1)$  pól zerowych sporządzając tabelę ich zamkniętych obwodów (tab. 11).

Z tabeli 11 wynika, że sumy wszystkich obwodów zamkniętych pól



Tabela 9

Pole zerowe		Pola węzłowe										Suma
+		-		+		-		+		-		
s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	
x <sub>12</sub>	53	x <sub>13</sub>	28	x <sub>23</sub>	42	x <sub>22</sub>	19					+48
x <sub>22</sub>	31	x <sub>21</sub>	22	x <sub>11</sub>	40	x <sub>13</sub>	28	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19	+44
x <sub>23</sub>	48	x <sub>21</sub>	22	x <sub>11</sub>	40	x <sub>13</sub>	28					+38
x <sub>31</sub>	33	x <sub>33</sub>	42	x <sub>13</sub>	28	x <sub>11</sub>	40					-21
x <sub>41</sub>	49	x <sub>43</sub>	26	x <sub>13</sub>	28	x <sub>11</sub>	40					+11
x <sub>42</sub>	25	x <sub>43</sub>	26	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19					+32
x <sub>52</sub>	42	x <sub>51</sub>	32	x <sub>11</sub>	40	x <sub>13</sub>	28	x <sub>33</sub>	42	x <sub>32</sub>	19	+45
x <sub>53</sub>	30	x <sub>51</sub>	32	x <sub>11</sub>	40	x <sub>13</sub>	28					+10

Tabela 10

Składnice	Zakłady odbiorcze						Tys. ton
	Z <sub>1</sub>		Z <sub>2</sub>		Z <sub>3</sub>		
	km	tys. ton	km	tys. ton	km	tys. ton	
S <sub>1</sub>	40	10	53		28	10	20
S <sub>2</sub>	22	30	31		48		30
S <sub>3</sub>	33	5	19	35	42		40
S <sub>4</sub>	49		25		26	50	50
S <sub>5</sub>	32	15	42		30		15
		60		35		60	155

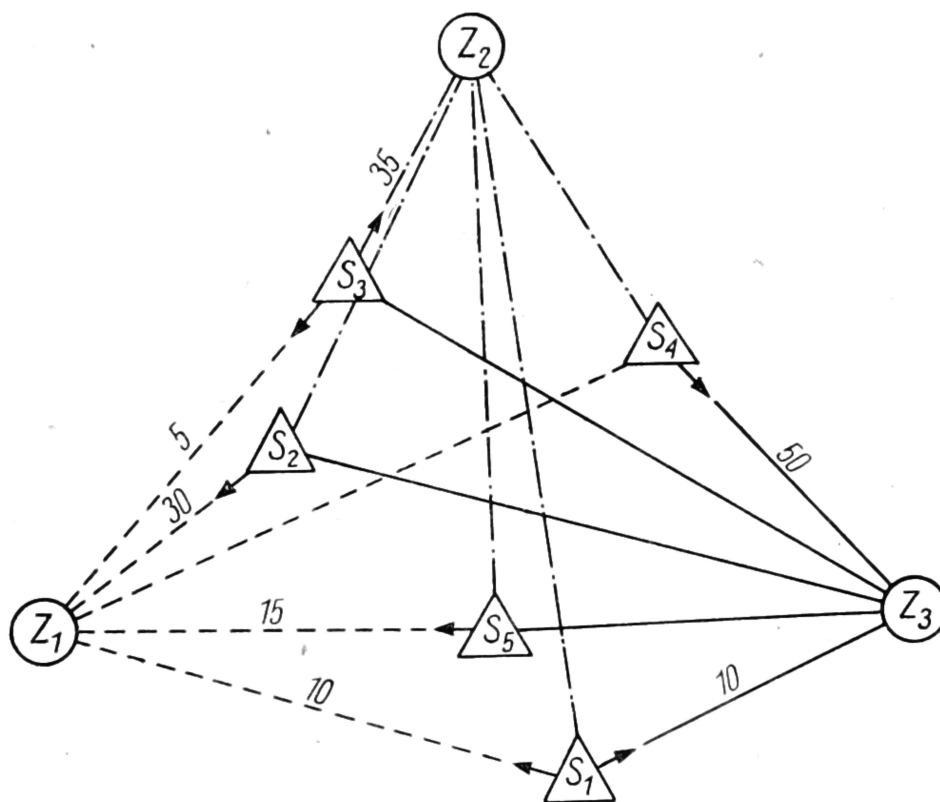
zerowych są dodatnie. Oznacza to, że w IV iteracji osiągnięto najkorzystniejsze rozmieszczenie spedycji drewna. Schemat najwłaściwszej rejonizacji dostaw drewna ze składnic spedycyjnych do zakładów odbiorczych przedstawiono na ryc. 2.

