

Przegląd Naukowy – Inżynieria i Kształtowanie Środowiska nr 59, 2013: 14–26  
(Prz. Nauk. Inż. Kszt. Środ. 59, 2013)  
Scientific Review – Engineering and Environmental Sciences No 59, 2013: 14–26  
(Sci. Rev. Eng. Env. Sci. 59, 2013)

**Marek CHALECKI**

Katedra Inżynierii Budowlanej SGGW w Warszawie  
Department of Civil Engineering WULS – SGGW

## **O pewnym modelu drgań ciał periodycznie wieloskładnikowych\***

### **On some model of vibrations of periodically multicomponent bodies\***

**Słowa kluczowe:** ciała periodycznie niejednorodne, drgania własne, funkcje kształtu  
**Key words:** periodically non-homogeneous bodies, free vibrations, shape functions

#### **Wstęp. Ciała wieloskładnikowe**

Drgania mechaniczne powodują osłabienie, a w konsekwencji zniszczenie konstrukcji. Podstawowym zagadnieniem w tym aspekcie jest obliczanie częstości drgań własnych, odpowiadających za powstanie najbardziej niebezpiecznych drgań rezonansowych, a także za przenoszenie hałasu. Dotyczy to na przykład ścian i stropów budynków (drgania poprzeczne), słupów nośnych (drgania poprzeczne i podłużne), pali fundamentowych (drgania podłużne).

Szczególą klasą ciał są ciała wieloskładnikowe, również powszechnie występujące w praktyce – najlepszym przykładem są tu płyty i belki zbrojone lub warstwowe (kompozytowe), a także mury ceglane. Ciała takie można opisać za pomocą różnych metod homogenizacji. Ważną część tej problematyki stanowi modelowanie drgań ciał o skokowo zmieniających się własnościach, w szczególności ciał periodycznych (takie są analizowane w niniejszej pracy) oraz typu FGM (Functionally Graded Materials – materiały o funkcyjnej gradacji własności). Modelowanie ośrodków o wymienionych strukturach zostało przedstawione w monografiach pod redakcją Woźniaka, Michałaka, Jędrysiaka (2008) oraz Woźniaka i innych (2010). Pozytcje

---

\*Z uwagi na rozbudowane wzory artykuł złożono jednolamowo.  
Text was layed out in two-column page, considering complex equations.

te dotyczą modelowania tolerancyjnego, które zostało szczegółowo przedstawione w książce Woźniaka i Wierzbickiego (2000). Zastosowania materiałów typu FGM w mechanice konstrukcji dotyczy na przykład praca Mazur-Śniady (2007).

W pracy skonstruowano model tolerancyjny ruchu ciał wieloskładnikowych, co ma posłużyć do obliczenia ich częstości drgań własnych. W celu wyprowadzenia równania ruchu takiego ciała założono, że w konfiguracji odniesienia zajmuje ono obszar  $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$ . Własności ciała są periodyczne w kierunkach wszystkich trzech osi układu współrzędnych.

Jeśli zostanie zdefiniowany zbiór:  $\Omega_0 = \left(\frac{l_1}{2}, L_1 - \frac{l_1}{2}\right) \times \left(\frac{l_2}{2}, L_2 - \frac{l_2}{2}\right) \times \left(\frac{l_3}{2}, L_2 - \frac{l_3}{2}\right)$ , gdzie:  $l_1, l_2, l_3$  – okresy powtarzalności, to dla każdego  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0$

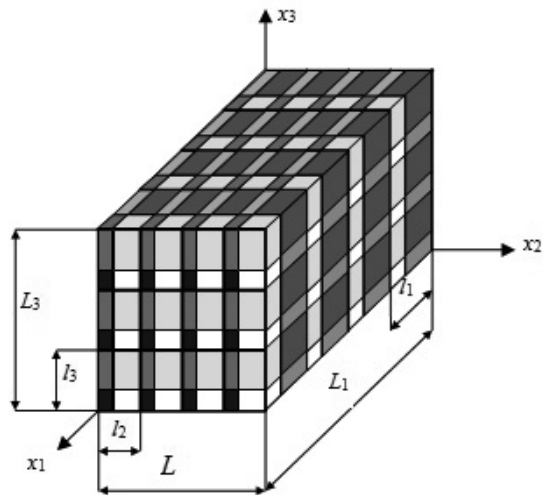
oraz przy założeniu,  $l_\alpha \ll L_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , można określić komórkę periodyczności:

