

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ, УГЛОВ И СКОРОСТЕЙ КОЛЁС ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНОГО МАШИННО-ТРАКТОРНОГО АГРЕГАТА

*Роман Антощенко<sup>1</sup>, Анатолий Лебедев<sup>1</sup>, Виктор Толстолуцкий<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка*

*ул. Артема 44, Харьков, 61002, Украина, e-mail: [roman.tiaxntusg@gmail.com](mailto:roman.tiaxntusg@gmail.com)*

<sup>2</sup>*Харьковское конструкторское бюро по машиностроению им. А.А.Морозова ул. Плехановская, 126, Харьков, 61001, Украина, e-mail: [tolstoluckiy@inbox.ru](mailto:tolstoluckiy@inbox.ru)*

*Roman Antoshchenkov<sup>1</sup>, Anatoliy Lebedev<sup>1</sup>, Viktor Tolstolutskiy<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Kharkiv Petro Vasylenko national technical university of agriculture*

*st. Artema 44, Kharkiv, 61002, Ukraine, e-mail: [roman.tiaxntusg@gmail.com](mailto:roman.tiaxntusg@gmail.com)*

<sup>2</sup>*Kharkiv Morozov machine building design bureau*

*st. Plekhanivska 126, Kharkiv, 61001, Ukraine, e-mail: [tolstoluckiy@inbox.ru](mailto:tolstoluckiy@inbox.ru)*

**Аннотация.** Комбинированные сельскохозяйственные машинно-тракторные агрегаты представляют собой многоэлементные мобильные машины. При изменении структуры исследуемых многоэлементных агрегатов необходимо заново перестраивать математическую модель, что приводит к увеличению затрат времени на исследование. Проведенный анализ работ направленных на изучение динамики машинно-тракторных агрегатов показал, что существующие методологии исследований не позволяют изучать динамику агрегатов произвольных структур. Для решения задач динамики негетерогенных систем необходимо формировать уравнения динамики и обосновать уравнения связей. В работе обоснованы кинематические связи пространственной математической модели движения многоэлементных мобильных машин, на примере сельскохозяйственных машинно-тракторных агрегатов. Сформированы уравнения кинематических связей трактора, бункера для посевного материала и сеялки. Обоснованы уравнения связей и скоростей вращения колёс. Представлены схемы проекций скоростей точек рамы трактора, бункера и сеялки на плоскости. В качестве управляющего воздействия принят угол поворота управляемых колёс. Для каждого элемента агрегата обосновано количество степеней свободы. В качестве уравнений связей элементов агрегатов принято равенство проекций скоростей точек соединения на глобальную систему координат.

Формирование кинематических связей многоэлементного машинно-тракторного агрегата на примере посевного агрегата позволяет исследовать пространственную динамику машины. Кинематические связи необходимые для моделирования движения агрегата разделены на структурные части, не зависящие друг от друга. Перестановка элементов местам не влияет на математическую модель динамики в целом.

Методология позволяет исследовать различные типы связей между элементами мобильных машин. В случае изучения движения многоэлементного по-

севного сельскохозяйственного агрегата упрощаются исследования влияния компоновочных схем на динамику его функционирования.

**Ключевые слова:** кинематические связи, математическая модель, трактор, бункер, сеялка.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Сельскохозяйственные машинно-тракторные агрегаты представляют собой многоэлементные мобильные машины. Комбинированные посевные агрегаты состоят из трёх элементов, таких как трактор, ёмкость для посевного материала и сеялки, которые движутся последовательно друг за другом [1]. Основные компоновочные схемы посевных агрегатов, у которых ёмкость и сеялка могут менять последовательность расположения [2] или ёмкость для посевного материала может находиться на тракторе и быть жёстко связанная с ним. Динамика данных многоэлементных машин остаётся недостаточно исследованной. При изменении структуры исследуемой многоэлементной мобильной машины необходимо заново перестраивать математическую модель, что приводит к увеличению затрат времени на исследование.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ПУБЛИКАЦИЙ И ИССЛЕДОВАНИЙ

Для исследования динамики многоэлементных машин применяют уравнения Лагранжа 2-го рода [3, 4]. Существует работа [5] в которой движение мобильной машины изучают совместно с полуприцепом с помощью уравнений Лагранжа 1-го рода. Математическая модель движения одной машины [6-8] неоднократно была исследована. Исследована динамика и устойчивость мобильной машины [9-12]. Сельскохозяйственные машины и агрегаты в исследованиях динамики представляли в виде одно, двух и трёх массовых моделях в работах [13-16].

