

Identyfikacja spektrum relaksacji materiałów lepkosprężystych przy silnie zakłóconych danych pomiarowych. Część I: Problem i przykład

Anna Stankiewicz

Katedra Inżynierii Mechanicznej i Automatyki, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie,
Doświadczalna 50 A, 20-280 Lublin, e-mail: anna.m.stankiewicz@gmail.com

Streszczenie. W pracy rozważa się problem wyznaczania ciągłego spektrum relaksacji materiałów liniowo lepkosprężystych na podstawie dyskretnych silnie zakłóconych pomiarów modułu relaksacji. Problem identyfikacji spektrum relaksacji to problem źle uwarunkowany, w którym nawet niewielka zmiana danych doświadczalnych może powodować drastyczną zmianę uzyskanego rozwiązania. Klasycznym remedium jest regularyzacja problemu. Przedstawiono algorytmy aproksymacji spektrum relaksacji skończonymi szeregami funkcji specjalnych (Laguerre'a, Legendre'a, Hermite'a, Czebyszewa) optymalnej w sensie zregularyzowanej metody najmniejszych kwadratów. Podano przykład ilustrujący proces wyznaczania spektrum relaksacji rzeczywistego materiału biologicznego (próbki buraka cukrowego badanego w stanie jednoosiowego odkształcenia) przy silnie zakłóconych pomiarach siły reakcji próbki. Zastosowano algorytmy Laguerre'a i Legendre'a. Pokazano, że zastosowanie wstępnej filtracji danych pomiarowych nie wpływa istotnie na wynik identyfikacji. Analiza teoretyczna odporności badanych algorytmów identyfikacji spektrum relaksacji na zakłócenia pomiarowe jest przedmiotem drugiej części pracy.

Słowa kluczowe: lepkosprężystość, spektrum relaksacji, identyfikacja, szeregi funkcyjne, odporność na zakłócenia, burak cukrowy.

WPROWADZENIE

Zdobycie szczegółowej wiedzy o zjawiskach dynamicznych zachodzących w materiałach jest istotnym etapem projektowania inżynierskiego oraz wstępem do budowy układów sterowania obiektami przemysłowymi [3, 9, 14]. Wiele materiałów posiada zarówno cechy sprężystych ciał stałych jak i cechy lepkich płynów. Nazywamy je materiałami lepkosprężystymi [2, 3, 8, 10]. Jedną z podstawowych cech materiałów sprężystych jest zdolność gromadzenia energii mechanicznej podczas deformacji pod obciążeniem i pełnego uwalniania tej energii po odjęciu obciążenia. Natomiast w lepkich płynach energia mechaniczna zużyta na wywołanie odkształcenia ulega dys-

sypacji. W materiałach o własnościach lepkosprężystych energia mechaniczna jest w różnym stopniu gromadzona i rozpraszana podczas cykli obciążania i odciążania materiału. Do modelowania matematycznego materiałów, w których zachodzą zjawiska gromadzenia i dysypacji energii skutecznie stosowane są modele reologiczne [3, 8, 10]. Modele lepkosprężyste stosuje się do opisu własności wielu materiałów konstrukcyjnych: betonów [10], drewna [4], materiałów kompozytowych [8, 10], metali i ich stopów [10], a przede wszystkim różnorodnych polimerów [2, 8, 10]. Badania prowadzone w ciągu ostatnich kilkadziesiąt lat wykazały, iż są one także skutecznym narzędziem modelowania własności mechanicznych gleby [10, 24] oraz materiałów pochodzenia biologicznego [1, 6, 7, 15, 18, 24].

Wielu autorów [10, 12] zwraca uwagę, że pełną informację o własnościach mechanicznych materiałów lepkosprężystych niesie ich spektrum relaksacji. Na jego podstawie można wyznaczyć dowolne inne liniowe charakterystyki opisujące materiały [10, 12]. Spektrum relaksacji nie jest jednak wprost dostępne pomiarowo, musi więc być wyznaczane w oparciu o charakterystyki dostępne pomiarowo. Zadanie identyfikacji spektrum relaksacji jest źle uwarunkowanym problemem odwrotnym [12, 18, 21]. Jego rozwiązanie (jeśli istnieje) jest nieciągłe względem danych zadania. Oznacza to, że nawet bardzo małe wahania danych mogą powodować bardzo duże fluktuacje rozwiązania (p. przykłady 3 i 4 w [21]). Identyfikacja spektrum relaksacji wymaga więc stosowania specjalnych metod. W ciągu ostatnich kilku lat powstało kilka metod i algorytmów identyfikacji spektrum częstotliwości i czasów relaksacji bazujących na rozwinięciu nieznanego spektrum w skończony szereg funkcyjny, przykładowo [16, 17, 18, 20, 22] i starsze prace tam cytowane. Algorytmy te wykorzystują pomiary zgromadzone w przeprowadzonym w dziedzinie czasu teście relaksacji naprężeń [10, 11].