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \frac{l_1}{2}, x_1 + \frac{l_1}{2}\right) \times \left(x_2 - \frac{l_2}{2}, x_2 + \frac{l_2}{2}\right) \times \left(x_3 - \frac{l_3}{2}, x_3 + \frac{l_3}{2}\right) \quad (1)$$

Założono dalej, że komórka o środku w  $\left(\frac{l_1}{2} + n_1 l_1, \frac{l_2}{2} + n_2 l_2, \frac{l_3}{2} + n_3 l_3\right)$ ,  $n_1 = 0, 1, \dots, a_0 - 1$ ,  $n_2 = 0, 1, \dots, b_0 - 1$ ,  $n_3 = 0, 1, \dots, c_0 - 1$ , składa się z  $a_0 \cdot b_0 \cdot c_0$  jednorodnych prostopadłościennych składników  $\Delta_{abc}$  o wymiarach  $l_{1a}, l_{2b}, l_{3c}$ , gdzie:

$$l_1 = \sum_{a=1}^{a_0} l_{1a}, \quad l_2 = \sum_{b=1}^{b_0} l_{2b}, \quad l_3 = \sum_{c=1}^{c_0} l_{3c}, \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{a,b,c} \bar{\Delta}_{abc}, \quad a = 1, 2, \dots, a_0, \quad b = 1, 2, \dots, b_0,$$

$c = 1, 2, \dots, c_0$ . Jeżeli przynajmniej dwa składniki w komórce periodyczności są materiałowo różne, to taki ośrodek nazywa się wieloskładnikowym (rys. 1).



RYСУNEK. 1. Ciało periodycznie wieloskładnikowe  
FIGURE 1. A multicomponent body

## Konstrukcja modelu uśrednionego

Dla ciał wieloskładnikowych skonstruowano model uśredniony tolerancyjnie. Zgodnie z techniką uśredniania tolerancyjnego (Woźniak i Wierzbicki 2000) dokonano rozkładu wektora przemieszczeń  $w_k = w_k(\mathbf{x}, t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , w następujący sposób:

$$w_k(x_1, x_2, x_3, t) = u_k(x_1, x_2, x_3, t) + h^A(x_1, x_2, x_3)v_k^A(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2)$$

gdzie:  $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ ,  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ ,  $A = 1, 2, \dots, N$ .

Poszukiwanymi funkcjami są wolnozmiennie funkcje wektorowe  $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$ ,  $k = 1, 2, 3$  (przemieszczenie uśrednione) oraz  $v_k^A = v_k^A(\mathbf{x}, t)$ ,  $k = 1, 2, 3$  (amplitudy fluktuacji). Wolnozmiennosc oznacza, że funkcja w obszarze komórki periodyczności przyjmuje wartości w przybliżeniu stałe wraz z wartościami pochodnych do określonego rzędu włącznie. Funkcje  $h^A$  zaś są postulowanymi funkcjami kształtu. Są one periodyczne i oscylujące w komórce.

Zdefiniujmy funkcjonal (Woźniak i in., red. 2008):

$$L = \frac{1}{2}\rho\dot{w}_k\dot{w}_k - \frac{1}{2}C_{klmn}w_{k,l}w_{m,n} \quad (3)$$

W funkcjonale tym  $w_k$  są określone przez równanie (2),  $\rho$  i  $C_{klmn}$  zaś to odpowiednio gęstość masy oraz sztywności, które dla ciał wieloskładnikowych są funkcjami skokowo nieciągłymi:

$$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)|_{(x_1, x_2, x_3) \in \Delta_{abc}} = \rho^{abc}$$

$$C_{klmn} = C_{klmn}(x_1, x_2, x_3)|_{(x_1, x_2, x_3) \in \Delta_{abc}} = C_{klmn}^{abc}$$

gdzie:  $\rho^{abc}$ ,  $C_{klmn}^{abc}$  są stałe dla wszystkich kombinacji wskaźników.