В приведенных работах математическая модель движения многоэлементной машины является целостной и при изменении структуры или внутренних связей, необходимо перестраивать её заново,

что приводит к увеличению затрат труда и времени на исследования. Если число элементов более двух и расстояние от задней оси мобильной машины до точки прицепа больше нуля, то не существует решения для уравнений Лагранжа 2-го рода [17].

Из этого следует, что для корректного решения задач динамики неголономных систем необходимо сформировать основные уравнения динамики [18] и обосновать уравнения связи, как это сделано на примере работ [19] для плоскопараллельного движения машинно-тракторного агрегата.

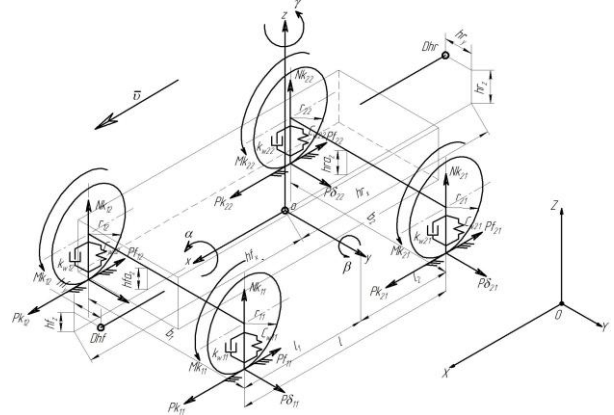
**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Целью данной работы является формирование кинематических связей, углов и скоростей колёс пространственной математической модели движения многоэлементного машинно-тракторного агрегата. Предложенная методология при изменении структуры исследуемой многоэлементной мобильной машины позволит перестраивать математическую модель с минимальными затратами.

**ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА**

Для решения поставленной задачи, рассмотрим пространственную динамическую модель колёсного трактора классической компоновки с передними управляемыми колёсами, которая представлена на рис. 1 и используем следующие обозначения:  $HOYZ$  – глобальная система координат;  $hoxyz$  – связанная система координат; т.  $o$  – центр масс трактора; т.  $O$  – центр глобальной системы координат;  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы поворота модели вокруг соответствующих осей  $x, y, z$ ;  $m$  – масса трактора;  $J_x, J_y, J_z$  – приведенные моменты инерции трактора к соответствующим осям;  $v$  – поступательная скорость движения;  $Dhf, Dhr$  – передняя и задняя точки навески (присоединения технологического оборудования);  $l$  – база трактора;  $l_1$  – расстояния от центра масс до оси передних колёс;  $l_2$  – расстояния от центра масс до оси задних колёс;  $b_1$  – колея передних колёс;  $b_2$  – колея задних колёс;  $hfa_z, hra_z$  – расстояние от центра масс трактора до оси передних и задних колёс по оси  $z$ ;  $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$  – радиус переднего левого, переднего правого, заднего левого, заднего правого колёс;  $Pk_{11}, Pk_{12}, Pk_{21}, Pk_{22}$  – касательная сила тяги на переднем левом, переднем правом, заднем левым, задним правым колёсами;  $Pf_{11}, Pf_{12}, Pf_{21}, Pf_{22}$  – сила сопротивления качению переднего левого, переднего правого, заднего левого, заднего правого колёс;  $P\delta_{11}, P\delta_{12}, P\delta_{21}, P\delta_{22}$  – сила бокового увода переднего левого, переднего правого, заднего левого, заднего правого колёс;  $Nk_{11}, Nk_{12}, Nk_{21}, Nk_{22}$  – нормальная сила реакции на переднем левом, переднем правом, заднем левым, задним правым колёсами;  $Cw_{11}, Cw_{12}, Cw_{21}, Cw_{22}$  – приведенная жёсткость шины переднего левого, переднего правого, заднего левого, заднего правого колёс;  $kw_{11}, kw_{12}, kw_{21}, kw_{22}$  – приведенная податли-

