

Elżbieta KUBRAK

Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska SGGW
Department of Hydraulic Engineering and Environmental Restoration WAU

Opis rozkładu prędkości przepływu wody w korycie z elementami sprężystymi

Description of the water velocity profiles in open channel flow through submerged flexible stems

Słowa kluczowe: opływ elementów sprężystych, rozkład prędkości przepływu wody nad elementami sprężystymi

Key words: emergent flow with flexible stems, velocity profiles above the flexible stems

Wprowadzenie

Turbulentny przepływ wody nad zatopioną roślinnością ze względu na jej zróżnicowane pochylenie i geometrię ma trójwymiarowy charakter. Jego teoretyczna i laboratoryjna analiza napotyka na wiele trudności. Różnorodność wykorzystywanych w licznych badaniach hydraulicznych typów roślin i zmienność hydraulicznych warunków przepływu wody uniemożliwia porównanie uzyskiwanych wyników badań i wyciągnięcie ogólnych wniosków. Taką analizę hydraulicznych warunków przepływu wody w powiązaniu z charakterystyką roślin i koryta umożliwia zastosowanie opisu matematycznego. Zbudowanie trójwymiarowego opisu przepływu wody w warunkach ruchu

turbulentnego, opartego na równaniach Naviera-Stoksa, jest dziś możliwe, lecz wykorzystywanie jego w praktyce nie jest ekonomicznie uzasadnione, głównie ze względu na konieczność użycia komputerów o odpowiednio dużej mocy obliczeniowej (Moin i Kim 1997). Z tego względu podjęto próbę udoskonalenia jednowymiarowego modelu ustalonego przepływu wody z uwzględnieniem występujących elementów sprężystych, symulujących jednorodną, równomiernie rozmieszczoną roślinność w obszarze przepływu i danych charakterystyk koryta. Wykorzystywanie elementów sztucznych do symulowania roślinności w badaniach hydraulicznych jest uzasadniane niewielką trwałością roślin, która nie pozwala na wielokrotne powtarzanie doświadczeń, oraz jej niewielką wysokością i naturalną zmiennością kształtu łodyg roślin oraz liści. W pracy omówiono metodykę opisu profilu prędkości nad elementami sprężystymi. Wyniki obliczeń i weryfikacji przyjętego opisu będą przedmiotem kolejnej publikacji.

Opis przepływu wody w korycie z elementami sprężystymi

Turbulentny przepływ wody w obszarze z elementami sprężystymi symulującymi roślinność opisuje się w założeniu jednostajnego, ustalonego ruchu wody (Klopstra i in. 1997, Erduran i Kutija 2003, Khublaryan i in. 2004, Baptist 2005, Defina i Bixio 2005). Różniczkowe równanie ustalonego, jednostajnego przepływu wody z równomiernie rozmieszczonymi elementami w przekroju wyprowadza się z bilansu sił masowych i powierzchniowych w jednostkowej objętości obszaru z elementami sprężystymi (rys. 1):

$$\frac{d\tau(z)}{dz} = F_d - \rho g i \quad (1)$$

i nad nimi:

$$\frac{d\tau(z)}{dz} = -\rho g i \quad (2)$$

gdzie:

$\tau(z)$ – naprężenia turbulentne na głębokości z ,

F_d – siła oporu powstała przy opływie m elementów na powierzchni 1 m^2 odniesiona do jednostki objętości,

i – spadek dna koryta,

ρ – gęstość wody,

g – przyspieszenie ziemskie.

Taki zapis siły ciężenia w równaniu (1) nie uwzględnia zmian ciężaru wody w analizowanym obszarze wraz z gęstością występujących w nim elementów sprężystych. W obszarze przepływu bez elementów w równaniu (1) nie występuje siła oporu powstała przy opływie elementów sprężystych (F_d).

