

## ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА ИЗМЕНЕНИЯ ВЫЛЕТА БАШЕННОГО КРАНА С ШАРНИРНО-СОЧЛЕНЕННОЙ СТРЕЛОВОЙ СИСТЕМОЙ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ

*Вячеслав Ловейкин, Александр Шевчук*

*Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины*

*Украина, г. Киев, ул. Героев Обороны, 15*

*Vyacheslav Loveykin, Oleksandr Shevchuk*

*National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine*

*Str. Heroiv Oborony, 15, Kiev, Ukraine*

**Аннотация.** Решена вариационная задача определения оптимального режима движения совместной работы двух механизмов грузоподъемной машины. Движение механизмов описывается системой дифференциальных уравнениями второго порядка. Результаты проиллюстрированы графическими зависимостями.

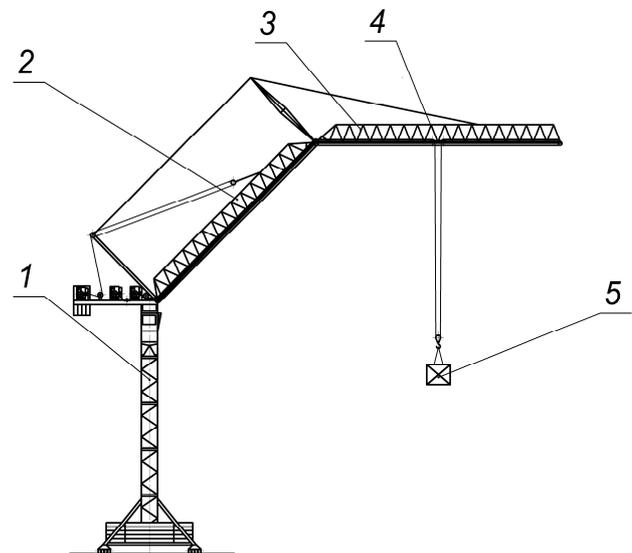
**Ключевые слова:** башенный кран, оптимизация движения, уравнение Эйлера-Пуассона, функционал, метод коллокаций.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Башенный кран с шарнирно-сочлененной стреловой системой (рис. 1) используется для высотного строительства [1].

Стреловая система таких кранов состоит с основной – 2 и вспомогательной – 3 секций, которые шарнирно соединены между собой. Основная секция поворачивается относительно башни – 1. Вспомогательная секция сохраняет горизонтальное положение за счет присоединенного четырех звеньев механизма. Вдоль вспомогательной секции передвигается грузовая тележка – 4. Изменения вылета таких кранов выполняется как при отдельной работе механизмов передвижения стреловой системы и грузовой тележки, так и при совместной работе этих механизмов. Во время работы механизмов башенного крана, в переходных режимах движения (разгон, торможение) возникают значительные динамические нагрузки [2–9]. Они передаются на детали механизмов и на металлоконструкцию крана и влияют на безопасность эксплуатации и надежность всей системы. Кроме этого, при работе механизмов, возникают маятниковые колебания гру-

за, которые снижают продуктивность и надежность работы крана.



**Рис. 1.** Башенный кран с шарнирно-сочлененной стреловой системой: 1 – башня; 2 – основная секция стреловой системы; 3 – вспомогательная секция стреловой системы; 4 – грузовая тележка; 5 – груз  
**Fig. 1.** Articulated jib of tower crane: 1 – tower; 2 – jib foot; 3 – jib head; 4 – trolley; 5 – payload

Для минимизации динамических нагрузок, а также устранения колебаний груза необходимо провести оптимизацию режимов движения механизмов башенного крана.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Оптимизации режимов движения механизмов грузоподъемных машин посвящено много работ [10–14]. Так, например, в статье [11] определены оптимальные режимы движения механизма изменения вылета, кото-

## ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА ИЗМЕНЕНИЯ ВЫЛЕТА БАШЕННОГО КРАНА С ШАРНИРНО-СОЧЛЕНЕННОЙ СТРЕЛОВОЙ СИСТЕМОЙ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ

рые минимизируют отклонения гибкого подвеса груза от вертикали. В работе [12] приведен способ уменьшения колебаний груза на гибком подвесе при работе механизма поворота стрелового крана во время переходных процессов путем оптимизации режима пуска и торможения по динамическому критерию. В статье [13] решена вариационная задача определения оптимального режима движения механизма грузоподъемной машины с электроприводом постоянного тока. В работе [14] выполнено моделирование движения мостового крана где оптимальное приводное усилие крана реализовано способом частотного регулирования электродвигателя. Проведена оценка эффективности оптимального управления по энергетическим, электрическим, динамическим и кинетическим показателям. Установлены рациональные настройки привода для качественной реализации оптимального управления. Опираясь на ранее проведенные исследования, предложено провести оптимизацию режима изменения вылета башенного крана с шарнирно-сочлененной стреловой системой по энергетическому критерию.