W równaniu (3) przyjęto oznaczenia:  $f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ,  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$  (gdzie  $f$  oznacza dowolną funkcję) oraz konwencję sumacyjną.

Podstawiając do równania (3) dekompozycję wektora przemieszczeń (2) oraz uśredniając go po komórce, otrzymano:

$$\langle L \rangle = \frac{1}{2}[\langle \rho \rangle \dot{u}_k \dot{u}_k + \langle \rho h^A h^B \rangle \dot{v}_k^A \dot{v}_k^B] +$$

$$+ \frac{1}{2}[\langle C_{klmn} \rangle u_{k,l} u_{m,n} + \langle C_{klmn} h_{,l}^A h_{,n}^B \rangle v_k^A v_m^B + \varepsilon \langle C_{klmn} h^A h^B \rangle v_{k,l}^A v_{m,n}^B + 2 \langle C_{klmn} h_{,n}^A \rangle u_{k,l} v_m^A] \quad (4)$$

gdzie:  $\varepsilon = 1$  dla przypadku, gdy indeksy  $k, l, m, n$  są równe sobie i różne od  $A$  i  $B$ , a  $\varepsilon = 0$  w innych przypadkach (Woźniak i in., red. 2008).

Operator uśrednienia ma postać:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|\Delta|_\Delta} \int f(x_1, x_2, x_3) d\Delta$$

Równania ruchu ciał wieloskładnikowych otrzymano jako równania Eulera-Lagrange'a funkcjonału (4) – Woźniak, red. (2010):

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial u_{k,l}} \right)_l + \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{u}_k} - \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial u_k} = 0 \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial v_{k,l}^A} \right)_l + \frac{d}{dt} \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \dot{v}_k^A} - \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial v_k^A} = 0 \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \langle \rho \rangle \ddot{u}_k - \langle C_{klmn} \rangle u_{m,nl} - \langle C_{klmn} h_{,n}^A \rangle v_{m,l}^A = 0 \\ \langle \rho h^A h^B \rangle \ddot{v}_k^B - \varepsilon \langle C_{klmn} h^A h^B \rangle v_{m,nl}^B + \langle C_{klmn} h_{,l}^A h_{,n}^B \rangle v_m^B + \langle C_{klmn} h_{,l}^A \rangle u_{m,n} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Równania (5) mają sens tylko wtedy, gdy funkcje  $u_k$  i  $v_k^A$  są wolnozmiennie. Warunek ten może być sprawdzony *a posteriori*, czyli wtedy, gdy funkcje te są już znane.

W przypadku wieloskładnikowych ciał niejednorodnych izotropowych:

$$C_{klmn} = \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + \mu (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm})$$