Celem pracy, złożonej z dwu części, jest przeanalizowanie wpływu zakłóceń pomiarowych na wyznaczony model spektrum relaksacji. W tej pracy przedstawiono i krótko scharakteryzowano klasę metod aproksymacji spektrum relaksacji szeregami funkcji specjalnych (Laguerre'a, Legendre'a, Hermite'a, Czebyszewa). Przedstawiono wyniki badań przeprowadzonych dla próbki rzeczywistego materiału roślinnego – buraka cukrowego odmiany Janus. Spektrum relaksacji badanej próbki wyznaczono na podstawie oryginalnych, silnie zakłóconych, danych pomiarowych oraz danych poddanych wstępnej filtracji. Zastosowano algorytmy Laguerre'a i Legendre'a. Wszystkie obliczenia wykonano w programie Mathcad 7 Professional, filtrację danych przeprowadzono w programie Catman 1.2. Niewielkie rozbieżności pomiędzy wyznaczonymi modelami spektrum relaksacji wskazują na odporność rozważanych algorytmów identyfikacji na silne zakłócenia pomiarowe. Analiza teoretyczna odporności algorytmów na deterministyczne addytywne zakłócenia pomiarów siły reakcji próbki badanej w teście relaksacji naprężeń jest przedmiotem drugiej części pracy.

SPEKTRUM RELAKSACJI I JEJ MODELE

W reologii przyjmuje się, że liniowy moduł relaksacji (jednoosiowa funkcja relaksacji naprężeń) $G(t), t \geq 0$, jest w pełni scharakteryzowany poprzez spektrum częstotliwości relaksacji $H(\nu)$ zgodnie z całkowym modelem Maxwella postaci [10, 12]:

$$G(t) = \int_0^{\infty} H(\nu) e^{-t\nu} d\nu, \quad (1)$$

gdzie: ν oznacza częstotliwość relaksacji, $\nu \geq 0$. Spektrum relaksacji charakteryzuje frakcje elementów modelu (1) o częstotliwościach relaksacji zawierających się pomiędzy ν a $\nu + d\nu$. Będziemy zakładać, że rzeczywiste spektrum relaksacji $H(\nu)$ jest całkowicie nieznane, natomiast moduł relaksacji $G(t)$ jest dostępny pomiarowo.

Niech $H(\nu) \in L_2(0, \infty)$, gdzie $L_2(0, \infty)$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem w przedziale $(0, \infty)$. Zbiór liniowo niezależnych funkcji $\{h_1(\nu), h_2(\nu), h_3(\nu), \dots\}$ tworzy zupełny układ bazowy w przestrzeni $L_2(0, \infty)$. Spektrum relaksacji $H(\nu)$ przybliża się modelem postaci [17, 18, 19, 20, 22]:

$$H_K(\nu) = \sum_{k=1}^K g_k h_k(\nu). \quad (2)$$

Przyjęcie modelu (2) oznacza przybliżenie modułu relaksacji $G(t)$ szeregiem funkcyjnym:

$$G_K(t) = \int_0^{\infty} H_K(\nu) e^{-t\nu} d\nu = \sum_{k=1}^K g_k \phi_k(t), \quad (3)$$

gdzie funkcje:

$$\phi_k(t) = \int_0^{\infty} h_k(\nu) e^{-t\nu} d\nu. \quad (4)$$

Funkcje bazowe $h_k(\nu)$ w opracowanych algorytmach dobrano tak, aby składowe $\phi_k(t)$ modelu modułu relaksacji (3) były dane formułami analitycznymi lub rekurencyjnymi. Pozwala to uniknąć błędów kwadratur występujących przy numerycznym obliczaniu całek (4). Jako funkcje bazowe $h_k(\nu)$ przyjęto: funkcje Laguerre'a [18, 20], funkcje Legendre'a [17, 18], funkcje Czebyszewa [19], funkcje Hermita [22].

Dla wielu materiałów $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_{\infty} > 0$ [3, 8, 10, 12, 18], gdzie G_{∞} jest wartością ustaloną modułu relaksacji (ang. *long-term modulus*). Jest tak również dla próbki buraka cukrowego badanej poniżej. Zamiast klasycznego modelu (3) dogodnie jest więc rozpatrywać model rozszerzony (ang. *augmented model*) postaci:

$$\bar{G}_K(t) = \int_0^{\infty} H_K(\nu) e^{-t\nu} d\nu + G_{\infty}. \quad (5)$$

Model spektrum relaksacji ma wówczas postać:

$$\bar{H}_K(\nu) = H_K(\nu) + G_{\infty} \delta(\nu), \quad (6)$$

gdzie: $\delta(\nu)$ oznacza deltę Diraca. Nieograniczona składowa $G_{\infty} \delta(\nu)$ spektrum relaksacji $\bar{H}_K(\nu)$ (6) odpowiada zerowej częstotliwości relaksacji.

