

К ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ НА ВИБРОРЕШЕТАХ

Леонид Тищенко, Сергей Харченко

*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства
имени Петра Василенко*

Ул. Артема 44, Харьков, Украина. E-mail: khstua@lin.com.ua

Leonid Tishchenko, Sergei Kharchenko

Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture

St. Artem 44, Kharkiv, Ukraine. E-mail: khstua@lin.com.ua

Аннотация. В работе исследовано применение методов механики сплошных сред при моделировании динамики зерновых смесей по решетным поверхностям с учетом периодичности отверстий.

Ключевые слова: зерновая смесь, решето, вибрация, сепарация.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Эффективные физические модели, описывающие кинематику и динамику движущейся зерновой смеси (ЗС) по виброрешетам, как правило, основаны на методах механики сплошных сред [2, 3, 8, 9, 11-18, 20]. Одними из первых работ, где применялась аналогия между движением вязкой несжимаемой жидкости и ЗС, находящейся в псевдооживленном состоянии под воздействием вибрационных колебаний решета, по видимому являются [5, 19].

В данной работе на основе методов механики сплошных сред исследована возможность построения математической модели, с помощью которой обосновываются основные динамические и кинематические характеристики движения псевдооживленного зернового слоя по наклонному плоскому виброрешету, совершающего гармонические колебания в своей плоскости.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

В последнее время достигнут существенный прогресс в понимании основных закономерностей динамики сепарируемых ЗС. Так, в работах [12-17], с помощью методов гидродинамики разработаны различные варианты математических моделей и исследованы закономерности движения псевдооживленных ЗС по плоским и цилиндрическим виброрешетам. Основным результатом этих работ состо-

ит в создании основ теории виброрешетного сепарирования ЗС. Следует отметить, что в работах [12-17] при постановке и решении краевых задач для уравнения Навье – Стокса авторы ограничились одномерным случаем гармонических колебаний и линейным приближением. Это, с одной стороны, позволило получить решение в замкнутой аналитической форме и на его основе проанализировать в рамках линейного приближения основные закономерности движения зернового слоя по виброрешетам. А, с другой стороны, такие ограничения, не позволяют в полной мере учесть влияние колебаний виброрешета на процесс движения ЗС. Кроме того, уравнения Навье – Стокса, решения которых моделируют движение ЗС по виброрешету, являются нелинейными. Учет нелинейных членов позволяет с принципиально новых позиций исследовать движение ЗС. Поскольку над колеблющимся виброрешетом могут возникать вихревые стационарные потоки, вызываемые силами, величина которых может быть определена только с использованием более высоких приближений, чем линейная теория. Понятно, что такие потоки могут оказывать существенное влияние на эффективность процесса сепарации ЗС. В этой связи актуальной является проблема разработки математических моделей, учитывающих нелинейный характер движения ЗС по виброрешетам.

ПОСТАНОВКА ЗАДАНИЯ

В данной работе на основе методов механики сплошных сред движение псевдооживленного зернового слоя моделируем решением краевой задачи для нелинейных уравнений Навье – Стокса. Виброрешето рассматриваем как периодическую структуру с периодом, определяемым расположением отверстий. Взаимодействие виброрешета со

слоем псевдооживленного зернового слоя моделируем краевыми условиями для нормальных и касательных к рабочей поверхности решета компонентами поля скорости. Причем, нормальные компоненты скорости задаем на поверхности расположения отверстий, а касательные - на поверхности их поперечных перемычек. Краевые условия на свободной поверхности псевдооживленного зернового слоя ставят в равенство нулю избыточное давление и компоненты тензора напряжений.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Решение нелинейных уравнений Навье – Стокса, удовлетворяющее указанным выше краевым условиям, строим методом последовательных приближений. Решение первого приближения зависит гармонически от времени с частотой, равной частоте колебаний решета и представляет собой поле скорости псевдооживленной ЗС в линейном приближении. Решение второго приближения, наряду с членами, периодически зависящими от времени и меняющихся с удвоенной частотой колебаний виброрешета, содержат постоянные составляющие. Эти постоянные составляющие описывают эффект возникновения стационарных (не зависящих от времени) потоков. Эти потоки возникают вблизи поверхности колеблющегося виброрешета. Скорость этих потоков остается меньше колебательной скорости ЗС в линейном приближении. Не составляет труда получение решений более высоких приближений, чем второе. Однако, для теории медленных потоков достаточно уравнений первого и второго приближений.