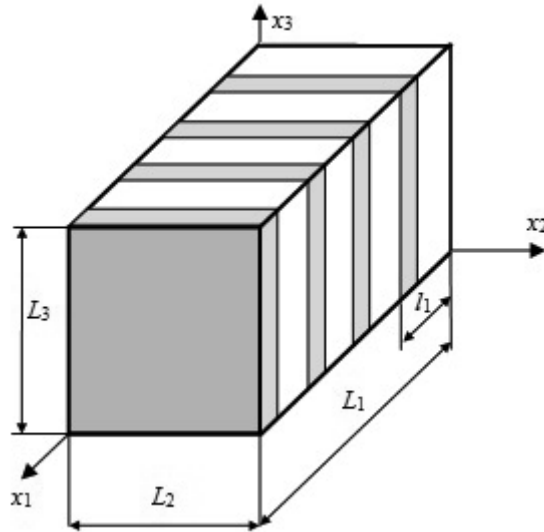
gdzie  $\lambda, \mu$  są stałymi Lamégo. Wówczas równania (5) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} & \left\{ \langle \rho \rangle \ddot{u}_k - \langle \lambda + \mu \rangle u_{m,mk} - \langle \mu \rangle u_{k,mm} - \langle \lambda h_{,m}^A \rangle v_{m,k}^A - \langle \mu h_{,m}^A \rangle v_{k,m}^A - \langle \lambda h_{,k}^A \rangle v_{m,m}^A = 0 \right. \\ & \left. \langle \rho h^A h^B \rangle \ddot{v}_k^B - \varepsilon \langle (\lambda + \mu) h^A h^B \rangle v_{m,mk}^B - \varepsilon \langle \mu h^A h^B \rangle v_{k,mm}^B + \langle \lambda h_{,m}^A \rangle u_{m,k} + \langle \mu h_{,m}^A \rangle u_{k,m} + \right. \\ & \left. + \langle \mu h_{,k}^A \rangle u_{m,m} + \langle \lambda h_{,k}^A h_{,m}^B \rangle v_m^B + \langle \mu h_{,m}^A h_{,k}^B \rangle v_m^B + \langle \mu h_{,m}^A h_{,m}^B \rangle v_k^B = 0 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

W skonstruowanym modelu nieasymptotycznym występuje  $3N + 3$  równań na przemieszczenia  $u_k$  i na fluktuacje  $v_k^A$ , opisanych związkami (5) lub (6). Wyznaczenie niewiadomych z tych równań zależy od pewnych postulowanych funkcji kształtu  $h^A$ , które zostały określone poniżej.

## Przykład zastosowania równań modelu

Jednym z nielicznych przykładów, dla których równania (6), odpowiednio przekształcone, można rozwiązać analitycznie, jest pręt podlegający drganiom wzdłużnym. Pręt taki został przedstawiony na rysunku 2.



RYSUNEK 2. Pręt periodycznie wieloskładnikowy, periodyczny wzdłuż osi  $x_1$   
 FIGURE 2. A periodically multicomponent bar, periodic along the  $x_1$ -axis

Pręt podlega drganiom podłużnym w kierunku osi  $x_1$ , a więc przemieszczenie uśrednione  $u = u_1(x_1)$ . Periodyzacja występuje tylko wzdłuż osi  $x_1$ , dlatego przyjęto jedną funkcję kształtu; funkcja ta oraz fluktuacja zależą tylko od jednej zmiennej:  $h^1 = h^1(x_1)$ ,  $v = v^1 = [v_1^1(x_1), 0, 0]$  (fluktuacje drgań są równoległe do kierunku drgań średnich). Dla uproszczenia rozważań założono brak mikrodrgań, w związku z tym fluktuacje nie zależą od czasu. Odpowiedź na pytanie, jak duży błąd wprowadza to założenie, może dać tylko eksperyment. Funkcje kształtu również nie zależą od czasu. W dalszym ciągu dla uproszczenia przyjęto zapis  $u_1(x_1) \equiv u$ ,  $h^1(x_1) \equiv h$ ,  $[v_1^1(x_1), 0, 0] \equiv v$ .

Dla tak opisanego układu równania (6) przekształcają się do postaci:

$$\begin{cases} \langle \rho \rangle \ddot{u} - \langle \lambda + 2\mu \rangle u_{,11} - \langle (\lambda + 2\mu) h_{,1} \rangle v_{,1} = 0 \\ \langle (\lambda + 2\mu) h_{,1} \rangle u_{,1} + \langle (\lambda + 2\mu) (h_{,1})^2 \rangle v = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Po wyrugowaniu fluktuacji

$$v = -\frac{\langle(\lambda + 2\mu)h_{,1}\rangle}{\langle(\lambda + 2\mu)(h_{,1})^2\rangle}u_{,1} \quad (8)$$

można równanie (7) przekształcić następująco:

$$\langle\rho\rangle\ddot{u} - \left\langle\lambda + 2\mu - \frac{\langle(\lambda + 2\mu)h_{,1}\rangle^2}{\langle(\lambda + 2\mu)(h_{,1})^2\rangle}\right\rangle u_{,11} = 0 \quad (9)$$