ALGORYTMY IDENTYFIKACJI SPEKTRUM RELAKSACJI

Założmy, że przeprowadzono skończony eksperyment dyskretny (test relaksacji naprężeń [10, 11]), którego rezultatem jest zbiór pomiarów modułu relaksacji $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$ w chwilach czasu $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, gdzie $z(t_i)$ oznacza zakłócenie. Problem optymalnej identyfikacji spektrum relaksacji w klasie modeli (2), (6) polega na takim doborze wektora parametrów $\mathbf{g}_K^T = [g_1 \dots g_K \ G_{\infty}]$ modelu $\bar{G}_K(t)$ (3), (5), aby model ten przybliżał dane eksperymentalne $\{\bar{G}(t_i)\}$ jak najlepiej w sensie wskaźnika:

$$Q_N(\mathbf{g}_K) = \sum_{i=1}^N [\bar{G}(t_i) - G_K(t_i)]^2. \quad (7)$$

Tak sformułowane zadanie optymalnej identyfikacji spektrum relaksacji jest klasycznym liniowym problemem najmniejszej sumy kwadratów postaci $\min_{\mathbf{g}_K \in R^{K+1}} Q_N(\mathbf{g}_K)$. Jednak już dla niewielkich wartości K problem ten jest wciąż zadaniem źle postawionym

[18, 21]. Stabilizację jego rozwiązania uzyskuje się stosując technikę regularyzacji Tichonowa [12, 18]. Prowadzi to do następującego algorytmu identyfikacji wektora parametrów modelu optymalnego [16, 18, 19, 20, 22]:

$$\mathbf{g}_K = (\Phi_{N,K}^T \Phi_{N,K} + \lambda \mathbf{I}_{K+1,K+1})^{-1} \Phi_{N,K}^T \bar{\mathbf{G}}_N, \quad (8)$$

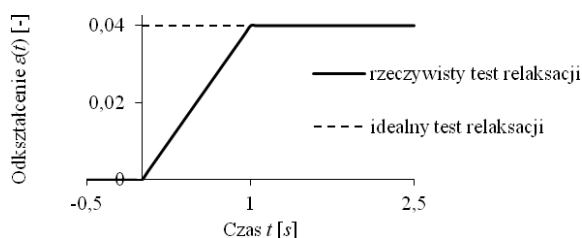
gdzie:

$$\Phi_{N,K} = \begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \dots & \phi_K(t_1) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(t_N) & \dots & \phi_K(t_N) & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}}_N = \begin{bmatrix} \bar{G}(t_1) \\ \vdots \\ \bar{G}(t_N) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

natomiast $\lambda > 0$ jest parametrem regularyzacji, a $\mathbf{I}_{K+1,K+1}$ oznacza $K+1$ wymiarową macierz jednostkową. Skuteczność stosowania regularyzacji zależy od metody doboru parametru regularyzacji. W rozważanych algorytmach najczęściej stosowano dwie reguły doboru parametru λ , obie nie wymagają wiedzy apriorycznej o własnościach stochastycznych zakłóceń:

1. uogólnioną metodę sprawdzania krzyżowego (ang. *Generalized Cross Validation* [12]) w pracach [18, 19, 20],
2. nową, zaproponowaną po raz pierwszy w pracy autorki [16] dla zadania identyfikacji spektrum czasów relaksacji, regułę doboru współczynnika regularyzacji, w której parametr λ dobiera się tak, aby zagwarantować założoną dokładność aproksymacji modułu relaksacji (ang. *Guaranteed Model Approximation*) w pracach [18, 22].

Oryginalny problem identyfikacji spektrum relaksacji jest zadaniem źle postawionym. Przybliżenie spektrum skończonym szeregiem funkcji bazowych oraz odpowiednia regularyzacja problemu pozwoliły na sprowadzenie oryginalnego problemu do zadania dobrze postawionego o jednoznacznym i ciągłym względem danych zadania rozwiązaniu [18]. Często jednak, szczególnie w warunkach obciążeń udarowych, pomiary modułu relaksacji rejestrowane dla rzeczywistych materiałów są silnie zakłócone. W takim przypadku naturalnym podejściem wydaje się poddanie danych pomiarowych wstępnej filtracji. W pracy pokazano, że w przypadku rozważanych algorytmów aproksymacji spektrum relaksacji szeregiem funkcyjnymi nie jest to niezbędne. Ilustruje to przykład przedstawiony poniżej.