Для краевой задачи в первом приближении решение строится с помощью преобразования Лапласа по времени. В результате получены парные сумматорные уравнения, которые методом задачи Римана-Гильберта [10] сведены к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов разложения в ряды Фурье компонент поля скорости.

Уравнения второго приближения, после усреднения по времени, сведены к неоднородному уравнению Пуассона. Это уравнение движения псевдооживленного зернового слоя под действием внешних объемных сил –

средней по времени объемной силы, определяемой из решения уравнений первого приближения. Его решение описывает поле скорости стационарных потоков, возникающих в псевдооживленном слое ЗС.

Пусть слой ЗС толщиной h (рис.1) движется по плоскому решету. Введем декартовую систему координат x_1, x_2, x_3 таким образом, чтобы поверхность решета совпадала с плоскостью x_1, x_3 . Предположим, что решето наклонено к горизонту под углом θ и совершает вдоль оси x_1 гармонические колебания с амплитудой A и круговой частотой ω . Под воздействием этих колебаний зерновой слой находится в псевдооживленном состоянии. В этом состоянии движения псевдооживленной ЗС можно рассматривать как течение несжимаемой вязкой псевдожидкости [11].

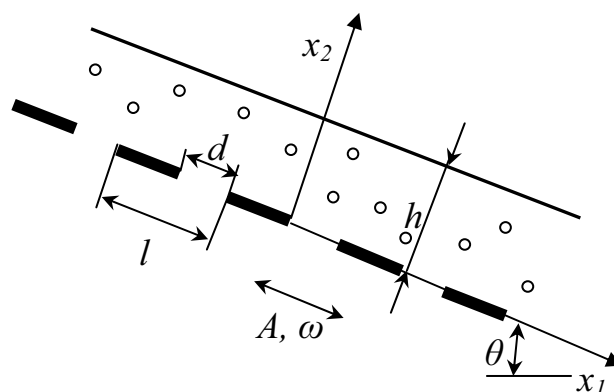


Рис.1. Схема движения зерновой смеси по наклонному виброрешету
Fig. 1. The scheme of movement of grain mixture on an inclined vibrating sieve

Тогда поле скорости \vec{U} и избыточное давление P должны удовлетворять следующей системе уравнений в эйлеровых координатах:

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho (\vec{U}, \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \mu \Delta \vec{U} + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

$$\text{div} \vec{U} = 0, \quad (2)$$

где: ρ и μ – соответственно, усредненные значения плотности и эффективного коэффициента динамической вязкости псевдооживленного зернового слоя [4], \vec{g} – ускорение свободного падения. Предположим, что величины ρ и μ известны и не зависят от

К ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД ДЛЯ ОПИСАНИЯ
ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ НА ВИБРОРЕШЕТАХ

пространственных переменных x_1, x_2, x_3 . В дальнейшем ограничимся случаем плоского течения. Будем считать, что поле скорости и избыточное давление не зависят от пространственной переменной x_3 . Тогда уравнения (1), (2) можно представить в виде:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \Delta U_1 + g \sin \theta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu \Delta U_2 - g \cos \theta, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0. \quad (5)$$

Здесь: $\nu = \mu / \rho$ – кинематический коэффициент вязкости псевдожидкости, U_1 и U_2 – соответственно, компоненты поля скорости вдоль осей x_1 и x_2 . Кроме (3)-(5), поле скорости и избыточное давление должны удовлетворять краевым условиям на поверхности решета и свободной поверхности зернового слоя.