Z przeprowadzonej analizy wyników uzyskanych za pomocą programowania liniowego wynika, że w drodze kolejnych przybliżeń do rozwiązania optymalnego uzyskano ostatecznie obniżenie liczby tonokilometrów o 30% w odniesieniu do planu wyjściowego.

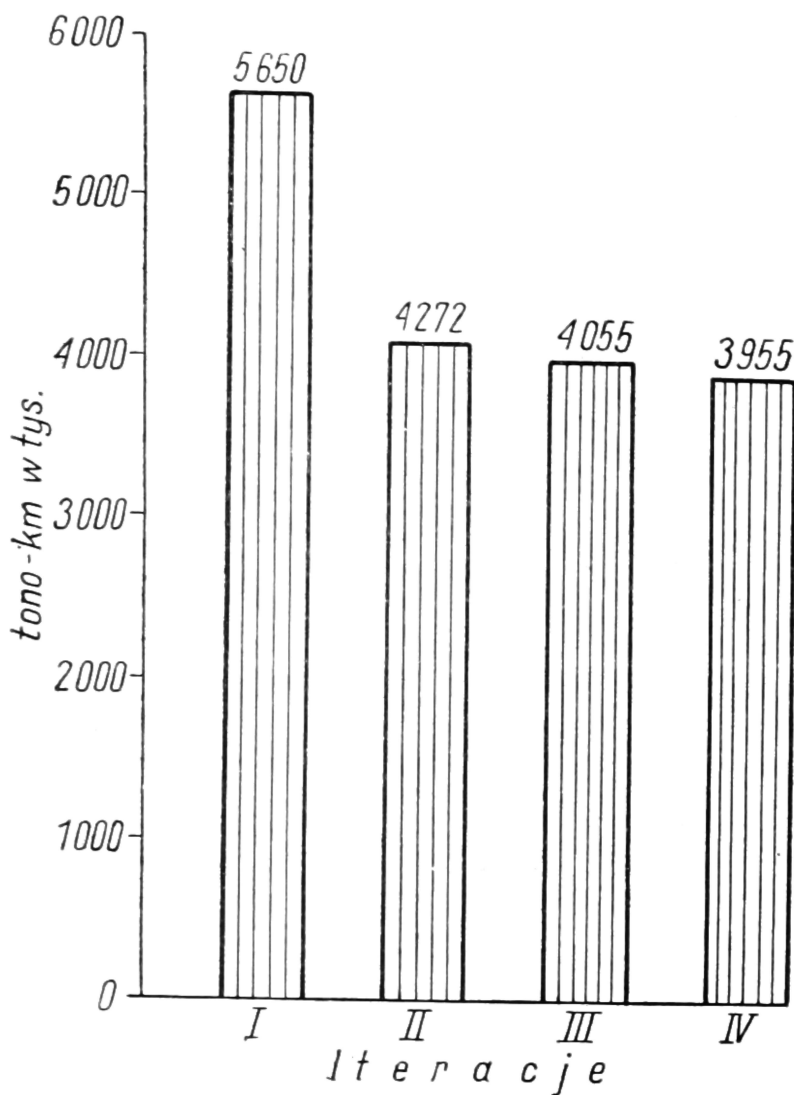
Dla lepszego zobrazowania korzyści wpływających ze stosowania rachunku programowania liniowego, otrzymane wyniki przedstawiono graficznie na ryc. 3 i 4, z których między innymi wynika, że każdy następny plan ma korzystniejsze od poprzedniego rozwiązanie.