Rys. 1. Przebieg odkształcenia w rzeczywistym teście relaksacji (10); $t_R = 1$ [s], $\varepsilon_0 = 0,04$ [-]

Fig. 1. Strain in the ramp-test (10); $t_R = 1$ [s], $\varepsilon_0 = 0,04$ [-]

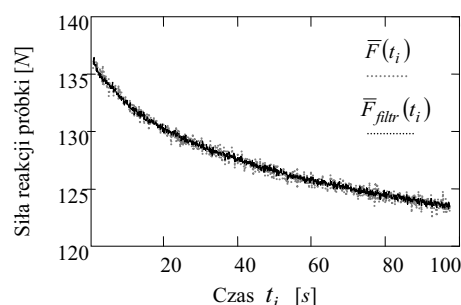
MATERIAŁ BADAWCZY I EKSPERYMENT

Klasycznym sposobem wyznaczania charakterystyk lepkospężystych jest, złożony z dwu faz, test relaksacji naprężeń [10, 11, 23]. W pierwszej fazie testu relaksacji badana próbka poddawana jest odkształceniu ze stałą prędkością aż do osiągnięcia założonej wartości odkształcenia utrzymywanego w drugiej fazie testu. Odkształcenie w takim teście relaksacji (ang. *ramp-test* [11]) opisane jest funkcją:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \varepsilon_0 t / t_R & \text{dla } 0 \leq t \leq t_R \\ \varepsilon_0 & \text{dla } t > t_R \end{cases}, \quad (10)$$

gdzie: t_R to czas narastania odkształcenia, a ε_0 to stałe odkształcenie utrzymywane w drugiej fazie testu (p. rys. 1).

Walcową próbkę buraka cukrowego odmiany Janus o średnicy i wysokości 20 mm poddano testowi relaksacji naprężeń w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia [6]. Próbkę umieszczono w stalowym cylindrze uniemożliwiającym jej boczne odkształcenie i odkształcano poprzez przesuwanie tłoka. Test relaksacji przeprowadzono w warunkach obciążeń udarowych na stanowisku do badań dynamicznych opisanym w pracy [5] w Zakładzie Teorii Maszyn i Automatyki Akademii Rolniczej w Lublinie [6]. Próbkę ściskano wzdłuż osi o 0,8 mm ($\varepsilon_0 = 0,04$ [-]), stosując prędkość odkształcania $\varepsilon_0 / t_R = 25 \text{ s}^{-1}$. Oznacza to, że ruch tłoka powodującego odkształcanie próbki odbywał się z prędkością $0,5 \text{ ms}^{-1}$. Siłę reakcji próbki rejestrowano przez 100 [s]. Punkty pomiarowe t_i dobrano ze stałym krokiem próbkowania $\Delta t = 0,0025$ [s] [6,18]. Przebieg siły reakcji próbki $\bar{F}(t)$ zarejestrowano w 40000 punktach pomiarowych. Do identyfikacji spektrum relaksacji wybrano 1164 punkty pomiarowe, pierwsze 200 co $\Delta t = 0,0025 \text{ s}$ na odcinku czasu $0 \leq t \leq 0,5$ [s], kolejne 964 punktów z okresem próbkowania $\Delta t_1 = 0,1 \text{ s}$ na odcinku $0,5 \leq t \leq 97$ [s]. Ich przebieg przedstawia rys. 2 (szare punkty), ilustrujący także silne zakłócenia pomiarowe.



Rys. 2. Siła reakcji próbki buraka cukrowego Janus zarejestrowana doświadczalnie [s] (szare punkty) oraz pomiary odfiltrowane (czarne punkty) dla $0,85 \leq t_i \leq 97$

Fig. 2. The force induced in the cylindrical sample of root of sugar beet Janus variety recorded experimentally during ramp-test (grey points) and the filtered measurements (black points) for sampling instants $0,85 \leq t_i \leq 97$

WYZNACZENIE MODUŁU RELAKSACJI

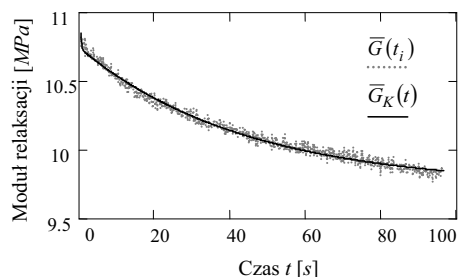
Zastosowanie modeli reologicznych do opisu mechanicznych własności próbki badanego materiału uzasadniają wyniki badań prezentowane w wielu pracach, np. [1, 6, 18]. Danymi dla algorytmów identyfikacji spektrum relaksacji są pomiary modułu relaksacji. Wielkością bezpośrednio dostępną pomiarowo w teście relaksacji jest siła reakcji badanej próbki. Wynikiem eksperymentu jest zbiór pomiarów siły reakcji próbki $F(t_i)$ zgromadzonych dla $t_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$. Wobec tego naprężenie $\bar{\sigma}(t_i) = F(t_i)/p$, gdzie p oznacza pole przekroju poprzecznego próbki. Naprężenie $\sigma(t)$ i moduł relaksacji $G(t)$ wiąże równanie całkowe [8, 10]:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau. \quad (11)$$

