

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ПОЧАТКЕ КУКУРУЗЫ ПРИ ЕГО ОТДЕЛЕНИИ ОТ СТЕБЛЯ

Александр Ракул^{*}, Валерий Поздеев^{**}, Владимир Пилип^{*}

^{*}Николаевский государственный аграрный университет

^{**}Николаевский национальный университет им. В.О. Сухомлинского
г. Николаев, ул. Крылова, 17 а

Аннотация: В статье представлена математическая модель для початка кукурузы как эквивалентного однородного стержня.

Ключевые слова: кукуруза, початок, математическая модель, волны деформации, стержень-волновод, эквивалентный стержень.

ВВЕДЕНИЕ

Во всем комплексе мероприятий по выращиванию кукурузы решающее место занимает операция уборке урожая, которая в значительной степени определяет как объем, так и качество продукта. Большое разнообразие условий работы выдвигает особенные требования к кукурузоуборочным машинам, а именно их рабочим органам в части обеспечения одинаковой работоспособности и качества работы во всех зонах и в различных условиях [5, 14, 17].

На сегодняшний день перед отечественными аграриями остро стоит вопрос рационального использования посевных площадей, а также повышение эффективности выращивания сельскохозяйственных культур, которое не возможно без современной кукурузоуборочной техники. Однако создание такой техники невозможно без всестороннего изучения технологического процесса работы основных рабочих органов.

Если початкоочистительный аппарат используется только на специальных кукурузоуборочных комбайнах, при уборке кукурузы в початках с их очисткой от обертки, или на стационарных початкоочистительных аппаратах при уборке кукурузы без очистки початков, то без початкоотделительного аппарата механизированная уборка

кукурузы на зерно вообще не возможно [2, 6].

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ

Большие объемы работ по экспериментальному и теоретическому изучению в этом направлении проведены разными научно-исследовательскими институтами прежнего СССР и конструкторским бюро Херсонского комбайнового завода. Глубокие теоретические разработки, которые посвящены расчету початкоотделительных аппаратов проведенные такими известными учеными как А.И. Буянов, В.Т. Бондарев, М.Е. Резник и другие [4, 9, 10]. Однако и эти работы не дают необходимых данных для решения многих заданий по расчету початкоотделительных устройств, они преимущественно посвящены теоретическому обоснованию протягивания стеблей, отделению початков на пиккерных вальцах, расчета пропускной способности и производительности уборочных машин и не освещают вопросы совершенствования технологического процесса работы и конструктивных схем кукурузоуборочной техники, которые на современном этапе развития сельского хозяйства стали актуальными.

ЦЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является разработка математической модели для

початка кукурузы как эквивалентного однородного стержня.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

Продольные волны деформации возникают в стержнях и тросах при их импульсном нагружении. Стержнем в механике называется твердое тело, поперечные размеры которого значительно меньше продольных. Стержень может испытывать деформации как сжатия, так и растяжения, а трос – только растяжения. Стержень и трос являются волноводами. В нашем случае в роли стержня-волновода выступает початок кукурузы при ударе, а в качестве троса-волновода – плодоножка [7, 8].

Распространение продольных волн деформации в волноводах описывается волновым уравнением вида [11, 12]:

$$\rho S(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(ES(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где: z – продольная координата ($0 \leq z \leq l$);

l – длина волновода,

t – время ($0 \leq t < \infty$),

u – функция продольных деформаций,

E – модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга) материала волновода,

ρ – плотность материала волновода,

S – площадь поперечного сечения волновода.

Функция $u = u(x, t)$ является решением волнового уравнения (1).

Полагаем, что материал волновода является однородным, а его физические параметры (E , ρ) постоянные величины. Случай неоднородного волновода будет рассмотрен в следующем подразделе. С учетом принятого допущения уравнение (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{S(z)} \cdot \frac{\partial S(z)}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right], \quad (2)$$

$$a_0^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (3)$$

где: a_0 – скорость распространения волн деформации по длине волновода.

В случае, если $S(z) = S_0 = const$, то $\partial S / \partial z = 0$ и уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (4)$$

В более общем случае изменение сечения $S(z)$ по длине принимают в виде (рис. 1):

$$S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^m, \quad m = 0; 1; 2, \quad (5)$$

где: $S(z_0) = S_0$.