Потребуем, чтобы на свободной поверхности при $x_2 = h$ избыточное давление и тензор напряжений обращались в нуль:

$$P|_{x_2=h} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=h} = 0, \\ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_2=h} = 0. \quad (6)$$

Перфорированную поверхность решета будем рассматривать как периодическую структуру вдоль оси x_1 с периодом l , определяемым взаимным расположением отверстий с усредненным диаметром d . Тогда на отверстиях нормальная к плоскости решета компонента скорости:

$$U_2 \Big|_{x_2=0} = V_0, \quad (7)$$

а на неперфорированной части решета касательная компонента скорости:

$$U_1 \Big|_{x_2=0} = A \omega \sin \omega t. \quad (8)$$

Следует отметить, что условие (7) моделирует прохождение зерен через отверстия с

некоторой средней скоростью V_0 , а условие (8) хорошо известно в гидродинамике [1]. В случае псевдожидкости, моделирующей ЗС, последнее условие исключает ее скольжение по решету и хорошо выполняется при малых углах θ наклона решета.

Сформулированная краевая задача (3)-(8) моделирует движение ЗС без учета условий на концах решета. Кроме того, в процессе просеивания части ЗС (см. условие (7)), толщина слоя изменяется. Поэтому будем предполагать, что объем просеиваемой части ЗС достаточно мал и понимать под h некоторое усредненное значение толщины ее слоя.

Несмотря на сделанные упрощения при постановке задачи, получение ее решения в аналитическом виде, по-видимому, невозможно, поскольку уравнения (3) и (4) являются нелинейными. Однако, для построения решения этой задачи возможно применение метода последовательных приближений [6], если выполняется неравенство:

$$Re \ll \frac{U_0}{\sqrt{2\nu\omega}}, \quad (9)$$

где: U_0 – характерный масштаб колебательной скорости псевдооживленной ЗС, $Re = A\omega l / \nu$ – число Рейнольдса. Используя результаты, полученные в [7], можно показать, что неравенство (9) имеет место для широкого класса процессов виброрешетной сепарации зерновых смесей.

В соответствии с методом последовательных приближений представим давление и скорость псевдооживленного зернового слоя в виде разложения в ряды:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots, \\ \vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \dots, \quad (10)$$

где: значения индекса определяют порядок малости соответствующей величины.

Подставляя (10) в (3)-(5) и группируя члены одного порядка малости, получаем в нулевом приближении:

$$P_0 = \rho g \cos \theta (h - x_2), \\ U_{01} = \frac{g \sin \theta}{2\nu} [h^2 - (h - x_2)^2], \quad (11) \\ U_{02} = 0$$

а для первого и второго приближения следующие уравнения:

$$\frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P_1 + \nu \Delta \vec{U}_1, \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \vec{U}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{U}_2}{\partial t} + (\vec{U}_1, \nabla) \vec{U}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla P_2 + \nu \Delta \vec{U}_2. \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \vec{U}_2 = 0.$$

Не составляет особых усилий получение уравнений более высоких приближений, чем второе. Однако, для моделирования медленных потоков, достаточно уравнений первого и второго приближений.

Давление и скорость в первом приближении должны удовлетворять краевым условиям (6) и (8) и начальным условиям:

$$P_1|_{t=0} = 0, \quad \vec{U}_1|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

Уравнения второго приближения описывает процесс установления течения. Исключая его из рассмотрения, усредним (13) по времени. Тогда вместо (13) имеем:

$$\overline{(\vec{U}_1, \nabla) \vec{U}_1} = -\frac{1}{\rho} \overline{\nabla P_2} + \nu \overline{\Delta \vec{U}_2}, \quad (15)$$

где черта обозначает операцию усреднения.

На свободной поверхности зернового слоя давление и поле скорости второго приближения должны удовлетворять условию (6), а на поверхности решета поле скорости равно нулю. Таким образом, исходная задача нелинейной динамики сведена к построению решений уравнений (12), (15).