W literaturze znanych jest kilka algorytmów wyznaczania modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia uwzględniających niezerowy czas odkształcania próbki. Ich przegląd podaje praca [23]. W obliczeniach zastosowano regułę Zapasa-Crafta [11, 23]:

$$\bar{G}(t - t_R/2) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{dla } t \geq t_R/2. \quad (12)$$

O jej wyborze zdecydowała nie tylko dobra odporność na zakłócenia i prosta formuła obliczeniowa, ale także doskonała jakość przybliżenia modułu relaksacji dla niewielkich czasów t_R - w przeprowadzonym eksperymencie $t_R = 0,0016$ [s]. W porównaniu z tradycyjną prostą formułą $\bar{G}(t) = \bar{\sigma}(t)/\varepsilon_0$, słuszną dla idealnego testu relaksacji o stałym odkształceniu ε_0 (p. rys. 1), zastosowanie formuły (12) oznacza wprowadzenie składowej korekcyjnej równej $t_R/2$. Dla uproszczenia notacji punkty pomiarowe t_i oraz ich wartości skorygowane $t_{i_corr} = t_i - t_R/2$ będziemy dalej oznaczać tym samym symbolem.



Rys. 3. Pomiary modułu relaksacji $\bar{G}(t_i)$ dla $0,85 \leq t_i \leq 95$ [s] (szare punkty) oraz model modułu relaksacji $\bar{G}_K(t)$ (czarna linia) wyznaczony metodą Laguerre'a - próbka buraka cukrowego Janus

Fig. 3. The relaxation modulus measurements $\bar{G}(t_i)$ for $0,85 \leq t_i \leq 95$ [s] (grey points) and the model $\bar{G}_K(t)$ (solid black line) determined by using Laguerre method; sample of the sugar beet Janus root

WYZNACZENIE SPEKTRUM RELAKSACJI
BEZ WSTĘPNEJ FILTRACJI
DANYCH POMIAROWYCH

Na podstawie pomiarów siły reakcji badanej próbki $\{\bar{F}(t_i)\}$ wyznaczono pomiary naprężenia $\{\bar{\sigma}(t_i)\}$, a następnie stosując formułę (12) pomiary modułu relaksacji $\{\bar{G}(t_i)\}$ przedstawione na rys. 3, który pozwala ocenić intensywność zakłóceń „pomiarów” modułu $G(t)$. Na podstawie $\{\bar{G}(t_i)\}$ wyznaczono spektrum relaksacji stosując algorytmy Laguerre'a [18, 20] i Legendre'a [17, 18]. Model spektrum relaksacji $H_K(\nu)$ wyznaczony metodą Laguerre'a przedstawia rys. 4, a metodą Legendre'a - rys. 5. Dokładność dopasowania modelu $\bar{G}_K(t)$ (5), (3) do pomiarów ilustruje rys. 3. Na równie dobre jak w przypadku algorytmu Laguerre'a dopasowanie do danych pomiarowych modelu modułu relaksacji wyznaczonego algorytmem Legendre'a wskazują wartości wskaźników:

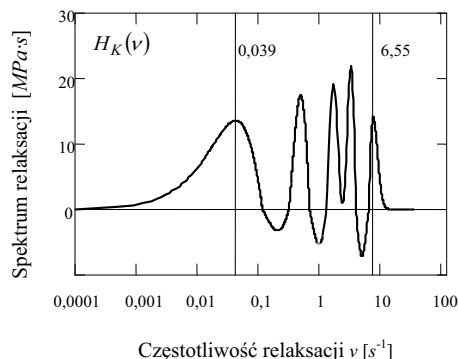
1. średniokwadratowego błędu aproksymacji pomiarów modułu relaksacji (p. wzór (7)):

$$QLS = \frac{1}{N} Q_N(\mathbf{g}_K) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\bar{G}(t_i) - G_K(t_i)]^2, \quad (13)$$

2. średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji pomiarów modułu relaksacji:

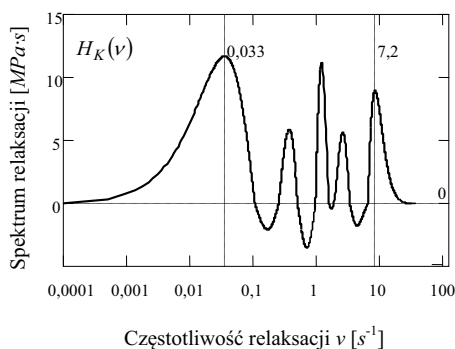
$$QLSR = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\bar{G}(t_i) - G_K(t_i)]^2 / [\bar{G}(t_i)]^2, \quad (14)$$

podane w Tabeli 1. W tabeli tej zestawiono także przyjęte parametry α (współczynniki skali czasu [17,18,20]) i K , współczynniki regularyzacji λ_{GCV} wyznaczone metodą uogólnionego sprawdzania krzyżowego, oraz normy z rozwiązania normalnego oryginalnego zadania najmniejszych kwadratów $\|\mathbf{g}_K^N\|_2$ i rozwiązania zregularyzowanego (8) $\|\mathbf{g}_K\|_2$; $\|\cdot\|_2$ oznacza tu normę euklidesową w przestrzeni R^{K+1} .