### ЦЕЛЬ РОБОТЫ

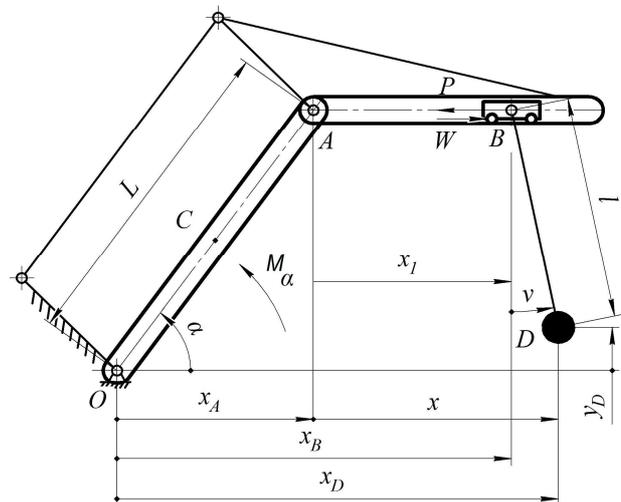
Цель работы заключается в определении оптимального режима изменения вылета башенного крана с шарнирно-сочлененной стреловой системой при совместной работе механизмов подъема стреловой системы и перемещений грузовой тележки, при котором будут минимизированы энергетические расходы и устранятся колебания груза.

Для достижения поставленной цели ставятся такие задачи: 1) провести математическое моделирование процесса изменения вылета; 2) решить вариационную задачу по минимизации энергетического критерия; 3) проанализировать полученные результаты и оценить эффективность практического использования оптимального закона движения.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для проведения исследования используем динамическую модель изменения вылета башенного крана с шарнирно-сочлененной стреловой системой (рис. 2), которая показана

на рис. 2. За обобщенные координаты приняты:  $\alpha$  – угловая координата перемещения основной секции стреловой системы;  $x_1$ ,  $x$  – линейные координаты перемещения центров масс грузовой тележки и груза соответственно.



**Рис. 2.** Динамическая модель изменения вылета башенного крана с шарнирно-сочлененной стреловой системой

**Fig. 2.** Dynamic model of luffing articulated jib of tower crane

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы:

$$T = \frac{1}{2} [J_0 + (m_0 + m_1 + m)L^2] \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}_1^2 + m \dot{x}^2 - 2L(m_1 \dot{x}_1 + m \dot{x}) \dot{\alpha} \sin \alpha], \quad (1)$$

$$\Pi = \left( \frac{m_C}{2} + m_0 + m_1 + m \right) gL \sin \alpha - mgl \cos\left(\frac{x - x_1}{l}\right), \quad (2)$$

где:  $J_0$  – момент инерции основной секции стреловой системы относительно оси вращения;  $m_C$ ,  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m$  – массы основной и вспомогательной секций стреловой системы, грузовой тележки и груза соответственно;  $L$  – длина основной секции стреловой системы;  $l$  – длина подвеса груза;  $g$  – ускорение свободного падения.

Составим уравнения движения, используя уравнения Лагранжа второго рода, которые запишутся так:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_{\alpha} - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_{x_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x - \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \end{cases} \quad (3)$$

где:  $Q_{\alpha}, Q_{x_1}, Q_x$  – обобщенные силы, которые соответствуют обобщенным координатам  $\alpha$ ,  $x_1$ ,  $x$  соответственно. С рис. 2 видно что  $Q_{\alpha} = M_{\alpha}$ ;  $Q_{x_1} = P - W$ ;  $Q_x = 0$ .

Определим все составляющие системы уравнений (3) и сделаем математические упрощения, после чего получим дифференциальные уравнения движения, которые соответствуют принятой динамической модели:

$$\begin{cases} [J_0 + (m_0 + m_1 + m)L^2] \ddot{\alpha} - \\ - m_1 L \ddot{x}_1 \sin \alpha - mL \ddot{x} \sin \alpha = \\ = M_{\alpha} - \left(\frac{m_c}{2} + m_0 + m_1 + m\right)gL \cos \alpha, \\ m_1 \ddot{x}_1 - m_1 L \ddot{\alpha} \sin \alpha - m_1 L \dot{\alpha}^2 \cos \alpha = \\ = P - W + mg \frac{x - x_1}{l}, \\ m \ddot{x} - mL \ddot{\alpha} \sin \alpha - mL \dot{\alpha}^2 \cos \alpha = \\ = -mg \frac{x - x_1}{l}. \end{cases} \quad (4)$$