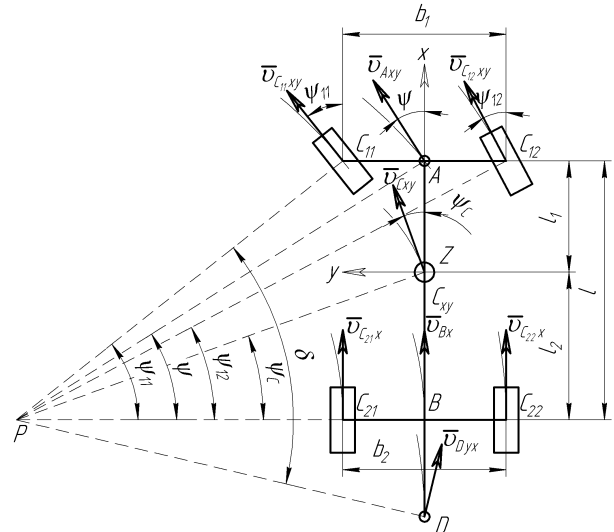
вость шины переднего левого, переднего правого, заднего левого, заднего правого колёс;  $Mk_{11}, Mk_{12}, Mk_{21}, Mk_{22}$  – крутящий момент на переднем левом, переднем правом, заднем левым, задним правым колёсами. Приведенные обозначения аналогичны для рис. 4 и рис. 6.



**Рис. 1.** Пространственная динамическая модель колёсного трактора классической компоновки с передними управляемыми колёсами

**Fig. 1.** The spatial dynamic model of wheeled classic layout tractor with front steering wheels

Рассмотрим рис. 2, где представлена проекция скоростей характерных точек рамы трактора на ее плоскость, соответствующие углы и положение мгновенного центра скоростей рамы – т.  $P$ .



**Рис. 2.** Распределение скоростей в плоскости рамы трактора

**Fig. 2.** The velocity distribution in the plane of the tractor frame

В качестве управляющего воздействия на агрегат примем угол поворота управляемых колёс  $\psi$ . Выразим проекции скоростей характерных точек рамы на связанную с ней плоскость  $Sxy$  и проекцию угловой скорости рамы на перпендикулярную ей ось  $Sz$  через проекцию скорости т.  $B$  на плоскость  $Sxy$ . Очевидно:  $v_{Bx} = v_{Axy} \cos \psi$ , откуда:

$$v_{Axy} = \frac{v_{Bx}}{\cos \psi} \tag{1}$$

Заметим, что угол  $\psi$  достаточно острый, чтобы формула (1) не вырождалась.

Так как угол  $\psi_C$  для проекции скорости центра масс легко находится из выражения:

$$\operatorname{tg} \psi_C = \frac{BC}{PB} = \frac{BC}{l} \frac{l}{PB} = \lambda \operatorname{tg} \psi, \quad (2)$$

где:  $\lambda = \frac{BC}{l} = \frac{l_2}{l}$ ,

то  $v_{Cxy} = v_{Bx} \frac{PC}{PB} = v_{Bx} \cos \psi_C$ . (3)

Можно найти:

$$\cos \psi_C = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_C}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \psi}}$$

и  $\sin \psi_C = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \psi_C}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \operatorname{ctg}^2 \psi}}$ .

Поэтому:

$$v_{Cxy} = v_{Bx} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \psi}}. \quad (4)$$

Аналогично:

$$v_{C_{21}x} = v_{Bx} \frac{PC_{21}}{PB} = v_{Bx} \frac{PB - 0,5b}{PB} =$$

$$= v_{Bx} \left( 1 - 0,5 \frac{b}{l} \frac{l}{PB} \right) = v_{Bx} (1 - \mu \operatorname{tg} \psi) \quad ; \quad (5)$$

$$v_{C_{22}x} = v_{Bx} \frac{PC_{22}}{PB} = v_{Bx} \frac{PB + 0,5b}{PB} =$$

$$= v_{Bx} \left( 1 + 0,5 \frac{b}{l} \frac{l}{PB} \right) = v_{Bx} (1 + \mu \operatorname{tg} \psi) \quad ; \quad (6)$$

$$v_{C_{11}xy} = \frac{v_{C_{21}x}}{\cos \psi_{11}} = v_{C_{21}xy} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{11}}, \quad (7)$$

где:  $\mu = 0,5 \frac{b}{l}$ .