Równanie (9) jest łatwe do rozwiązania sposobem analitycznym. Ma postać klasycznego równania drgań podłużnych pręta, w którym współczynnik sztywności został zastąpiony przez efektywny współczynnik sztywności:

$$C^{eff} = \langle\lambda + 2\mu\rangle - \frac{\langle(\lambda + 2\mu)h_{,1}\rangle^2}{\langle(\lambda + 2\mu)(h_{,1})^2\rangle} \quad (10)$$

## Funkcje kształtu. Wyznaczenie częstości drgań własnych

Funkcja kształtu stanowi zasadniczy element dekompozycji danej równaniem (2), dlatego dobór tej funkcji jest jedną z najważniejszych czynności w modelowaniu tolerancyjnym. Funkcja kształtu odzwierciedla wpływ fluktuacji na poszukiwane pole (w naszym przypadku – pole przemieszczeń  $w$ ). Dobór funkcji kształtu jest podstawową trudnością, z jaką należy zmierzyć się podczas modelowania tolerancyjnego ciał wieloskładnikowych. Dla zagadnień dynamicznych przyjmuje się, że funkcja kształtu powinna być rozwiązaniem problemu drgań własnych w komórce (Woźniak, red. 2008), jednak takie zadanie jest w praktyce trudne. Zwłaszcza w przypadku opisu drgań płyt funkcje te mają bardzo złożoną postać (Nagórko i Woźniak 2002). Poniżej zostanie przedstawiony sposób doboru innych funkcji kształtu, opartych na prostszych funkcjach, będący alternatywą do sposobu polegającego na rozwiązywaniu zagadnienia własnego na komórce.

Zostanie opisany sposób doboru funkcji kształtu dla pręta podlegającego drganiom wzdłużnym. Pręt składa się z obszarów, z których jeden będzie nazywany umownie osnową (kolor biały na rys. 2), a drugi – wzmocnieniem (kolor szary). Ponieważ pręt ma strukturę warstwową, więc funkcja kształtu jest jedna:  $h = h(x_1)$ , ale składa się z dwóch funkcji składowych – dla obszaru wzmocnionego jest to funkcja  $h_1$ , dla osnowy – funkcja  $h_2$ . Funkcja kształtu powinna spełniać następujące warunki:

- musi być ciągła na granicach komórek i podkomórek

$$h_1|_{x=l_{11}} = h_2|_{x=l_{11}}, \quad h_1|_{x=0} = h_2|_{x=l_1} \quad (11a)$$

- musi zapewniać ciągłość odkształceń i naprężeń – w przypadku pręta rozciąganego/ściskanego oznacza to równość pierwszych pochodnych na granicach komórek i podkomórek

$$h_{1,1}|_{x=l_{11}} = h_{2,1}|_{x=l_{11}}, \quad h_{1,1}|_{x=0} = h_{2,1}|_{x=l_1} \quad (11b)$$

- musi być oscylująca w komórce

$$\int_0^{l_{11}} h_1 dx_1 + \int_{l_{11}^0}^{l_1} h_2 dx_1 = 0 \quad (11c)$$

- ze względu na występującą w równaniu (10) uśrednioną wartość pierwszej pochodnej funkcji kształtu żadna z funkcji składowych nie może być symetryczna względem środka swojej podkomórki, gdyby tak było, ułamek występujący we współczynniku sztywności przyjmowałby wartość 0.

Dodatkowo przyjmuje się warunek ograniczający wartości funkcji – ekstremum mają być rzędu szerokości komórki. Spotyka się często wartość  $h_{ext} = \pm l_1 \sqrt{3}$  (zwłaszcza przy funkcjach kawałkami liniowych, tzw. funkcjach typu „piła”), jednak w pracy przyjęto  $h_{ext} = \pm l_1$ .