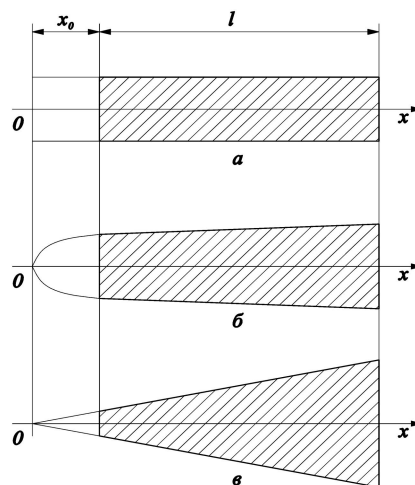


Рис. 1. Продольные сечения стержней-волноводов:

а – цилиндрический; б – параболоид вращения;

в – конический

Fig. 1. Longitudinal sections of bars-waveguides:

а – cylindrical; б – paraboloid of rotation; в – conical

При $m = 0$ имеем цилиндрический стержень-волновод (рис. 1), при $m = 1$ – стержень-волновод в виде параболоида, а при $m = 2$ – конический стержень-волновод.

Одновременно считаем, что поперечное сечение во всех случаях является кругом. Заметим, что задание функции $S(z)$ в ином виде вызывает большие трудности в решении уравнения (2), по крайней мере, делает невозможным получение аналитического вида решения.

Если закон изменения сечения $S(z)$ имеет вид (5), то: $\frac{1}{S(z)} \frac{\partial S(z)}{\partial z} = \frac{m}{z}$ и волновое уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m}{z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Это линейное волновое уравнение, которое в соответствии с принятым значением числа m принимает следующие представления:

при $m = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

при $m = 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

при $m = 2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (9)$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$u(z, t) = f_1\left(t - \frac{z}{a_0}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{a_0}\right), \quad (10)$$

где f_1, f_2 – неизвестные пока функции волновых аргументов:

$$t_1^0 = t - \frac{z}{a_0}, \quad (11)$$

$$t_2^0 = t + \frac{z}{a_0}. \quad (12)$$

Волновой аргумент (11) соответствует волнам, движущимся в положительном направлении по Oz . Волновой аргумент (12) соответствует волнам, движущимся в отрицательном направлении по Oz . То есть функция $f_1(t_1^0)$ описывает волны, движущиеся в сторону возрастания z , а функция $f_2(t_2^0)$ описывает волны, движущиеся в сторону убывания z .

Общее решение волнового уравнения (9) для конического стержня ($m = 2$) имеет вид:

$$u(z, t) = \frac{1}{z} [f_1(t_1^0) + f_2(t_2^0)]. \quad (13)$$

Выражения (10), (13) являются достаточно простыми для интерпретации.

Общее решение уравнения (8) для $m = 1$ может быть получено с помощью операционного сечения (преобразования Лапласа):

$$u^2(p, z) = \int_0^\infty e^{-pt} u(z, t) dt, \quad (14)$$

где: p – параметр преобразования (комплексная величина);

u^2 – трансформанта преобразования;

$u(z, t)$ – функция-оригинал.

В результате преобразования по (14) уравнение (8) в области изображений (трансформант) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial z} - \left(\frac{p}{a_0}\right)^2 u^2 = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) это уже обыкновенное дифференциальное уравнение (уравнение Бесселя), решение которого имеет вид:

$$u^2(p, z) = c_1 \cdot I_0\left(\frac{pz}{a_0}\right) + c_2 \cdot K_0\left(\frac{pz}{a_0}\right), \quad (16)$$

где: c_1, c_2 – постоянные интегрирования;

I_0, K_0 – функции Бесселя I и II рода нулевого порядка.

Для получения решения в области оригиналов $u = u(t, z)$ нужно выполнить обратное преобразование Лапласа трансформанты (16).

Полная математическая постановка задачи определения волнового поля деформации должна включать волновое уравнение (2), начальные и граничные условия.

Начальные условия описывают напряженно-деформируемое состояние стержня (волновода) в начальный момент времени ($t = 0$). Обычно начальные условия можно принять как нулевые, т.е.:

$$t = 0, \quad u(0, z) = 0, \quad \frac{\partial u(0, z)}{\partial t} = 0. \quad (17)$$

Граничные условия описывают взаимодействие волновода с окружающей средой на торцах $z = 0$ и $z = l$. Так, если стержень на конце закреплен жестко, то:

$$z = 0, \quad u(0, t) = 0. \quad (18)$$

Если стержень-волновод на конце $z = l$ свободен, то:

$$z = l, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial z} = 0. \quad (19)$$

Если стержень нагружен, то:

$$z = l, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial z} = F(t). \quad (20)$$

Удовлетворяя общее решение волнового уравнения $u = u(z, t)$ начальным и граничным условиям находим решение начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Теперь, если функция $u = u(z, t)$ известна, то можно найти усилие в стержне-волноводе:

$$T(z, t) = ES \frac{\partial u(z, t)}{\partial z}, \quad (21)$$

или напряжение:

$$\sigma(z, t) = \frac{T(z, t)}{S}. \quad (22)$$

В ряде практических случаев стержень-волновод может состоять из ряда стержней-волноводов из различных материалов и различной конфигурации [22, 23, 24]. Например, в початке можно выделить три зоны (рис. 2): оболочка, зерно, стержень.