Так как:

$$\operatorname{ctg} \psi_{11} = \frac{PB - 0,5b}{l} = \frac{PB}{l} - \mu = \operatorname{ctg} \psi - \mu,$$

$$\operatorname{ctg} \psi_{12} = \operatorname{ctg} \psi + \mu,$$

а  $\operatorname{tg} \psi_{11} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{1 - \mu \operatorname{tg} \psi}$ ,  $\operatorname{tg} \psi_{12} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{1 + \mu \operatorname{tg} \psi}$ ,

то:

$$v_{C_{11}xy} = \frac{v_{C_{21}x}}{\cos \psi_{11}} = v_{C_{21}xy} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{11}} =$$

$$= v_{C_{21}xy} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + (1 - \mu \operatorname{tg} \psi)^2}}{1 - \mu \operatorname{tg} \psi} = v_{Bx} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + (1 - \mu \operatorname{tg} \psi)^2} \quad (8)$$

$$v_{C_{12}xy} = \frac{v_{C_{22}x}}{\cos \psi_{12}} = v_{C_{22}xy} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_{12}} =$$

$$= v_{C_{22}xy} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + (1 + \mu \operatorname{tg} \psi)^2}}{1 + \mu \operatorname{tg} \psi} = v_{Bx} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + (1 + \mu \operatorname{tg} \psi)^2} \quad (9)$$

Угловая скорость поворота трактора в плоскости рамы определяется:

$$\omega_z = \frac{v_{Bx}}{PB} = \frac{v_{Bx}}{l} \frac{l}{PB} = \frac{v_{Bx} \operatorname{tg} \psi}{l}. \quad (10)$$

Итак, возьмем в качестве независимых скоро-

стей трактора псевдоскорости  $v_{Bx}, v_{Bz}$  ( $v_{By} \equiv 0$ ), и  $\omega_x, \omega_y$  ( $\omega_z$  определяется из (10)).

Запишем кинематическое выражение для скорости т. В:

$$\vec{v}_B^{CB} = \vec{v}_C^{CB} + \vec{\omega}^{CB} \times \vec{CB}^{CB} = T_{a6c}^{TP} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -l_2 & 0 & -h \end{vmatrix} =$$

$$= T_{a6c}^{TP} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_y h \\ \omega_x h - \omega_z l_2 \\ \omega_z l_2 \end{bmatrix}$$

$$T_{a6c}^{TP} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \quad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} C_\beta C_\gamma + S_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha S_\gamma & -S_\beta C_\gamma + S_\alpha C_\beta S_\gamma \\ S_\alpha S_\beta C_\gamma - C_\beta S_\gamma & C_\alpha C_\gamma & S_\alpha C_\beta C_\gamma + S_\beta S_\gamma \\ C_\alpha S_\beta & -S_\alpha & C_\alpha C_\beta \end{bmatrix}$$

где:  $T_{a6c}^{TP}$  – матрица поворота от абсолютной к связанной системе координат трактора (большими буквами обозначены:  $C$  –  $\cos$ ,  $S$  –  $\sin$ , соответственно, углов, обозначенных нижним индексом) [20].

Откуда получаем 3 уравнения, связывающие 7 скоростей ( $\omega_z$  уже выражено из (10), а  $v_{By} \equiv 0$ ):

$$t_{11} \dot{X} + t_{12} \dot{Y} + t_{13} \dot{Z} - \omega_y h = v_{Bx}$$

$$t_{21} \dot{X} + t_{22} \dot{Y} + t_{23} \dot{Z} + \omega_x h - \omega_z l_2 = 0$$

$$t_{31} \dot{X} + t_{32} \dot{Y} + t_{33} \dot{Z} - \omega_y l_2 = v_{Bz}$$

Таким образом, имеем, например:

$$v_{Bx} = t_{11} \dot{X} + t_{12} \dot{Y} + t_{13} \dot{Z} - h \omega_y$$

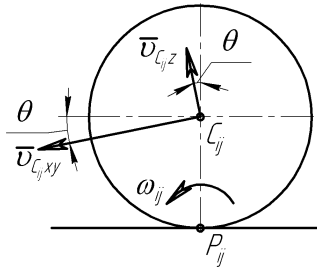
$$\omega_x = \frac{\lambda t_{11} \operatorname{tg} \psi - t_{21}}{h} \dot{X} + \frac{\lambda t_{12} \operatorname{tg} \psi - t_{22}}{h} \dot{Y} +$$

$$+ \frac{\lambda t_{13} \operatorname{tg} \psi - t_{23}}{h} \dot{Z} - \lambda \operatorname{tg} \psi \omega_y, \quad (12)$$

$$v_{Bz} = t_{31} \dot{X} + t_{32} \dot{Y} + t_{33} \dot{Z} - l_2 \omega_y$$

Отсюда видно, что без учета неголономных связей рама имеет как твердое тело 6 степеней свободы, а, значит, 6 независимых скоростей –  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ . Учет заданности угла  $\psi$  и неголономной связи – мгновенного центра скоростей в плоскости  $S_{xy}$ , приводит к тому, что независимых скоростей становится 4 –  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, \omega_y$ , а скорости любых точек и две составляющие угловой скорости находятся по формулам (1)-(10), (12).