С третьего уравнения системы (4) запишем:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{l}{g} \ddot{x} - \frac{lL}{g} \ddot{\alpha} \sin \alpha - \frac{lL}{g} \dot{\alpha}^2 \cos \alpha; \\ \dot{x}_1 &= \dot{x} + \frac{l}{g} \dot{\ddot{x}} - \frac{lL}{g} [(\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^3) \sin \alpha - 3\dot{\alpha} \ddot{\alpha} \cos \alpha], \\ \ddot{x}_1 &= \ddot{x} + \frac{l}{g} \dot{x}^{IV} - \frac{lL}{g} [(\alpha^{IV} + 6\dot{\alpha}^2 \ddot{\alpha}) \sin \alpha + \\ &+ (\dot{\alpha}^4 - 2\dot{\alpha} \ddot{\alpha} - 3\ddot{\alpha}^2) \cos \alpha], \\ mg \frac{x - x_1}{l} &= m[L \ddot{\alpha} \sin \alpha + L \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \ddot{x}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (5) описывают зависимости между перемещениями скоростями и ускорениями грузовой тележки и груза.

Подставим выражения (5) в систему (4) в результате чего получим:

$$\begin{cases} M_{\alpha} = [J_0 + (m_0 + m_1 + m)L^2] \ddot{\alpha} - \\ - \left\{ (m_1 + m) \ddot{x} + \frac{m_1 l}{g} [x^{IV} + \right. \\ + (\alpha^{IV} + 6\dot{\alpha}^2 \ddot{\alpha})L \sin \alpha + \\ + (\dot{\alpha}^4 - 2\dot{\alpha} \ddot{\alpha} - 3\ddot{\alpha}^2) \cdot \\ \cdot L \cdot \cos \alpha \left. \right\} L \sin \alpha + \\ + \left(\frac{m_c}{2} + m_0 + m_1 + m\right)gL \cos \alpha, \\ P = W + (m_1 + m)[\ddot{x} - \\ - (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)L] + \\ + \frac{m_1 l}{g} \left\{ x^{IV} + [(\alpha^{IV} + 6\dot{\alpha}^2 \ddot{\alpha}) \sin \alpha + \right. \\ \left. + (\dot{\alpha}^4 - 2\dot{\alpha} \ddot{\alpha} - 3\ddot{\alpha}^2) \cos \alpha \right\} L \left. \right\}. \end{cases} \quad (6)$$

За критерий оптимизации примем энергетические затраты на работу двух механизмов при изменении вылета:

$$I = \left[ \frac{1}{T} \int_0^{t_1} (M_{\alpha} \dot{\alpha} + P \dot{x}_1)^2 dt \right]^{1/2} \rightarrow \min. \quad (7)$$

Критерий (7) представляет собой интегральный функционал, условия минимума которого – уравнение Ейлера-Пуассона, которое условно можно записать так:

$$\begin{cases} f(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha^{IV}, \alpha^V, \alpha^{VI}) = 0, \\ u(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \alpha^{IV}, \alpha^V, \alpha^{VI}, \\ \ddot{x}, \ddot{x}, x^{IV}, x^V, x^{VI}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Уравнения системы (8) представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения шестого порядка с переменными коэффициентами.

Для решения такой системы можно использовать приближенные численно-аналитические методы (методы Рунге, Галлеркина, коллокаций и др.).

В этих методах решения находится в виде базисных функций, которые соответствуют заданным граничным условиям.

Из за невозможности интегрирования функций, входящих в систему уравнений (6) в аналитическом виде, в первых двух методах, наиболее удобным следует признать метод коллокаций [16-20].

Для составления базисных функций сначала определим граничные условия, которые устраняют колебания груза.

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_1 = 0, \\ \Delta \dot{x} &= \dot{x} - \dot{x}_1 = 0, \\ \Delta \ddot{x} &= \ddot{x} - \ddot{x}_1 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

С уравнений (5) можно записать:

$$\begin{cases} \Delta x = 0: \dot{\alpha} = 0; \ddot{\alpha} = 0; x = 0, \\ \dot{x} = 0; \ddot{x} = 0, \\ \Delta \dot{x} = 0: \dot{\alpha} = 0; \ddot{\alpha} = 0; \ddot{x} = 0, \\ \Delta \ddot{x} = 0: \alpha^{IV} = 0; x^{IV} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, для устранения колебаний груза в начале и конце движения необходимо чтобы выдерживались по восемь краевых условий для каждой обобщенной координаты:

$$\begin{cases} t = 0: \alpha = \alpha_0; \dot{\alpha} = 0, \\ \ddot{\alpha} = 0; \ddot{\alpha} = 0; \alpha^{IV} = 0, \\ t = T: \alpha = \alpha_T; \dot{\alpha} = 0, \\ \ddot{\alpha} = 0; \ddot{\alpha} = 0; \alpha^{IV} = 0, \\ t = 0: x = x_0; \dot{x} = 0, \\ \ddot{x} = 0; \ddot{x} = 0; x^{IV} = 0, \\ t = T: x = s; \dot{x} = 0, \\ \ddot{x} = 0; \ddot{x} = 0; x^{IV} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где:  $T$  – период движения;  $\alpha_0, x_0, \alpha_T, x_T$  – начальные и конечные значения угловой координаты перемещения основной секции стреловой системы и линейной координаты перемещения центра масс грузовой тележки.

При использовании метода коллокаций решение краевой задачи ищем в виде базисных функций  $\alpha_B, x_B$ , которые являют собой суммы полиномов и удовлетворяют условиям (11):

$$\begin{cases} \alpha_B = f_\alpha + a_i f'_{i_\alpha} + \dots + a_n f'_{n_\alpha}, \\ x_B = f_x + b_i f'_{i_x} + \dots + b_n f'_{n_x}, \end{cases} \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где:  $a_i, b_i$  – коэффициенты коллокаций  $i$ -той точки;  $n$  – количество точек коллокаций;  $f_\alpha, f_x$  – полиномы восьмой степени которые отвечают начальным и конечным условиям движения (11);  $f'_{i_\alpha}, f'_{i_x}$  – производные по времени от полиномов степени  $2(i+4)$ .

Точками коллокации выбираем точки, которые соответствуют моментам времени  $i$   $-\frac{i}{(n+1)T}$ .

Определим коэффициенты коллокации, составив систему уравнений невязок относительно  $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ .

Для этого в уравнения (8) подставим выражения базисных функций (12):

$$\begin{cases} f_i(\alpha_B, \dot{\alpha}_B, \ddot{\alpha}_B, \ddot{\alpha}_B, \alpha_B^{IV}, \\ \alpha_B^V, \alpha_B^{VI}) = 0, \\ u_i(\alpha_B, \dot{\alpha}_B, \ddot{\alpha}_B, \ddot{\alpha}_B, \alpha_B^{IV}, \\ \alpha_B^V, \alpha_B^{VI}, \ddot{x}_B, \ddot{x}_B, x_B^{IV}, x_B^V, x_B^{VI}) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решим систему трансцендентных уравнений (13) численным методом для разного количества точек коллокации.

Для этого зададим численные значения всех параметров:  $T = 17c$ ;  $m_0 = 2500кг$ ;  $m_c = 5500кг$ ;  $m_1 = 500кг$ ;  $m_c = 2000кг$ ;  $L = 26м$ ;  $l = 15м$ ;  $g = 9.81м/с^2$ ;  $w = 1000 Н$ ;  $\alpha_0 = 1,27 рад$ ;  $\alpha_T = \pi/2 рад$ ;  $x_0 = 28м$ ;  $x_T = 0м$ ;  $n = 1, \dots, 7$ .

В результате получим значения коэффициентов коллокации (таблица).

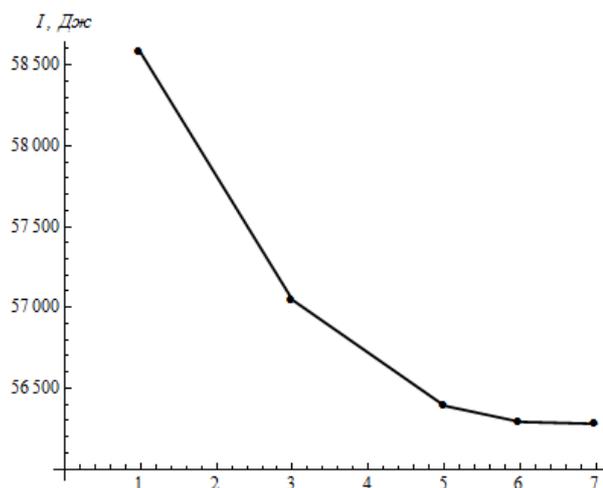


Рис. 3. Значения функционала  $I$   
Fig. 3. Values of the functional  $I$

Определим относительную погрешность значения функционала между соседними точками  $\Delta$ .