Turbulentne naprężenia w wodzie powiązано ze średnią prędkością przepływu zależnością Boussinesqua (Kubrak J. 1998):

$$\tau(z) = \rho v_T \frac{dv(z)}{dz} \quad (3)$$

gdzie:

v_T – współczynnik lepkości wirowej,

$v(z)$ – prędkości przepływu wody na wysokości z nad dnem.

Prandtl założył, że współczynnik lepkości wirowej jest proporcjonalny do pewnej skali prędkości (\hat{V}) i długości drogi mieszania (l_m), jako współczynnik proporcjonalności:

$$v_T = l_m \hat{V} \quad (4)$$

Przyjął także, że skala prędkości jest zbliżona do prędkości fluktuacyjnej, której wartość jest proporcjonalna do poprzecznego gradientu prędkości średniej z tym samym współczynnikiem proporcjonalności (Czernuszenko i Rowiński 1994):

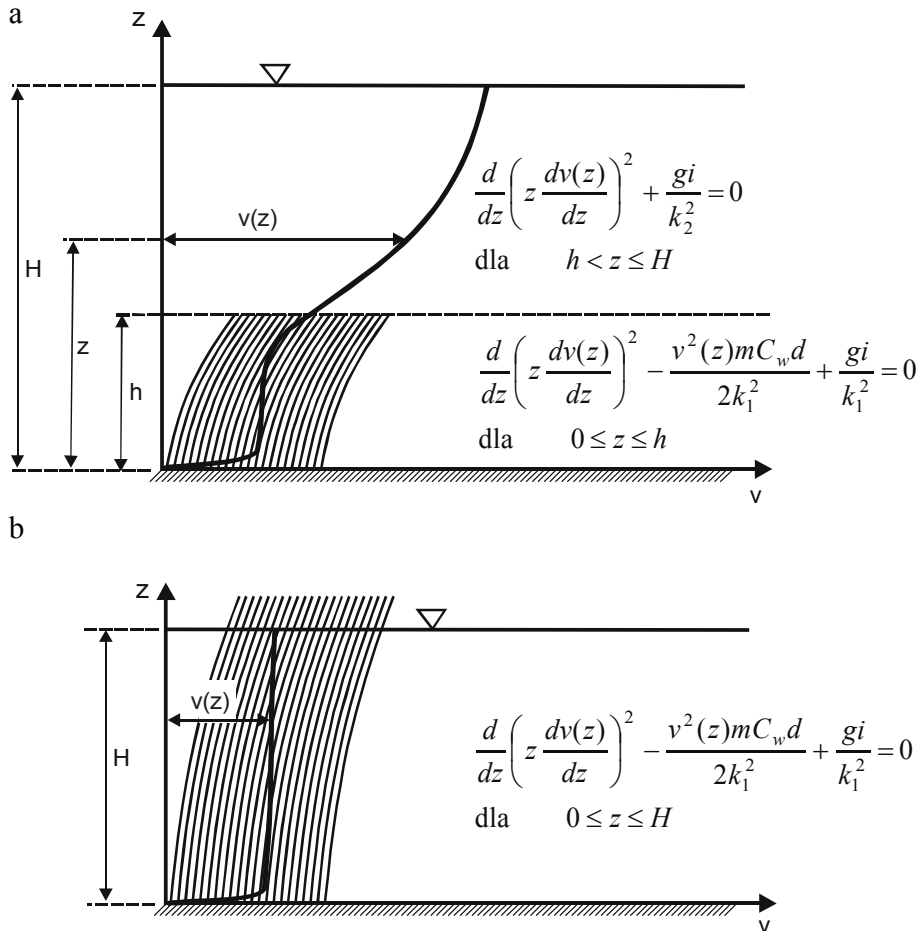
$$v_T = l_m^2 \left| \frac{dv(z)}{dz} \right| \quad (5)$$

Problemem jest określenie sposobu wyznaczania drogi mieszania (l_m). W przepływach płaskich Nikuradse przyjął, że:

$$l_m = \kappa z \quad (6)$$

gdzie κ jest współczynnikiem proporcjonalności, nazywanym stałą Karmana.