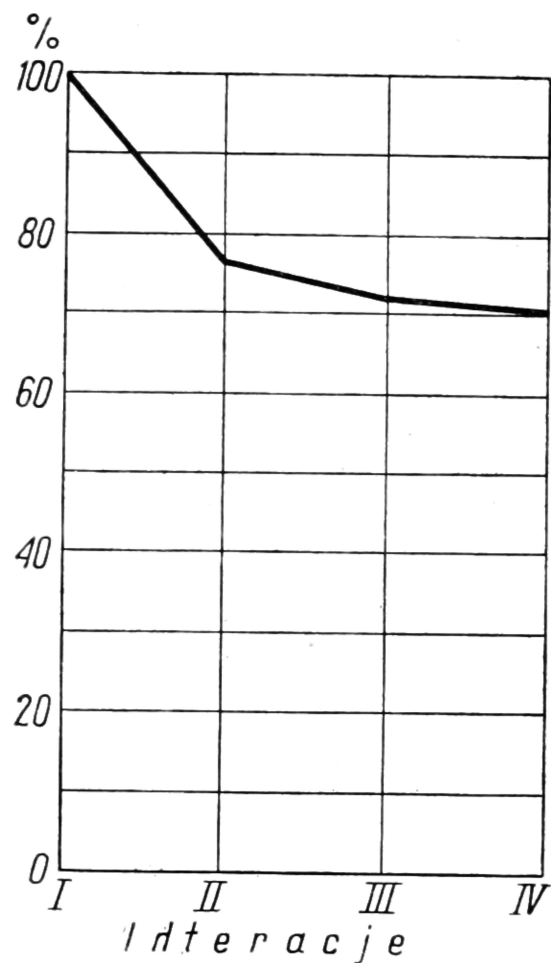
Pole zerowe		Pola węzłowe										Suma
+		-		+		-		+		-		
s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	s	km	
x <sub>12</sub>	53	x <sub>11</sub>	40	x <sub>31</sub>	33	x <sub>32</sub>	19					+27
x <sub>22</sub>	31	x <sub>21</sub>	22	x <sub>31</sub>	33	x <sub>32</sub>	19					+23
x <sub>23</sub>	48	x <sub>21</sub>	22	x <sub>11</sub>	40	x <sub>13</sub>	28					+38
x <sub>33</sub>	42	x <sub>31</sub>	33	x <sub>11</sub>	40	x <sub>13</sub>	28					+21
x <sub>41</sub>	49	x <sub>43</sub>	26	x <sub>13</sub>	28	x <sub>11</sub>	40					+11
x <sub>42</sub>	25	x <sub>43</sub>	26	x <sub>13</sub>	28	x <sub>11</sub>	40	x <sub>31</sub>	33	x <sub>32</sub>	19	+ 1
x <sub>52</sub>	42	x <sub>51</sub>	32	x <sub>31</sub>	33	x <sub>32</sub>	19					+24
x <sub>53</sub>	30	x <sub>51</sub>	32	x <sub>11</sub>	40	x <sub>13</sub>	28					+10



Ryc. 2. Optymalne rozwiązanie kierunków dostaw i wielkości ładunków drewna w tysiącach ton spediowanych ze składnik (S) do zakładów odbiorczych (Z).



Ryc. 3. Ogólna liczba tono-kilometrów kolejnych planów rejonizacji spedycji drewna ze składnic do zakładów odbiorczych.