**Таблица.** Значения коэффициентов коллокации  
**Table.** Values of the coefficients of the collocation

Значения коэффициентов коллокации							
количество точек коллокации	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
1	-0.52908						
3	-0.91076	-0.43201	-0.16051				
5	-0.56376	0.031622	-0.24260	-0.41948	-0.26097		
6	-0.71025	-0.20064	-0.20796	-0.24179	-0.15935	-0.047268	
7	-0.68578	-0.17240	-0.21375	-0.27147	-0.17632	-0.040665	0.016074
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$
1	-0.52908						
3	-0.91076	-0.43201	-0.16050				
5	-0.80454	-0.30944	-0.18566	-0.12731	-0.098189		
6	-0.80454	-0.30944	-0.18566	-0.12741	-0.093791	-0.076497	
7	-0.80454	-0.30944	-0.18566	-0.12741	-0.093917	-0.072545	-0.057716

Определим значения функционала (7) в зависимости от количества точек коллокации после чего построим график (рис. 3):

$$\begin{aligned} \Delta_{1-3} &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \cdot 100 = \\ &= \frac{58576 - 57046}{58576} \cdot 100 = 2,68\%, \\ \Delta_{3-5} &= \frac{I_3 - I_5}{I_5} \cdot 100 = \\ &= \frac{57046 - 56392}{57046} \cdot 100 = 1,16\%, \\ \Delta_{5-6} &= \frac{I_5 - I_6}{I_5} \cdot 100 = \\ &= \frac{56392 - 56292}{56392} \cdot 100 = 0,18\%, \\ \Delta_{6-7} &= \frac{I_6 - I_7}{I_6} \cdot 100 = \\ &= \frac{56292 - 56280}{56292} \cdot 100 = 0,019\%. \end{aligned} \quad (14)$$

Для определения оптимального режима движения достаточно выбрать функцию с шестью коэффициентами невязок, поскольку относительная погрешность после шестой точки (рис. 3) значительно уменьшается.

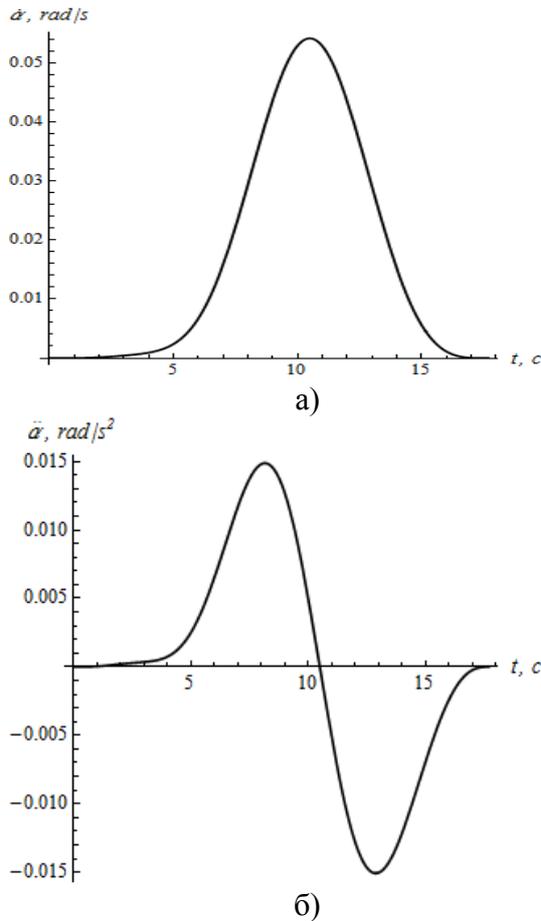
Запишем оптимальные законы движения для стреловой системы и грузовой тележки:

$$\begin{aligned} \alpha_B &= \alpha_0 - \\ &- \left( \frac{70t^4 - 315t^3T + 540t^2T^2 - 420tT^3 + 126T^4}{T^9} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{(\alpha_0 - \alpha_T)t^5}{T^9} + \\ &+ a_1 \left( \frac{2772t^5(t-T)^5(\alpha_0 - \alpha_T)}{T^{11}} \right) + \\ &+ a_2 \left( -\frac{12012t^6(t-T)^6(\alpha_0 - \alpha_T)}{T^{13}} \right) + \\ &+ a_3 \left( \frac{51480t^7(t-T)^7(\alpha_0 - \alpha_T)}{T^{15}} \right) + \\ &+ a_4 \left( -\frac{218790t^8(t-T)^8(\alpha_0 - \alpha_T)}{T^{17}} \right) + \\ &+ a_5 \left( \frac{923780t^9(t-T)^9(\alpha_0 - \alpha_T)}{T^{19}} \right) \\ &+ a_6 \left( -\frac{3879876t^{10}(t-T)^{10}(\alpha_0 - \alpha_T)}{T^{21}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} x_B &= x_0 - \\ &\left( \frac{70t^4 - 315t^3T + 540t^2T^2 - 420tT^3 + 126T^4}{T^9} \right) \cdot \\ &\cdot \frac{(x_0 - x_T)t^5}{T^9} + \\ &+ b_1 \left( \frac{2772t^5(t-T)^5(x_0 - x_T)}{T^{11}} \right) + \\ &+ b_2 \left( -\frac{12012t^6(t-T)^6(x_0 - x_T)}{T^{13}} \right) + \\ &+ b_3 \left( \frac{51480t^7(t-T)^7(x_0 - x_T)}{T^{15}} \right) + \\ &+ b_4 \left( -\frac{218790t^8(t-T)^8(x_0 - x_T)}{T^{17}} \right) + \\ &+ b_5 \left( \frac{923780t^9(t-T)^9(x_0 - x_T)}{T^{19}} \right) + \\ &+ b_6 \left( -\frac{3879876t^{10}(t-T)^{10}(x_0 - x_T)}{T^{21}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