W niniejszej pracy przyjęto, że drogę mieszania można wyrażać liniową zależnością w obszarze przepływu wody



RYSUNEK 1. Profile prędkości przepływu wody w korycie z elementami sprężystymi
 FIGURE 1. Vertical profiles streamwise velocity in channel with flexible stems

z elementami i nad nimi, lecz ze zmiennymi, uzależnionymi od hydraulicznych warunków przepływu w korycie i charakterystyk opływanych elementów, współczynnikami proporcjonalności k_1 , k_2 (rys. 1a), tzn.:

- w obszarze z elementami $l_m = k_1 z$ (7a)
- w obszarze nad elementami $l_m = k_2 z$ (7b)

Naprężenia turbulentne, wyrażone wzorem (3), w obu obszarach przepływu

można wtedy wyrażać według zmodyfikowanej formuły zależności:

$$\tau(z) = \rho k^2 z^2 \left| \frac{dv(z)}{dz} \right| \frac{dv(z)}{dz} \quad (8)$$

gdzie $k = k_1$ lub $k = k_2$.

Wprowadzenie zależności (8) do równań (1) i (2) pozwala je zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{dv(z)}{dz} \right)^2 - \frac{v^2(z) m C_w d}{2k_1^2} + \frac{gi}{k_1^2} = 0 \quad F_d = \frac{1}{2} m \rho C_w d v^2(z) \quad (13)$$

$$\text{dla } 0 \leq z \leq h \quad (9)$$

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{dv(z)}{dz} \right)^2 + \frac{gi}{k_2^2} = 0$$

$$\text{dla } h < z \leq H \quad (10)$$

Po rozwinięciu pochodnych w równaniach (9) i (10) otrzymano dla obszaru przepływu pokazanego na rysunku 1a zależności:

$$2z \left(\frac{dv(z)}{dz} \right)^2 + 2z^2 \frac{dv(z)}{dz} \frac{d^2v(z)}{dz^2} + \frac{v^2(z) m C_w d}{2k_1^2} + \frac{gi}{k_1^2} = 0$$

$$\text{dla } 0 \leq z \leq h \quad (11)$$

$$2z \left(\frac{dv(z)}{dz} \right)^2 + 2z^2 \frac{dv(z)}{dz} \frac{d^2v(z)}{dz^2} + \frac{gi}{k_2^2} = 0$$

$$\text{dla } h < z \leq H \quad (12)$$

Do opisu rozkładu prędkości w obszarze pokazanym na rysunku 1b wystarcza równanie (11).

Siła oporu (F_d) powstała przy opływie cylindrycznych elementów uzależniona jest m.in. od współczynników oporów (C_w) i przy opływie m elementów na powierzchni $l \text{ m}^2$, o średnicy d kołowego przekroju podstawy elementu, wyrażana jest na jednostkę długości elementu zależnością:

Wartości współczynnika oporu dla opływu elementu walcowego (C_w) wyrażono zależnościami regresyjnymi w funkcji liczby Reynoldsa, podanymi przez Wieselbergera (Schlichting 1982):

$$C_w = 3,07 \text{Re}^{-0,168} \quad (14)$$

$$\text{dla } \text{Re} = \frac{v(z)d}{\nu} < 800$$

$$C_w = 1,0 \text{ dla } 800 \leq \text{Re} < 8000 \quad (15)$$

$$C_w = 1,2 \text{ dla } 8000 \leq \text{Re} < 10^5 \quad (16)$$

gdzie:

Re – liczba Reynoldsa obliczana dla walca o średnicy d opływającego wodą z prędkością $v(z)$,

ν – kinematyczny współczynnik lepkości wody.