С учетом вращения колес число степеней свободы возрастает еще на 4. Однако их угловые скорости можно выразить через проекции скоростей тт.  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{21}$  на плоскость  $S_{xy}$ . Рассмотрим рис. 3.



**Рис. 3.** К определению угловой скорости колеса  
**Fig. 3.** To definition of wheel speed

Вначале учтем, что модуль перпендикулярной к плоскости рамы составляющей скорости центра колеса  $\vec{v}_{C_{ij}z}$  в условиях реальной эксплуатации достаточно мал. По крайней мере, меньше составляющей скорости центра колеса в плоскости рамы  $\vec{v}_{C_{ij}xy}$ . Кроме того, маленьким будет и угол  $\theta$  – угол между нормалью к плоскости рамы и вертикалью, т.е. угол между плоскостью рамы и горизонтальной плоскостью. Поэтому можно пренебречь влиянием этой составляющей на величину угловой скорости колеса. Итак, угловая скорость колеса при этом предположении будет:

$$\omega_{ij} = \frac{v_{C_{ij}xy}}{Z_{C_{ij}} \cos \theta}, \quad (13)$$

где:  $Z_{C_{ij}}$  - аппликата центра колеса в абсолютной системе координат.

Найдем скорость шарнира  $D$ . Для этого найдем вектор скорости т.  $D$  в абсолютной системе координат:

$$\vec{v}_D^{abc} = \vec{v}_C^{abc} + \vec{\omega}^{abc} \times \overrightarrow{CD}^{abc} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + T_{cb}^{abc} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ h_{rx} & h_{ry} & h_{rz} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

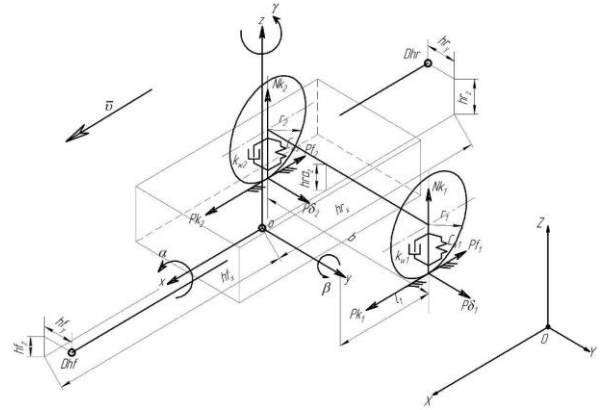
где:  $T_{tp}^{abc} = T_{abc}^{tp}$  - транспонированная матрица из (11),  $h_{rx}$ ,  $h_{ry}$ ,  $h_{rz}$  – расстояния до точки присоединения технологических модулей в соответствии с рис. 1.

Переведем теперь этот вектор в СК бункера, прицепленного к трактору в шарнире  $D$  (рис. 2,  $A^B$ , рис. 4). Будем считать, что углы  $\alpha^B = \alpha$ ,  $\beta^B = \beta$ ,  $\gamma^B = \gamma$  (рис. 4) задают ориентацию осей связанной системы координат бункера относительно абсолютной системы координат. Тогда получим:

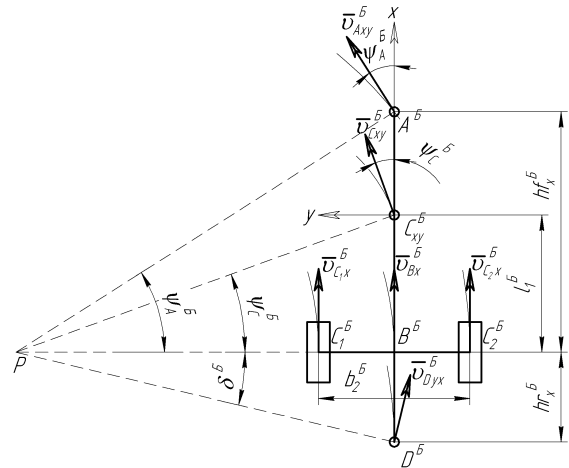
$$\vec{v}_A^B = \begin{bmatrix} v_{Ax}^B \\ v_{Ay}^B \\ v_{Az}^B \end{bmatrix} = T_{abc}^B \vec{v}_D^{abc}, \quad (15)$$

где:  $T_{abc}^B = \begin{bmatrix} t_{11}^B & t_{12}^B & t_{13}^B \\ t_{21}^B & t_{22}^B & t_{23}^B \\ t_{31}^B & t_{32}^B & t_{33}^B \end{bmatrix}$ .