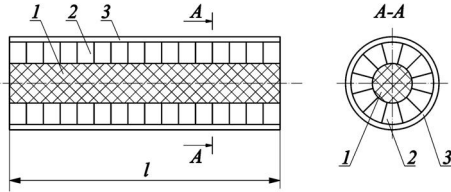


Рис. 2. Схема початка кукурузы:
1 – оболочка; 2 – зерно; 3 – стержень
Fig. 2. Chart of corn-cob:
1 – shell; 2 – grain; 3 – bar

Пусть S_i ($i = 1, 2, 3$) – площади поперечных сечений для i -той зоны; E_i – модули упругости материала зон; ρ_i – плотности материала зон; a_i – скорости распространения продольных волн в i -той зоне.

Динамика каждой i -той зоны описывается уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0, \quad (23)$$

$$a_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}}, \quad (24)$$

где: u_i – продольная деформация i -той зоны.

Динамическое усилие в каждой зоне:

$$T_i(z, t) = E_i S_i \frac{\partial u_i(z, t)}{\partial z}. \quad (25)$$

Введем в рассмотрение эквивалентный стержень из однородного материала с параметрами S, E, ρ, a и длиной l .

Динамику эквивалентного стержня будем описывать волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (26)$$

$$T = ES \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (27)$$

Очевидно, что усилие в эквивалентном стержне должно быть равным сумме усилий в отдельных волноводах, т.е.:

$$T(z, t) = \sum_{i=1}^3 T_i(z, t). \quad (28)$$

Далее, для продольных деформаций должно выполняться равенство

$$\begin{cases} u(z, t) = u_i(z, t); & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_i}{\partial z}. \end{cases} \quad (29)$$

Тогда из (28) и (29) следует:

$$E = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^3 E_i S_i. \quad (30)$$

Из условия сохранения массы для эквивалентного и составного стержня имеем:

$$\rho = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^3 \rho_i S_i. \quad (31)$$

Тогда для скорости волн в эквивалентном однородном стержне получим:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (32)$$

С учетом соотношений (30) и (31) из (32) имеем:

$$a = \left[\frac{\sum_{i=1}^3 E_i S_i}{\sum_{i=1}^3 \rho_i S_i} \right]^{1/2}, \quad (33)$$

или:

$$a = \left[\frac{E_1 \frac{S_1}{S} + E_2 \frac{S_2}{S} + E_3 \frac{S_3}{S}}{\rho_1 \frac{S_1}{S} + \rho_2 \frac{S_2}{S} + \rho_3 \frac{S_3}{S}} \right]^{1/2}. \quad (34)$$

Кроме того принимаем, что:

$$S = \sum_{i=1}^3 S_i. \quad (35)$$

Собирая полученные результаты для эквивалентного стержня, запишем их еще раз:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = S_1 + S_2 + S_3, \\ \rho = \rho_1 \frac{S_1}{S} + \rho_2 \frac{S_2}{S} + \rho_3 \frac{S_3}{S}, \\ E = E_1 \frac{S_1}{S} + E_2 \frac{S_2}{S} + E_3 \frac{S_3}{S}, \\ a = \left[\frac{E_1 \frac{S_1}{S} + E_2 \frac{S_2}{S} + E_3 \frac{S_3}{S}}{\rho_1 \frac{S_1}{S} + \rho_2 \frac{S_2}{S} + \rho_3 \frac{S_3}{S}} \right]^{1/2}. \end{array} \right. \quad (36)$$

Для такого случая имеем:

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)}{4}, \quad S_3 = \pi d_2 \delta, \quad (37)$$

где: d_1, d_2 – диаметры 1-й и 2-й зоны соответственно;

δ – толщина оболочки.

Таким образом:

$$S = \frac{\pi d_2^2}{4} + \pi d_2 \delta, \quad (38)$$

или:

$$S = \frac{\pi(d_2 + 2\delta)^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4}, \quad (39)$$

где: $d = d_2 + 2\delta$.

Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{S_1}{S} = \left(\frac{d_1}{d} \right)^2, \\ \frac{S_2}{S} = \left(\frac{d_2}{d} \right)^2 - \left(\frac{d_1}{d} \right)^2, \\ \frac{S_3}{S} \approx 4 \frac{\delta}{d}. \end{array} \right. \quad (40)$$

При математической постановке задачи начальные и граничные условия для эквивалентного стержня сохраняются.