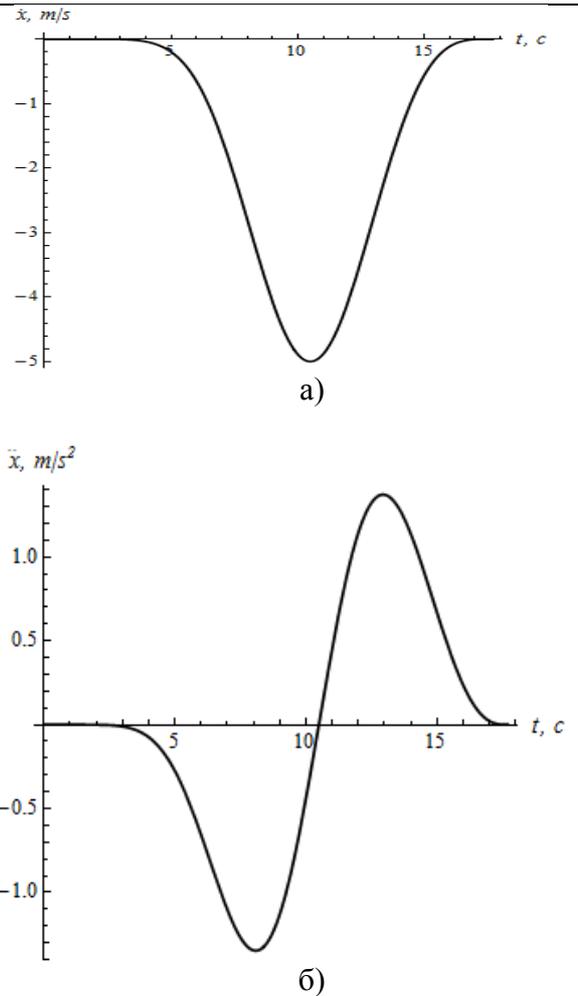
# ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА ИЗМЕНЕНИЯ ВЫЛЕТА БАШЕННОГО КРАНА С ШАРНИРНО-СОЧЛЕНЕННОЙ СТРЕЛОВОЙ СИСТЕМОЙ ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМУ КРИТЕРИЮ

Отообразим графически изменения основных параметров шарнирно-сочлененной стреловой системы в течении всего периода движения. Представленные графические зависимости скоростей и ускорения обобщенных координат (рис. 5 и рис. 6) показывают, что в начальное и конечное значения периода движения скорости и ускорения равны нулю, что делает возможным реализацию оптимального режима движения.

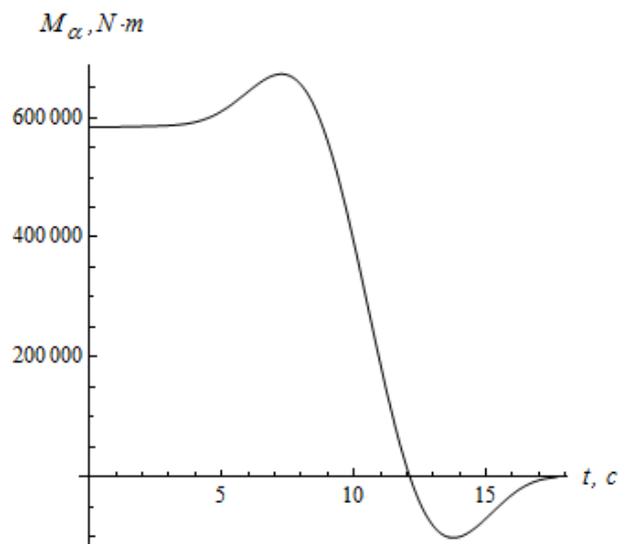


**Рис. 5.** Графики изменения угловых скорости (а) и ускорения (б) основной секции стреловой системы  
**Fig. 5.** The angular velocity (a) and acceleration (б) profiles of the jib foot