Динамическая модель бункера для посевного материала представлена на рис. 4, а распределение скоростей в плоскости на рис. 5.



**Рис. 4.** Динамическая модель бункера  
**Fig. 4.** Dynamic model of the bunker



**Рис. 5.** Распределение скоростей в плоскости бункера

**Fig. 5.** The velocity distribution in the plane of the bunker

Нарисуем распределение скоростей точек рамы бункера по аналогии с рис. 2.

Тогда очевидно:

$$\psi^B = \arctg \frac{v_{Ay}^B}{v_{Ax}^B}, \quad (16)$$

$$\omega_z^B = \frac{v_{Axy}^B}{A^B P^B} = \frac{v_{Axy}^B}{A^B P^B} \frac{A^B B^B}{A^B B^B} = \frac{v_{Axy}^B \sin \psi^B}{A^B B^B} = \frac{v_{Ay}^B}{A^B B^B}, \quad (17)$$

$$\vec{v}_C^B = \vec{v}_A^B - \vec{\omega}^B \times \overrightarrow{C^B A^B}. \quad (18)$$

Из последнего выражения, переписанного в абсолютной системе координат, получим:

$$\begin{aligned} \dot{X}^B &= v_{Ax}^B + \omega_z^B (t_{11}^B h_{ry} - t_{21}^B h_{rx}) - t_{11}^B \omega_y h_{rz} + t_{21}^B \omega_x h_{rz} + \\ &+ t_{31}^B (\omega_y h_{rx} - \omega_x h_{ry}), \\ \dot{Y}^B &= v_{Ay}^B + \omega_z^B (t_{12}^B h_{ry} - t_{22}^B h_{rx}) - t_{12}^B \omega_y h_{rz} + t_{22}^B \omega_x h_{rz} + \\ &+ t_{32}^B (\omega_y h_{rx} - \omega_x h_{ry}), \\ \dot{Z}^B &= v_{Az}^B + \omega_z^B (t_{13}^B h_{ry} - t_{23}^B h_{rx}) - t_{13}^B \omega_y h_{rz} + t_{23}^B \omega_x h_{rz} + \\ &+ t_{33}^B (\omega_y h_{rx} - \omega_x h_{ry}) \end{aligned} \quad (19)$$

Это позволяет, как видно, выразить 3 обобщенные скорости  $(\dot{X}^B, \dot{Y}^B, \dot{Z}^B)$  через 2 независимые -  $\omega_x^B, \omega_y^B, \omega_z^B$ .

Совершенно аналогично записываем выражения для скоростей сеялки и на рис. 6 представим про-

пространственную динамическую модель сеялки.

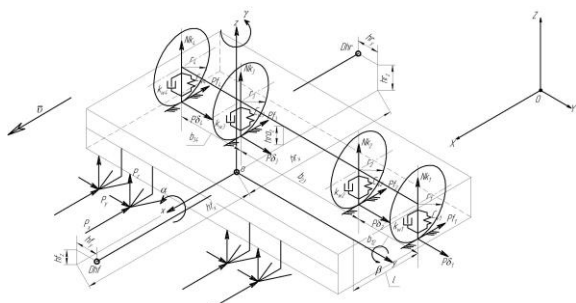


Рис. 6. Динамическая модель сеялки  
Fig. 6. Dynamic model of sowing machine

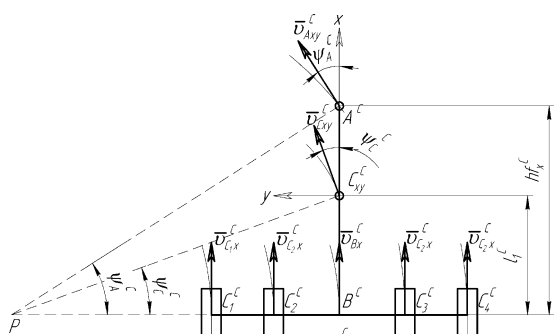


Рис. 7. Распределение скоростей в плоскости сеялки

Fig. 7. The velocity distribution in the plane sowing machines

Скорости т.  $A^C$  сеялки находим аналогично (15) из скорости т.  $D^B$  :