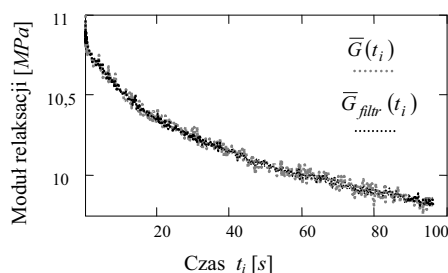
Rys. 4. Model spektrum relaksacji $H_K(\nu)$ próbki buraka cukrowego Janus - algorytm Laguerre'a

Fig. 4. The approximate model $H_K(\nu)$ of the relaxation spectrum of the sample of the sugar beet Janus root - Laguerre algorithm



Rys. 5. Model spektrum relaksacji $H_K(v)$ próbki buraka cukrowego Janus algorytm Legendre'a

Fig. 5. The approximate model $H_K(v)$ of the relaxation spectrum of the sample of the sugar beet Janus root – Legendre algorithm



Rys. 6. Pomiary modułu relaksacji $\bar{G}(t_i)$ (szare punkty) oraz $\bar{G}_{filtr}(t_i)$ (czarne punkty) dla $0,85 \leq t_i \leq 95$ [s] – próbka buraka cukrowego Janus

Fig. 6. The relaxation modulus measurements $\bar{G}(t_i)$ (grey points) and $\bar{G}_{filtr}(t_i)$ (black points) for $0,85 \leq t_i \leq 95$ [s]; sample of the sugar beet Janus root

WYZNACZENIE SPEKTRUM RELAKSACJI ZE WSTĘPNĄ FILTRACJĄ DANYCH POMIAROWYCH

W tym punkcie wyznaczono spektrum relaksacji dla danych pomiarowych $\{\bar{F}(t_i)\}$ poddanych wstępnej filtracji klasyczną metodą Savitzky'ego-Golay'a [13]. Do identyfikacji modelu wykorzystano 1164 punkty pomiarowe wybrane powyżej. Przebieg oryginalnych pomiarów siły reakcji próbki $\bar{F}(t_i)$ i sygnału przefiltrowanego $\bar{F}_{filtr}(t_i)$ przedstawia rys. 2. Na podstawie zbioru pomiarów $\{\bar{F}_{filtr}(t_i)\}$ wyznaczono naprężenia $\{\bar{\sigma}_{filtr}(t_i)\}$, a następnie pomiary modułu relaksacji $\{\bar{G}_{filtr}(t_i)\}$ zgodnie z formułą (12). Sygnały $\{\bar{G}(t_i)\}$ i $\{\bar{G}_{filtr}(t_i)\}$ zestawiono na rys. 6, co pozwala ocenić skuteczność filtracji. Na podstawie $\{\bar{G}_{filtr}(t_i)\}$ wyznaczono spektrum relaksacji $H_{K,filtr}(v)$ stosując algorytmy Laguerre'a i Legendre'a. Parametry α , K i λ_{GCV} , normy z rozwiązywania normalnego i zregulowanego oraz wartości wskaźników QLS i $QLSR$ podano w dwu ostatnich wierszach Tabeli 1. Mniejsza wartość współczynnika regularyzacji jest naturalna wobec słabszych zakłóceń. Modele $H_K(v)$ i $H_{K,filtr}(v)$ wyznaczone metodą Laguerre'a zestawiono na rys. 7, metodą Legendre'a na rys. 8.