W przypadku elementów sprężystych, ulegających ugięciu pod wpływem parcia dynamicznego wody, symbol h oznacza wysokość przekroju strumienia zajętego przez ugięte elementy sprężyste (rys. 1a). Równania (11) i (12) po uwzględnieniu zależności (14) i (15) lub (16) nie posiadają rozwiązania analitycznego w obszarze przepływu z elementami sprężystymi, gdyż prędkość przy dnie koryta nie jest stała i zależy od chropowatości dna i formy ruchu wody. Także wartość współczynnika oporów (C_w) nie jest stała i zmienia się wraz z prędkością przepływu wody. Dlatego równania (11) i (12) rozwiązywano metodą różnic skończonych. W tym celu pochodne zwyczajne zastąpiono ilorazami różnicowymi:

$$\left(\frac{dv(z)}{dz}\right)_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}} \quad (17)$$

$$\left(\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right)_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}\Delta z_i} \quad (18)$$

gdzie v_{i-1} , v_i , v_{i+1} – prędkości przepływu wody na wysokościach z_{i-1} , z_i , z_{i+1} .

Dla odcinka ograniczonego punktami $(i-1, i)$ równania różnicowe (11) i (12) mają postać:

dla $0 \leq z \leq h$

$$2z_i \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}}\right)^2 + 2z_i^2 \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}}\right) \left(\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}\Delta z_i}\right) + \frac{v_i^2 m C_{w,i} d}{2k_1^2} + \frac{gi}{k_1^2} = 0 \quad (19)$$

dla $h < z \leq H$

$$2z_i \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}}\right)^2 + 2z_i^2 \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}}\right) \left(\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta z_{i-1}\Delta z_i}\right) + \frac{v_i^2 m C_{w,i} d}{2k_1^2} + \frac{gi}{k_1^2} = 0 \quad (20)$$

Rozwiązanie układu równań (19) i (20) w obszarze przepływu pokaza-

nym na rysunku 1a lub równania (19) w obszarze na rysunku 1b wymaga wprowadzenia warunków brzegowych, tzn. warunku dolnego dla prędkości na dnie koryta i górnego, określającego prędkość na powierzchni zwierciadła wody. Prędkość wody na wysokości nierówności dna jest równa prędkości dynamicznej (v_*) powiązanej ze średnią prędkością (v_{sr}) w części przekroju o wysokości h z elementami sprężystymi i współczynnikiem oporów dna (λ) zależnością (Roiński i Kubrak 2002a, b):

$$v_* = v_{sr} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad (21)$$

(Jeśli przyjąć założenie, że wysokość nierówności dna jest równa bezwzględnej chropowatości powierzchni dna, wtedy dla $z = ks$ zachodzi:

$$v(k_s) = v \quad (22)$$

Tak określoną wartość prędkości przyjęto jako dolny warunek brzegowy rozwiązania układu (19) i (20). Współczynnik oporów dna (λ) w funkcji chropowatości bezwzględnej jego powierzchni (k_s) oraz formy ruchu wyraża zależność Colebrooka-White'a:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k_s / 4h}{3,71} \right) \quad (23)$$

gdzie:

Re – liczba Reynoldsa definiowana w obszarze z elementami jako

$$\text{Re} = \frac{4h v_{sr}}{v}$$

h – wysokość obszaru zajętego przez ugięte elementy sprężyste.

Na swobodnej powierzchni wody przyjęto górny warunek brzegowy w postaci:

$$\left. \frac{\partial v(z)}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad (24)$$

Układ równań różnicowych (19) i (20) jest nieliniowy ze względu na niewiadome prędkości i rozwiązywano go metodą iteracyjną Newtona. Metoda ta wymaga podania wartości prędkości, stanowiących przybliżenie rozwiązania układu. Jako pierwsze przybliżenie rozwiązania układu równań (19) i (20) zadawano stałe wartości prędkości (v_{sr}) w obszarze z elementami, obliczone wstępnie przy stałej wartości współczynnika opływu (C_w):

$$v_{sr} = \sqrt{\frac{2gi}{C_w md}} \quad (25)$$

Zakładane wartości prędkości $v(z)$ nad elementami obliczano z równania logarytmicznego rozkładu prędkości. Założone wartości prędkości w przekroju nie spełniają na ogół układu równań (19) i (20). Należy obliczenia powtórzyć, przyjmując dalej za v_{sr} średnią prędkość w obszarze z elementami sprężystymi.