ВЫВОДЫ

В результате проведенных исследований получена математическая модель для початка кукурузы как эквивалентного однородного стержня. Рассмотрена деформация початка кукурузы при его отделении от стебля как распространение продольных волн деформации в волноводах. Установлено, что при математической постановке задачи начальные и граничные условия для эквивалентного стержня сохраняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. 1985. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. М.: Наука. – 358.
2. Балкаров Р.А. 1985. Обоснование оптимальных параметров кукурузоуборочных агрегатов. В кн.: Повышение производительности машино-тракторных агрегатов. Сборник научных трудов. – М.: Изд. МИИСПа. – 84-86.
3. Бурсиан В.Р. 1927. Волновая механика Шредингера. Основания новой квантовой механики. М.-Л.: Госиздат. – 53-82.
4. Воронюк Б.А. 1970. Физико-механические свойства растений, почв и удобрений. – М.: Колос. – 432.
5. Гребенюк Г.І., Кузенко Д.В., Бондаренко О.В. 1999. Конструктивно-технологічні передумови вдосконалення качановідокремлювальних пристроїв кукурудозбиральних машин. // Вісник аграрної науки Причорномор'я. – Вип. 7. – 133-137.
6. Гребенюк Г.І. 1998. Шляхи розширення технологічних можливостей та ефективності кукурудозбиральних комбайнів. // Вісник аграрної науки Причорномор'я. – Вип. 5. – 116-121.
7. Дейвис Р.М. 1961. Волны напряжений в твердых телах. М. – 140.
8. Ерофеев В.И., Кажаяв В.В., Семерикова Н.П. 2002. Волны в стержнях.

Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит. – 208.

9. Каргуша П.П., Конопельцев Н.И. 1972. Обоснование параметров и режимов работы початкоотделяющего аппарата очесывающего типа. Тр. Мелитопольского СХИ. Т XVII. Вопросы механизации сельского хозяйства. – 42-45.

10. Касьяненко В.Д., Касьяненко В.В. 1999. Новые средства и способы механизации уборки кукурузы. – К.: Урожай. – 124.

11. Кольский Г. 1955. Волны напряжения в твердых телах. М. – 192.

12. Косевич А.М., Ковалев А.С. 1989. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка. – 304.

13. Кононенко А.Ф. 1980. Пути улучшения использования сельскохозяйственной техники. – М.: Колос. – 304.

14. Кузенко Д.В., Бондаренко О.В., Тимошук В.Ю. 2000. Теоретичний аналіз підвищення якісних показників качановідокремлювальних апаратів кукурудзозбиральних машин. // Вісник аграрної науки Причорномор'я. – Вип. 9. – 136-203.

15. Николас Т. 1985. Поведение материалов при высоких скоростях деформации // Динамика удара. М.: Мир. – 198 – 257.

16. Пановко Я.Г. 1985. Механика деформируемого твердого тела: современные концепции, ошибки и парадоксы. М.: Наука. – 288.

17. Сидоренко О. 2005. Метод визначення втрат врожаю сільськогосподарських культур внаслідок несвоєчасного виконання механізованих процесів рослинництва / О. Сидоренко, С. Сенчук, П. Луб, А. Татомир, А. Бурилко // MOTROL. – Т 7. – Одеса. – 86-91.

18. Бондаренко О. 2010. Теоретичне обґрунтування механічної технології відокремлення качанів кукурудзи від стебел інерційними силами / О. Бондаренко // MOTROL. – 12А, – 84-92.

19. Слеттери Дж. 1978. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах / М.: Энергия – 448.

20. Сагомоян А.Я. 1985. Волны напряжения в сплошных средах. М.: МГУ. – 132.

21. Саченко А.И., Игропуло В.С. 1997. О некоторых особенностях исследования процесса движения деформируемого твердого тела под действием силы приложенной к его боковой поверхности // Вестник Ставропольского государственного университета. Ставрополь. – Вып. 11. – 89.

22. Саченко А.И. 2003. Описание ускоренного движения деформируемого твердого тела на основе волновых процессов, возникающих при воздействии постоянной силы на его поверхность (торец) // Вестник Северо-Кавказского государственного технического университета. Серия «Физико-химическая». Ставрополь: СевКавГТУ. – №1(7). – 64-72.

23. Саченко А.И. 2001. Некоторые вопросы кинематики деформируемого твердого тела (на основе детерминированных волновых процессов) // Сборник научных трудов. Серия «Физико-химическая». Ставрополь: СевКавГТУ. – Вып. 4. – 44-47.

24. Саченко А.И. 1998. Некоторые вопросы кинематики деформируемого твердого тела (на основе волновых процессов и с применением случайных функций). Сборник научных трудов. Серия «Физико-химическая». Ставрополь: СевКавГТУ. – Вып. 1. – 63-68.

THEORETICAL RESEARCH OF LONGITUDINAL WAVES OF DEFORMATION IN EAR OF CORN AT HIS DISSOCIATING FROM STEM

Abstract. In the article a mathematical model is presented for a corn-cob as equivalent homogeneous bar.

Key words: corn, ear, mathematical model, waves of deformation, bar-waveguide, equivalent bar.