$$\vec{v}_A^C = \begin{bmatrix} v_{Ax}^C \\ v_{Ay}^C \\ v_{Az}^C \end{bmatrix} = T_{abc}^C \vec{v}_D^{abc}, \quad (20)$$

$$\psi^C = \arctg \frac{v_{Ay}^C}{v_{Ax}^C}, \quad (21)$$

$$\omega_z^C = \frac{v_{Axy}^C}{A^C P^C} = \frac{v_{Axy}^C}{A^C P^C} \frac{A^C B^C}{A^C B^C} = \frac{v_{Axy}^C \sin \psi^C}{A^C B^C} = \frac{v_{Ay}^C}{A^C B^C}, \quad (22)$$

$$\vec{v}_C^C = \vec{v}_A^C - \vec{\omega}^C \times \overline{C^C A^C}. \quad (23)$$

Из последнего выражения, переписанного в абсолютной системе координат, получим:

$$\begin{aligned} \dot{X}^C &= v_{Ax}^C + \omega_z^C (t_{11}^C h_{ry} - t_{21}^C h_{rx}) - t_{11}^C \omega_y h_{rz} + t_{21}^C \omega_x h_{rz} + \\ &+ t_{31}^C (\omega_y h_{rx} - \omega_x h_{ry}), \\ \dot{Y}^C &= v_{Ay}^C + \omega_z^C (t_{12}^C h_{ry} - t_{22}^C h_{rx}) - t_{12}^C \omega_y h_{rz} + t_{22}^C \omega_x h_{rz} + \\ &+ t_{32}^C (\omega_y h_{rx} - \omega_x h_{ry}), \\ \dot{Z}^C &= v_{Az}^C + \omega_z^C (t_{13}^C h_{ry} - t_{23}^C h_{rx}) - t_{13}^C \omega_y h_{rz} + t_{23}^C \omega_x h_{rz} + \\ &+ t_{33}^C (\omega_y h_{rx} - \omega_x h_{ry}). \end{aligned} \quad (24)$$

## ВЫВОДЫ

1. Подход предложенный в данной работе позволяет сократить затраты труда и времени на моделирование движения многоэлементных мобильных машин в пространстве при изменении их структур.

Данная методология построения математической модели позволяет с минимальными затратами ресурсов вносить изменения в математический аппарат исследуемого процесса. При изменении структуры исследуемой многоэлементной мобильной машины изменяются только уравнения связи, что позволяет сократить затраты на разработку математической модели.

2. Формирование кинематических связей многоэлементного машинно-тракторного агрегата на примере посевного агрегата позволяет исследовать пространственную динамику машины. Кинематические связи необходимые для моделирования движения агрегата разделены на структурные части, не зависящие друг от друга. Перестановка элементов местам не влияет на математическую модель динамики в целом.

3. Методология позволяет исследовать различные типы связей между элементами мобильных машин. В случае изучения движения многоэлементного посевного сельскохозяйственного агрегата упрощаются исследования влияния компоновочных схем на динамику его функционирования.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антощенко Р.В. 2009. Экспериментальные исследования комбинированного посевного агрегата в составе трактора ХТЗ-150К-09 и сеялки прямого посева АПП-6. Технический сервис АПК, техника и технологии в сельскохозяйственном машиностроении: Сб. науч. тр. ХНТУСХ. 335-339. (Украина).
2. Красовских В.С., Бережнов Н.Н. 2007. Результаты исследования почвообрабатывающего посевного тягово-транспортного агрегата / Весник АГАУ. 57-62.
3. Laceklis-Bertmanis J. and Kronbergs E. 1996. Mathematical model of tractor aggregate / ASAE, St. Joseph, MI. 431-442.
4. Liljedahl J.B., Turnquist P.K., Smith D.W. and Hoki M. 1996. Tractors and Their Power Units / ASAE, St. Joseph, MI. 345-361.
5. Chieh C. 1995. Dynamic modeling of articulated vehicles for automated highway systems / In Proceedings of the American Control Conference, Seattle, USA. 653-657.
6. Антощенко Р.В. 2014. К исследованию нелинейной математической модели движения многоэлементных мобильных машин / Motrol. – Т. 16, №7. 77-83.
7. Лихвенко С.П. 2001. Математическая модель для расчетов распределения ведущих моментов и поэлементной буксования полноприводных тракторов / Повышение надежности восстанавливаемых деталей машин: Вестник ХНТУСХ. Вып 8. Т. 2. 83-86. (Украина).
8. Ловейкин В.С., Бортун В. 2012. Уточнённая математическая модель динамики движения ковшевого элеватора / Motrol. Т. 14, №3. 87-95.
9. Рославцев А.В., Абдула С.Л. 1999. Результаты исследования движения МТА / Тракторы и сельхозмашины. № 10. 14-18.