ВЫВОДЫ

Таким образом, использование метода последовательных приближений позволит решать задачу о плоском движении псевдооживленного зернового слоя на плоском решете, совершающем гармонические колебания. Использование предложенного направления позволит получить расчетные формулы для поля скоростей, учитывающие как характеристики колебаний решета (амплитуда и частота колебаний), так и его конструктивные параметры – размеры отверстий и период их повторения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Betgelor Dj. 1973. Vvedenie v dinamiku zhidkosti. – M. : Mir. – 758.
2. Brilliantov N. Proschel T. 2003. Hydrodynamics and transport coefficients for Granlat Gases. arxiv: cond-mat 0301152. V. 1. 10 Jan.
3. Dufty James W. 2003. Hydrodynamics Models for Granular Gases. arxiv: cond-mat 0302170, V.1, 10 Feb.
4. Kharchenko S. A., Tishchenko L. N. 2013. Algoritm rascheta effektivnogo koefitsienta dinamicheskoi vyazkosti puzirkovoi psevdozhidkosti, modelirujushchei separiruemuju zernovuyu smes. Vibrasii v tehnike i tehnologiyah. – Vinitnya: VNAU, – 64-72.
5. Kosilov O. N. Issledovanie vibrovязkikh svoistv sipuchih selskohozyaistvennih materialov: avtoref. dis. na soiskanie nauch. stepeni kand. tehn. Nauk. - Rostov na Donu : RISHM, 1966. – 20.
6. Lozhnie ultrazvukavie polya / Pod redaksieyu L.D. Rozenberga. - M. : Nauka, 1968.- 357.
7. Modelirovanie protsesiv zernovih separatoriv [Tishchenko L.N., Mazorenko D.I., Piven M.V., Kharchenko S.A., Bredikhin V.V., Mandrika A.V.]. – Kharkiv: KHNTUSG, “Miskdruk”, 2010.- 360.
8. Paolotti D., Cattuto C., Marini V., Marconi D., Puglisi A. / arxiv: cond-mat 0207601. V.1. 25 Jul., 2002.
9. Protodiakonov I. O. Chesnokov Ju. G. 1982. Gidromehanika psevdoozhizhennogo sloya. – L.: khimiya, – 264.
10. Shestopalov V. P. 1971. Metod zadachi Rimana–Gilberda v teorii difraktsii I raspostranenie elektromagnitnih voln. – Kharkiv : Izdatelstvo Kharkiv Universitet. - 400.
11. Tishchenko L.N. 2004. Intensifikasija separirovania zerna. – Kharkiv: Osnova, - 224.
12. Tishchenko L. N., Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. 2010. Gidrodinamika separirovania zerna. - Kharkiv: “Miskdruk”. - 174.
13. Tishchenko L. N., Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. 2011. Vibroreshotnaya separasija zernovih smesei. – Kharkiv : “Miskdruk”, - 280.
14. Tishchenko L. N., Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. 2012. Kolebania zernovih potokov na vibroreshetah. – Kharkiv : “Miskdruk”. - 267.
15. Tishchenko L. N. 2012. Vibroseparirovanie ploskim reshetom neodnorodnogo sloya zerna. MOTROL «Motorization and power industry in

agriculture». – Poland : Lublin, – Vol. 14 D. – 21-30.

16. Tishchenko L. N. 2012. Kolebatelnie protsesi v zernovih smesiah na reshetah vibrotsentrobezhnih separatoriv. MOTROL «Motorization and power industry in agriculture». – Poland: Lublin, – Vol. 14 D. – 30-39.

17. Tishchenko L. N. 2012. Modelirovanie potoka zernovogo sloya na reshete s uchetom proseivaniya. MOTROL «Motorization and power industry in agriculture». – Poland: Lublin, – Vol. 14 D. – 39-48.

18. Tishchenko L. N., Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. 2011. On velocity profiles of an inhomogeneous vibrofluidized grain bed on a shaker. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, – Vol. 84, N 3. – 509-514.

19. Zaharov N. M. 1966. Ob analogii vibriru-

emogo sloya z vyazkoi zhidkostiyyu. Dokladi MIISP. - M., T.3, Vol. 1 – 201-210.

20. Zaika P. M. 1977. Dinamika vibrotsionnih zernoochistitelnih mashin. – M. : Mashinostroenie. – 278.

**TO THE APPLICATION METHODS OF
CONTINUUM MECHANICS TO
DESCRIBE THE MOTION OF GRAIN
MIXES ON VIBRATING SIEVES**

Summary. We have investigated the application of the methods of continuum mechanics for modeling the dynamics of grain mixes on the sieve surfaces with the periodicity of the holes.

Key words: grain mixture, sieve, vibration, separation.