Dla tak obliczonej prędkości średniej (v_{sr}) i zadanych parametrów hydraulicznych (h , k_s , i) obliczono z równania Colebrooka-White'a bezwymiarowy współczynnik oporów liniowych (λ). Ze względu na nieliniowy charakter równania Colebrooka-White'a względem λ rozwiązano je metodą iteracyjną.

Przepływ wody powoduje odkształcenie elementów sprężystych. Obciążenie jednostkowe $q(z)$ wywołane parciem

dynamicznym wody o gęstości (ρ), napływającej z prędkością $v(z)$ na sprężysty element walcowy o średnicy d , obliczano z zależności:

$$q(z) = \frac{\rho C_w v^2(z) d}{2} \quad (26)$$

Ugięcie sprężystego elementu pod wpływem parcia dynamicznego wody jest obliczane na podstawie teorii belki wspornikowej i sprowadza się do scałkowania przybliżonego równania różniczkowego osi odkształconej belki (Kubrak E. i in. 2005):

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{M_\alpha(z)}{EJ} \quad (27)$$

gdzie:

$f(z)$ – przemieszczenie osi elementu elastycznego/belki w kierunku prostopadłym do osi z ,

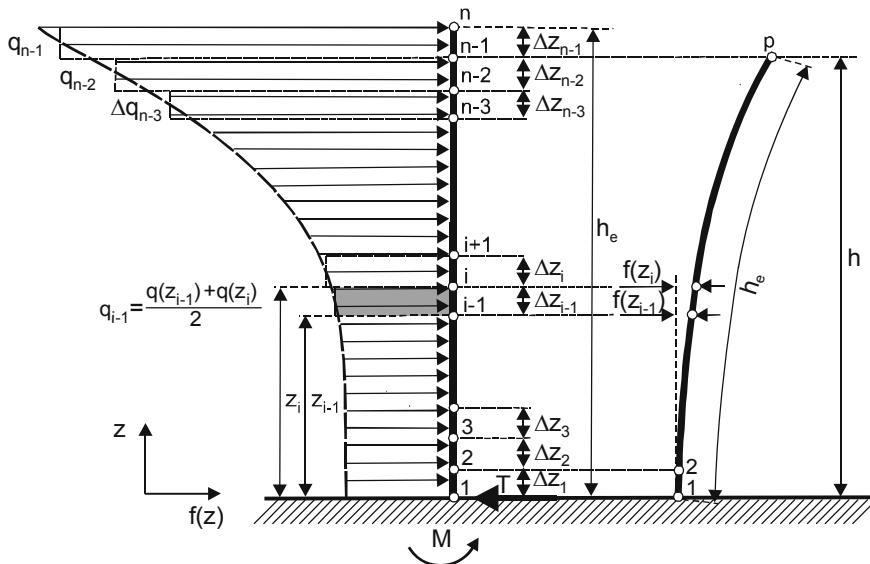
$M_\alpha(z)$ – moment zginający w przekroju z wywołany obciążeniem ciągłym $q(z)$, powstałym wskutek parcia dynamicznego wody na odcinku Δz ,

E – moduł sprężystości elementu elastycznego,

J – centralny moment bezwładności przekroju elementu elastycznego.