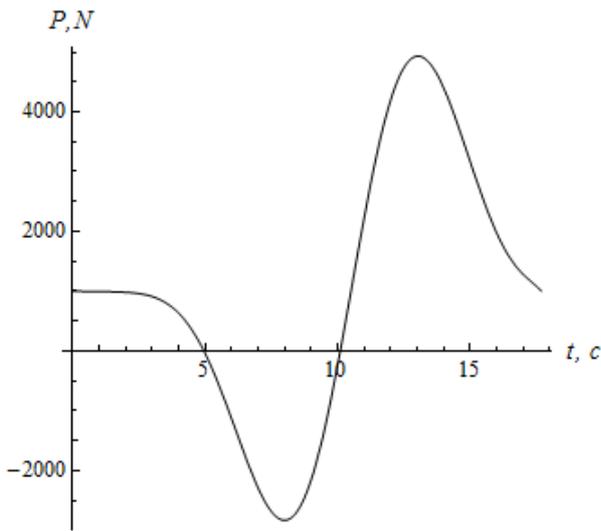
На рис. 7 начальные ненулевые значения движущего момента обусловлено начальным значением момента сопротивления от сил веса стреловой системы, грузовой тележки и груза. На рис. 8 значения движущей силы в начале и в конце графика обусловлены силой статического сопротивления движению грузовой тележки.



**Рис. 6.** Графики изменения линейных скорости (а) и ускорения (б) груза  
**Fig. 6.** The linear velocity (a) and acceleration (б) profiles of the payload

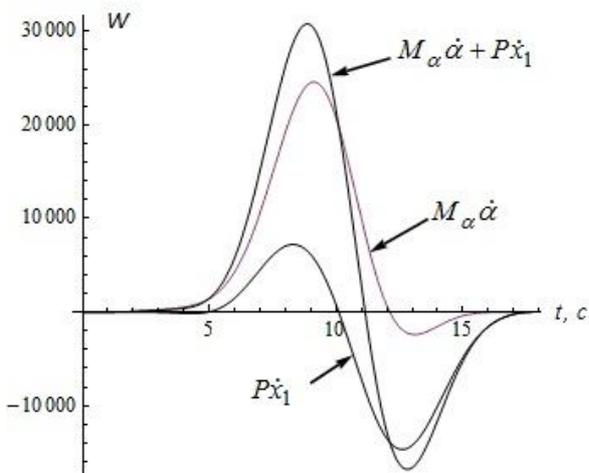


**Рис. 7.** График изменения движущего момента основной секции стреловой системы  
**Fig. 7.** The curve of the jib foot driving moment



**Рис. 8.** График изменения движущей силы грузовой тележки  
**Fig. 8.** The curve of the jib crab driving force

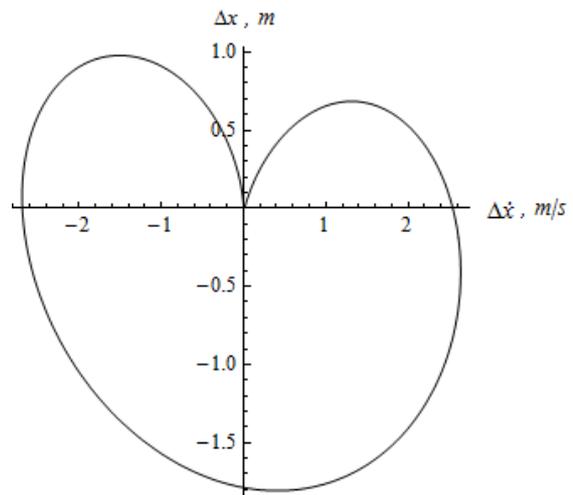
На графиках (рис. 9) видно, что значения мощностей меняют знак, что означает, что потребляемая мощность превращается в генерируемую.



**Рис. 9.** Графики изменения мощностей  
**Fig. 9.** Power curves

Из полученного фазового портрета оптимального движения груза (рис. 10) видно, что в конце периода движения колебания груза устраняются.

Таким образом, использование интегрального критерия, представленного в виде интегрального функционала который отображает среднеквадратическую сумму мощностей приводных механизмов за период движения позволяет снизить энергетические затраты и устранить колебания груза.