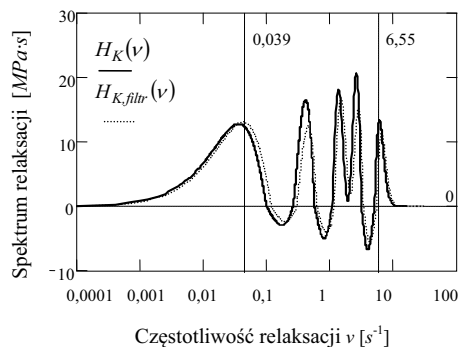
UWAGA KOŃCOWA

W pracy wyznaczono spektrum relaksacji próbki rzeczywistego materiału biologicznego – buraka cukrowego odmiany Janus – na podstawie danych zgromadzonych w dziedzinie czasu w teście relaksacji naprężeń. Zarówno rejestrowana doświadczalnie siła, jak i wyznaczony moduł relaksacji, obciążone są silnymi zakłóceniami. Zastosowanie filtracji częściowo te zakłócenia niweluje. Stosowanie wstępnej filtracji nie jest jednak niezbędne, gdyż rozbieżności pomiędzy spektrami $H_K(v)$ i $H_{K,filtr}(v)$ nie są istotne, a lokalizacja (zaznaczonych na rys. 4 i 5 dla modeli $H_K(v)$, a na rys. 7 i 8 dla modeli $H_{K,filtr}(v)$) pierwszego v_{min} i ostatniego v_{max} maksimum jest zbliżona, zbliżone są również ich intensywności $H_K(v_{min})$ i $H_{K,filtr}(v_{min})$ oraz $H_K(v_{max})$ i $H_{K,filtr}(v_{max})$. Filtracja wstępna nie wpływa więc istotnie na wynik identyfikacji. Dzieje się tak dlatego, że jak pokazano w drugiej części pracy algorytmy optymalnej aproksymacji spektrum relaksacji materiałów liniowo lepkospężystych skończonymi szeregami funkcyjnymi rozpatrywane jako liniowe systemy dyskretne posiadają własności filtru dolnoprzepustowego.

Tabela 1. Parametry α , K i λ oraz wartości wskaźników jakości modelu; próbka buraka cukrowego Janus

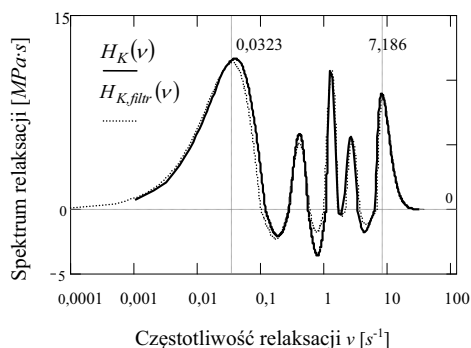
Table 1. Parameters α , K , λ and the values of the model quality indices; sample of the sugar beet Janus root

Algorytm	K	α	λ_{GCV}	$\ g_K^N\ _2$	$\ g_K\ _2$	G_∞ [MPa]	QLS (13)	$QLSR$ (14)
Laguerre'a	10	5,104	3,5E-3	4,12E+3	92,06516	9,81212	0,63224	0,00136
Legendre'a	10	0,388	0,022	1,095E+3	71,75919	9,76799	0,59594	0,00134
Laguerre'a z filtracją	10	6,531	4E-4	2,85E+3	147,5758	9,76166	0,30464	0,00073
Legendre'a z filtracją	10	0,395	0,0012	3,77E+2	50,21287	9,71011	0,53484	0,00051



Rys. 7. Modele spektrum relaksacji: $H_K(v)$ (linia ciągła) i $H_{K,filtr}(v)$ (linia przerywana) próbki buraka cukrowego Janus – algorytm Laguerre'a

Fig. 7. Models: $H_K(v)$ (solid line) and $H_{K,filtr}(v)$ (dash line) of the relaxation spectrum of the sample of the sugar beet Janus root – Laguerre algorithm



Rys. 8. Modele spektrum relaksacji: $H_K(v)$ (linia ciągła) i $H_{K,filtr}(v)$ (linia przerywana) próbki buraka cukrowego Janus – algorytm Legendre'a

Fig. 8. Models: $H_K(v)$ (solid line) and $H_{K,filtr}(v)$ (dash line) of the relaxation spectrum of the sample of the sugar beet Janus root – Legendre algorithm