Równanie (27) ma rozwiązanie analityczne (Gawęcki 2003). Wyrażając długość elementu sprężystego (h_e) po dyskretyzacji do metody różnic skończonych w funkcji ugięcia $f(z)$ zależnością (rys. 2):

$$h_e = \sum_2^p \sqrt{\Delta z_{i-1}^2 + [f(z_i) - f(z_{i-1})]^2} \quad (28)$$



RYSUNEK 2. Ugięcie elementu sprężystego pod wpływem parcia dynamicznego wody
 FIGURE 2. The scheme of the flexible stem loaded due to dynamic water pressure

obliczono wysokość (h) przekroju zajętego przez ugięte elementy sprężyste (rys. 2):

$$h = \sum_2^p \Delta z_{i-1} \quad (29)$$

gdzie:

$f(z_i), f(z_{i-1})$ – ugięcia elementu w punktach na wysokości z_i i z_{i-1} ,

$\Delta z_{i-1} = z_i - z_{i-1}$,

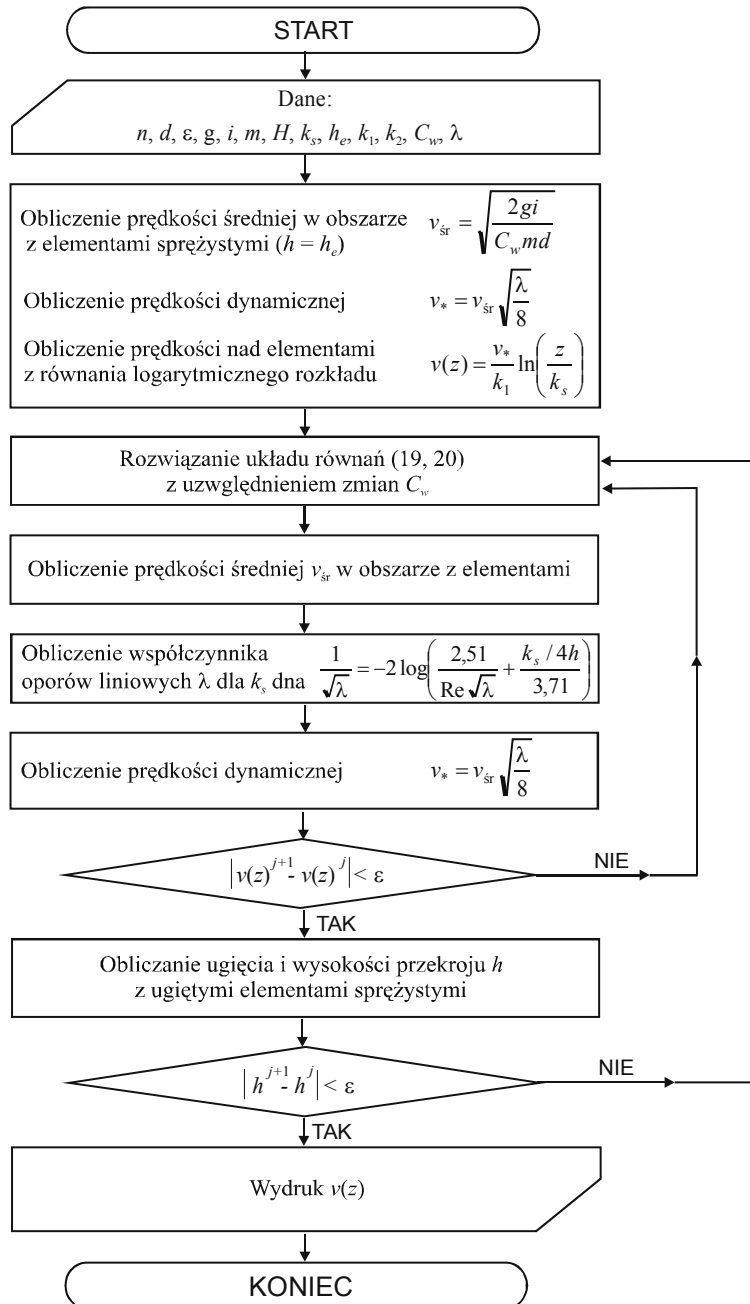
p – liczba punktów na wysokości ugiętego elementu.