**Рис. 10.** Фазовый динамический портрет оптимального движения груза  
**Fig. 10.** Phase dynamic portrait of payload movement

## ВЫВОДЫ

В результате проведенных исследований:

1. Решена оптимизационная задача уменьшения энергетических затрат в процессе изменения вылета башенного крана с шарнирно-сочлененной стреловой системой, которая позволяет снизить энергетические затраты, а также устранить колебания груза в конце периода движения;

2. Полученные результаты проанализированы с помощью графического представления оптимальных законов движения основной секции стреловой системы (15) и грузовой тележки (16), которые осуществляются совместной работой двух механизмов;

3. Для реализации оптимального закона движения, необходимо полученные результаты привести, при помощи операторов передачи движения, непосредственно к приводным электродвигателям;

4. Полученные результаты могут быть использованы при разработке системы управления приводами башенного крана с шарнирно-сочлененной стреловой системой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nevzorov L.A. 1980: Bashennye kраны / L.A. Nevzorov. – К.: Vyssh. Shkola. – 326.

2. Volkov D.P. 1958: Dinamicheskiye nagruzki v universal'nykh ekskavatorakh / D.P Volkov. – M.: Mashgiz. – 268.
3. Grigorov O.V. 2006: Dinamichni navantazhennya u vantazhopidyomnykh mashinakh / Grigorov O.V. – Kh.: NTU «KHPI». – 69.
4. Kazak S.A. 1968: Dynamyka mostovykh kranov / S.A. Kazak. – M.: Mashinostroyeniye. – 332.
5. Lobov N.A. 1987: Dinamika gruzopodyemnykh kranov. / N.A. Lobov M.: Mashinostroyeniye. – 160.
6. Kramarov M.S. 1969: Dinamika mekhanizmov i mashin / M.S. Kramarov M.: Mashinostroyeniye. – 206.
7. Sergeev S.T. 1968: Nadozhnost' i dolgovechnost' pod"yomnykh / S.T. Sergeev – K.: Tekhnika – 238.
8. Kozhevnikov S.N. 1986: Dinamika nestatsionarnykh protsessov v mashinakh / S.N. Kozhevnikov – K.: Nauk, dumka. – 288.
9. Budikov L.Y. 2003: Bahatoparmetrychnyy analiz dynamiky vantazhopidyomnykh kraniv mostovoho typu / L.Y. Budikov – Lugansk: publ EUNU. Dal, 2nd edition – 210.
10. Smekhov A.A. 1975: Optymalnoe upravlenye podemno-transportnykh mashyn / A.A. Smekhov – M.: Mashinostroyeniye – 239.
11. Romasevich Yu.A. 2011: Optimization behavior of variation boom of hoisting crane for singular kinematical criterions / Yu.A. Romasevich, G.V. Shumilov // Motrol. Vol 13b. – 167–173.
12. Loveykin V.S. 2013: Optimizatsiya dinamicheskogo rezhima povorota strelovogo kрана / V.S. Loveykin, V.A. Melnichenko // Motrol. Vol 15. – №3. – 70–75.
13. Loveykin V.S. 2013: Optimizatsiya uravneniya dvizheniya mekhanizmov gruzopod"yemnykh mashin s elektroprivodom postoyannogo toka / V.S. Loveykin, Yu.A. Romasevich // Motrol. Vol 15. – №3. – 65–69.
14. Loveykin V.S. 2012: Optimizatsiya rezhima razgona odnomassovoy dinamicheskoy sistemy s integralnymi ogranicheniyami / V.S. Loveykin, Yu.A. Romasevich // Motrol. Vol 14. – №3. – 158–163.
15. Romasevich Yu.A. 2013: Modelirovaniya dvizheniya mekhanizma peremeshcheniya gruzopodyemnoy mashiny po optimal'nomu zakonu / Yu.A. Romasevich. Motrol. Vol 15. – №3. – 76–83.
16. Vlasov E.A. 2001: Priblizhennyye metody v matematicheskoy fizike / E.A. Vlasov, V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin // M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana. – 700.
17. Formalev V.F. 2004: Chislennyye metody / V.F. Formalev, D.L. Reviznikov // M.: Fizmatlit. – 400.
18. Volkov E.A. 1987: Chislennyye metody / E.A. Volkov. – M.: Nauka. – 248.
19. Horskiy B.E. 1987: Dynamicheskoe sovershenstvovaniye mekhanycheskykh system / B.E. Horskiy – K.: Tekhnika – 200.
20. Loveykin V.S. Modelyu-vannya dynamiky mekhanizmov van-tazhopidyomnykh mashyn / V.S. Loveykin, YU.V. Chovnyuk, M.H. Dikteruk, S.I. Pastushenko. – Kiev-Mykolaiv, 2004. – 285.

#### OPTIMIZATION OF LUFING ARTICULATED JIB OF TOWER CRANE BY ENERGETIC CRITERIA

**Summary.** The optimal mode of motion has been obtained by solving the variation problem. The energetic consumption accepted as criterion of defining the optimum modes of motion. The mechanisms movements described by the third order differential equation.

**Key words:** tower crane, optimization of motion, euler-poisson equation, functional, collocation method.