LITERATURA

- Bzowska-Bakalarz M. 1989.** Comparison of rheological models determining the physical properties of sugar beet roots. *Proceedings of the 4th International Conference Physical Properties of Agricultural Materials*, Rostock, 109-112.
- Dealy J., Larson R.G. 2006.** Structure and rheology of molten polymers-from structure to flow behaviour and back again. Hanser, Munich.
- Domone P., John Illston J. (Eds) 2010.** Construction Materials: Their Nature and Behaviour. Spon Press, New York.
- Eitelberger J., Bader T.K., De Borst K., Jäger A. 2012.** Multiscale prediction of viscoelastic properties of softwood under constant climatic conditions. *Computational Materials Science*, 55, 303-312.
- Gołacki K., Graboś A., Stropek Z. 1999.** Test relaksacji naprężeń w materiale biologicznym w warunkach obciążenia dynamicznego-realizacja techniczna. *Inżynieria Rolnicza*, 2, 55-61.
- Gołacki K., Kołodziej P., Stankiewicz A., Stropek Z. 2003.** Report of KBN Grant No 5P06F00619: "Charakterystyka odporności mechanicznej buraków cukrowych w aspekcie spotykanych w praktyce obciążeń mechanicznych", 1-214.
- Kobus Z., Kusińska E. 2010.** Effect of temperature and concentration on rheological properties of tomato juice. *TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture*, 10, 170-178.
- Kontopoulou M. (Ed) 2012.** Applied Polymer Rheology: Polymeric Fluids with Industrial Applications. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Kusińska E., Kornacki A. 2008.** Testing of a mathematical model of grain porosity. *TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture*, 8A, 112-117.
- Lakes R. S. 2009.** Viscoelastic Materials. Cambridge University Press, Cambridge.
- Lee S., Knauss W.G. 2000.** A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 4, 1-7.
- Malkin A.Y., Isayev A.I. 2011.** Rheology: Concepts, Methods and Applications. ChemTec Publishing, Toronto.
- Persson P.-O., Strang G. 2003.** Smoothing by Savitzky-Golay and Legendre filters. *Mathematical systems theory in biology, communications, computation, and finance (Notre Dame, IN, 2002)*, IMA Vol. Math. Appl., 134, 301-315, Springer, New York.
- Petryszak P., Grzegorz Wcisło G., Koloczek H. 2011.** Wyznaczenie wybranych własności fizyko-chemicznych biodiesli PME oraz RME wyprodukowanych z zużytych olejów oraz określenie skuteczności neutralizacji metanolu w ściekach powstałych po ich produkcji. *MOTROL*, 13, 258-268.
- Prorok B.C., Barthelat F., Korach Ch.S., Grande-Al-len J.J., Lipke E., Lykofatitits G., Zavattieri P. (Eds) 2013.** Mechanics of Biological Systems and Materials, Volume 5. *Proceedings of the 2012 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics*, Springer, New York London.
- Stankiewicz A. 2003.** Algorytm identyfikacji ciągłego spektrum czasów relaksacji biologicznych materiałów lepkosprężystych. *Acta Scientiarum Polonorum, Seria Technica Agraria*, 2(2), 77-91.
- Stankiewicz A. 2004.** Metoda identyfikacji spektrum relaksacji materiałów lepkosprężystych. *Problemy Eksploatacji*, 52(1), 121-133.
- Stankiewicz A. 2007.** Identyfikacja spektrum relaksacji lepkosprężystych materiałów roślinnych. Rozprawa doktorska, Akademia Rolnicza, Lublin.
- Stankiewicz A. 2010.** Identification of the relaxation and retardation spectra of plant viscoelastic materials using Chebyshev functions. *TEKA Commission of Motorization and Power Industry in Agriculture*, 10, Part I. 363-371; Part II. 372-378; Part III. 396-404.
- Stankiewicz A. 2010.** Jak dobrze postawić problem identyfikacji spectrum relaksacji roślinnych materiałów lepkosprężystych. *Acta Agrophysica*, 16(1), 117-227.

21. **Stankiewicz A. 2010.** O źle i dobrze postawionych problemach identyfikacji modeli roślinnych materiałów lepkospężystych. *Acta Agrophysica* 16(1), 189-206.
22. **Stankiewicz A. 2012.** On determination of the relaxation spectrum of viscoelastic materials from discrete-time stress relaxation data. *TEKA Commission of Motorization and Energetics in Agriculture*, 12(2), 201-206.
23. **Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R.W. 2011.** On the determination of the relaxation modulus of PP compounds from arbitrary strain histories. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 15, 1-14.
24. **Vicente J. (Ed) 2012.** Viscoelasticity - From Theory to Biological Applications. InTech, Rijeka.

IDENTIFICATION OF THE RELAXATION SPECTRUM
OF VISCOELASTIC MATERIALS UNDER STRONG
NOISE MEASUREMENT DATA.
PART I. PROBLEM AND EXAMPLE

Summary. The two-part paper deals with the problem of recovery of continuous relaxation spectrum of linear viscoelastic materials from discrete-time noise corrupted measurements of

relaxation modulus obtained in stress relaxation test. This problem is known to be severely Hadamard ill-posed. Thus even small changes in measurement data can lead to arbitrarily large changes in the relaxation spectrum. In remedy, respective regularization of the original problem can be used. Noise robustness issues are studied. A class of identification algorithms based on the least-squares approximation of relaxation modulus by finite series of some special functions (Laguerre, Legendre, Hermite, Chebyshev) and using Tikhonov regularization to guarantee the stability of the scheme is considered. An example of the relaxation spectrum identification of the beet sugar root sample in the state of the uniaxial deformation based on the strong-noise corrupted measurements of the time-varying force induced in the specimen is given. The Laguerre and Legendre algorithms are applied. The relaxation spectrum models determined for original noise data and the filtered one are congruent. Thus the initial filtering of noise measurements is not necessary when the considered algorithms are used. Theoretical analysis of the noise robustness of the relaxation spectrum identification schemes is the subject of the second part of the paper.

Key words: viscoelasticity, relaxation spectrum, identification, special functions series, noise robustness, sugar beet root.