Dla tak określonej wysokości przekroju zajętego przez ugięte elementy sprężyste h ponownie obliczano rozkład prędkości z równań (19) i (20) i ugięcie elementu pod wpływem parcia dynamicznego wody. Obliczenia kończono, gdy po rozwiązaniu układu równań (19) i (20) dla rozkładu prędkości nie zmie-

niała się wysokość przekroju zajętego przez ugięte elementy sprężyste. Opisany sposób ugięcia stosowano w pracy Erduran i Kutija (2003). Przebieg obliczeń rozkładu prędkości nad elementami sprężystymi ilustruje schemat blokowy pokazany na rysunku 3.

Podsumowanie

Przedstawiony jednowymiarowy opis rozkładu prędkości przepływu wody w korycie z elementami sprężystymi umieszczonymi na jego dnie uwzględnia wpływ parametrów koryta (spadek, chropowatość powierzchni dna, głębokość przepływu) i charakterystykę elementów sprężystych (ich kształt, wysokość, sztywność) na obliczone rozkłady prędkości.



RYSUNEK 3. Schemat blokowy obliczeń rozkładu prędkości przepływu wody z elementami sprężystymi

FIGURE 3. General flowchart of the water velocity profiles calculation in open channel flow through submerged flexible stems

Literatura

- BAPTIST M.J. 2005: Modelling floodplain biogeomorphology. Delft.
- CZERNUSZENKO W., ROWIŃSKI P. 1994: Współczesne modele matematyczne procesów transportu i mieszania zanieczyszczeń w rzekach. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- DEFINA A., BIXIO Ch. 2005: Mean flow and turbulence in vegetated open channel flow. *Water Resources Research* 41: 1–12.
- ERDURAN K.S., KUTIJA V. 2003: Quasi-three-dimensional numerical model for flow through flexible, rigid, submerged and non-submerged vegetation. *Journal of Hydroinformatics* 05.3.
- GAWĘCKI A. 2003: Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej Alma Mater, Poznań.
- KHUBLARYAN M.G., FROLOV A.P., ZYRYANOV V.N. 2004: Modeling water flow in the presence of higher vegetation. *Water Resources* 31.
- KLOPSTRA D., BARNEVELD H.J., van NOORTWIJK J.M., van VELZEN E.H. 1997: Analytical model for hydraulic roughness of submerged vegetation. The 27th Congress of the International Association for Hydraulic Research, San Francisco, 1997. Proceedings of Theme A, Managing Water: Coping with Scarcity and Abundance. American Society of Civil Engineers (ASCE), New York.
- KUBRAK J. 1998: *Hydraulika techniczna*. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- KUBRAK E., MARCISZEWSKA K., DOHOJDA M. 2005: Ugięcie elementów elastycznych pod wpływem parcia hydrodynamicznego wody. *Acta Scientiarum Polonorum – Architectura* 4(2): 27–35.
- MOIN P., KIM J. 1997: Superkomputery zmagają się z turbulencją. *Świat Nauki*, marzec.
- ROWIŃSKI P.M., KUBRAK J. 2002a: A mixing-length model for predicting vertical velocity distribution in flows through emergent vegetation. *Hydrological Sciences Journal* 47(6): 893–904.
- ROWIŃSKI P.M., KUBRAK J. 2002b: Velocity profiles on vegetated flood plains. Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics, River Flow 2002: 303–309.
- SCHLICHTING H. 1982: *Grenzschichttheorie*. G. Braun, Karlsruhe.

Summary

Description of the water velocity profiles in open channel flow through submerged flexible stems. The water flow description in open channel through submerged flexible stems is derived from stationary uniform flow equation. The turbulent shear stresses were calculated using Boussinesq equation. In order to relate turbulent stresses to velocity gradients mixing length theory was used. The new numerical scheme is appropriate for analysis of the vertical velocity profile through submerged flexible stems for given bottom roughness.

Authors address:

Elżbieta Kubrak
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska
ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa
Poland