Ryc. 4. Procentowy udział tono-kilometrów poszczególnych rozwiązań, według metody programowania liniowego, w stosunku do planu wyjściowego.

Omówiona w artykule metoda rozmieszczeń może być również stosowana przy ustalaniu optymalnych rozwiązań przewozu drewna z lasu do składnic lub bezpośrednio do zakładów odbiorczych oraz w innych dziedzinach nie tylko związanych z problemem transportu drewna.

#### LITERATURA

1. Barasow A. S. — Co to jest programowanie liniowe. Warszawa, 1961.
2. Czerwiński Z. — Wstęp do teorii programowania liniowego z elementami algebry wyższej. Poznań 1961.
3. Fromer R., Kamiński E. — Rozwój postępu technicznego w państwowym gospodarstwie leśnym w latach 1961—1965. „Sylwan”, nr 5, 1961.
4. Habr J. — Programowanie liniowe. Warszawa 1964.
5. Kantorowicz L. — Rachunek ekonomiczny optymalnego wykorzystania zasobów. Warszawa 1961.
6. Sadowski W. — Teoria podejmowania decyzji. Warszawa 1960.
7. Novotný M. — Matematické metody v řízení lesního hospodářství. Lesnicka Práce, nr 9, 1963.

8. Schmidt K h. — Zur Anwendung von Methoden der linearen Programmierung in der Planung der Staatlichen Forstwirtschaftsbetriebe. Die Sozialistische Forstwirtschaft, nr 6, 1962.

Praca wpłynęła do Komitetu Redakcyjnego 15 sierpnia 1964 r.

### Краткое содержание

Перевозки грузов древесины с нижних складов к предприятиям-потребителям не всегда проходят способом, учитывающим принцип минимальных капиталовложений, а также не всегда основываются на экономическом расчёте, подтверждающим, что определённый план вывозки даёт оптимальное решение.

Для дальнейшего, более внимательного анализа районизации поставок грузов древесины, основанного на критерии минимализации общего числа тонно-километров, представлена возможность применения одного из методов линейного программирования, называемого методом распределений.

В работе даётся методика размещения математического примера линейного программирования, а также способ его решения на примере  $m$  — складов, отправляющих  $a_i$  древесины на  $n$  предприятия — потребители, которым поставляется  $b_j$  единиц одних и тех же сортиментов.

Из приведённого анализа результатов полученных при помощи линейного программирования вытекает, что путём очередных приближений к оптимальному решению в приведённом примере было получено снижение числа тонно-километров на 30%, по сравнению с первоначальным планом (рис. 3 и 4).

Полученные результаты указывают на пригодность метода распределений для установления соответствующей районизации вывозки древесины со складов на предприятия-потребители.

Описанная методика оптимализации решений при помощи линейного программирования может найти применение также и в других отраслях лесного хозяйства, где существуют возможности альтернативного принятия решений.

### Summary

Wood load transport from expeditionary depots to woodworking factories is not always concordant with the method observing the principle of the least expenditure of means. It is not based also upon economic account stating that the definite dispatch plan yields an optimal solution. For the sake of further, keener analysis of regional distribution of wood load supplies, based upon the criterion of the minimization of the total number of ton-kilometers, there was presented the possibility of the application of one of linear programming methods, called spacing method.

In the paper a method for mathematic model lay-out for linear programming is given as well as the way of its solution on an example of  $m$  depots dispatching  $a_1$  wood to  $n$  woodworking plants, to which  $b_j$  units of the same assortments are being delivered.

From carried out analysis of results obtained with the aid of linear programming it results that on the way of successive approximations to the optimum solution there was reached in the cited example the reduction in ton-kilometre number by 30% when compared with an initial plan (fig. 3 and 4).

Obtained results indicate the usability of the spacing method for the determination of proper regional distribution of wood dispatch from depots to woodworking factories.

Described method of optimum solutions with the aid of linear programming may be also applied in other fields of forest management, in which there exist possibilities of alternative decisions.