10. Шуляк М.Л. 2015. Эффективность эксплуатации трактора в агрегате с машиной переменной массы / Сборник научных трудов по материалам Международной научно-технической конференции «Обеспечение экологической безопасности путем создания наукоемких технических средств и технологий в лесном комплексе». Воронеж: ВГЛТА. №. 2. ч. 1. 15-19.
11. Смирнов Г.А. 1990. Теория движения колесных машин. 352.
12. Вейц В. Л., Кочура А. Е. 1976. Динамика машинных агрегатов с двигателями внутреннего сгорания. 384.
13. Антощенко Р.В. 2013. Теоретические исследования движения почвообрабатывающего посевного агрегата при дифференциации массы технологической ёмкости / Механизация сельскохозяйственного производства: Вестник ХНТУСХ. Вып. 135. 158-162. (Украина).
14. Гячев Л.В. 1985. Устойчивость движения сельскохозяйственных машин и агрегатов. 206.
15. Legecuis T., Bourassa P., Laneville A. 1985. On the extension of the gratzmuller critical velocity for locked steering road vehicle to the case of piloted vehicles / Vehicle system dynamics. №14. 615-622.
- A. De Luca. 1995. Modelling and control of nonholonomic mechanical systems / Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems. Springer-Verlag. 301-305.
16. Антощенко Р.В. 2013. Теоретические исследования динамической модели колесного трактора класса 30КН / Motrol. Т. 15. №7. 171-176.
17. Антощенко Р.В., Тищенко Л.Н., Андреев Ю.М. 2015. К построению уравнений динамики многоэлементного машинно-тракторного агрегата / Вибрации в технике и технологиях. Винница. №3(79). 69-79.
18. Антощенко Р.В. 2014. К построению математической модели движения многоэлементных мобильных машин и обоснованию связей между ними / Труды Таврического государственного агротехнологического университета. Вып. 14. Т. 3. 282-288. (Украина).
19. Андреев Ю.М. 2007. Численно-аналитическое решение обратной задачи динамики дискретных систем / Восточно-европейский журнал передовых технологий. № 2/4 (26). 10–13.

**TO DETERMINE THE KINEMATIC LINKS,  
ANGLES AND SPEED WHEEL SPATIAL  
MATHEMATICAL MODEL OF  
MULTIELEMENT TRACTOR UNITS**

**Summary.** Combined agricultural machine and tractor units are multi-element mobile machines. When the structure of the investigated multielement aggregates must be reconstructed a mathematical model, which leads to an increase in time spent on research. The analysis work aimed at understanding the dynamics of the machine and tractor units showed that the existing research methodology does not allow us to study the dynamics of units of arbitrary structures. To solve the problems of the dynamics of nonholonomic systems is necessary to form dynamic equations and justify equations. We justify the kinematic constraints of spatial mathematical model of multi-movement of mobile machinery, on the example of the agricultural machine and tractor units. Formed equation kinematic relations tractor hopper for seed and sowing. Justified by the constraint equations and wheel speed. Schemes velocity projections of points of the tractor frame, hopper and drills on a plane. As a control action adopted by the angle of the steering wheel. For each item, the unit number of degrees of freedom is justified. As elements of the constraint equations units made equal velocity projections connection points on the global coordinate system.

Formation of multielement kinematic relations machine-tractor unit for example sowing unit allows you to explore the spatial dynamics of the machine. Kinematic connection required for modeling the movement of the unit is divided into structural parts, which are independent from each other. Rearrange elements places no effect on the mathematical model of the dynamics of the whole.

The methodology allows to study different types of relationships between the elements of the mobile machines. In the case study of the motion of multielement sowing unit simplifies the study of influence of layout schemes on the dynamics of its operation.

**Key words:** kinematic constraints, mathematical model, tractor, tank, seeder.