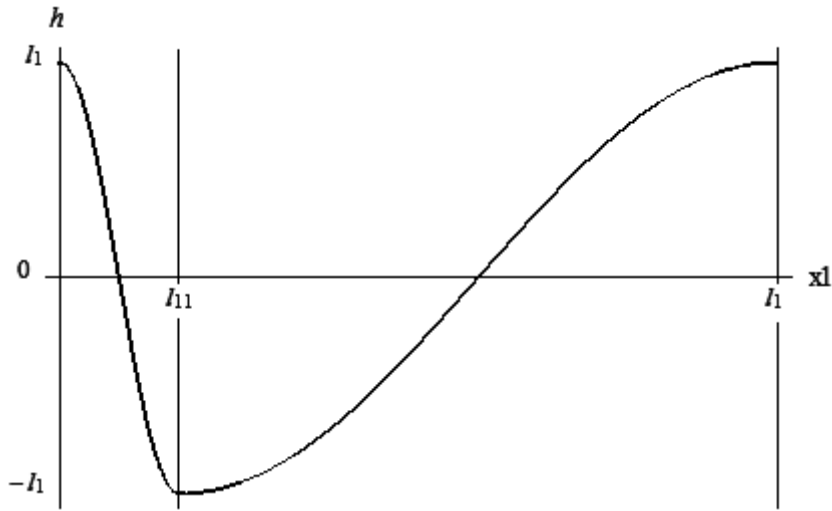
Warunki (11) spełnia funkcja przedstawiona poniżej (przyjęta przez autora – wykres na rys. 3):

$$h(x) = \begin{cases} l_1 \cos\left(\frac{\pi x}{l_{11}}\right) & \text{dla } x \in [0, l_{11}) \\ -l_1 \cos\left(\frac{\pi(x - l_{11})}{l_1 - l_{11}}\right) & \text{dla } x \in [l_{11}, l_1) \end{cases} \quad (12)$$

Postępowanie przy wyznaczaniu częstości drgań własnych przebiega analogicznie do postępowania w przypadku pręta jednorodnego. Jeśli rozwiązanie ogólne równania (9) przedstawić w postaci:

$$u(x, t) = \left( C \cos \frac{\omega}{a} x + D \sin \frac{\omega}{a} x \right) T(t), \quad a = \sqrt{\frac{C^{eff}}{\langle \rho \rangle}} \quad (13)$$

to wyrażenie w nawiasie opisuje postaci drgań własnych, gdzie częstości drgań własnych są równe:



RYSUNEK 3. Funkcja kształtu w kierunku  $x_1$   
 FIGURE 3. Shape function in the  $x_1$  direction

- dla pręta utwierdzonego z obu stron

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{C^{eff}}{\langle \rho \rangle}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

- dla pręta utwierdzonego z jednej strony i swobodnego z drugiej

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2l} \sqrt{\frac{C^{eff}}{\langle \rho \rangle}} \quad \text{dla } n = 1, 3, 5, \dots$$

gdzie:  $C^{eff}$  – współczynnik efektywny określony wzorem (10).

Łatwo też sprawdzić, że współczynniki uśrednione w układzie (7) odznaczają się następującymi cechami:

- współczynnik  $\langle (\lambda + 2\mu)h_{,1} \rangle$  w ogóle nie zależy od wymiarów komórki i podkomórki, a jedynie od stałych materiałowych  $\mu$  i  $\lambda$ ,
- współczynnik  $\langle (\lambda + 2\mu)(h_{,1})^2 \rangle$  zależy od stosunku wymiaru podkomórki do wymiaru komórki oraz od kwadratu liczby  $\pi$ ,
- współczynnik  $\langle (\lambda + 2\mu)h^2 \rangle$  zależy od kwadratu wymiaru komórki.

### Analiza współczynnika sztywności efektywnej

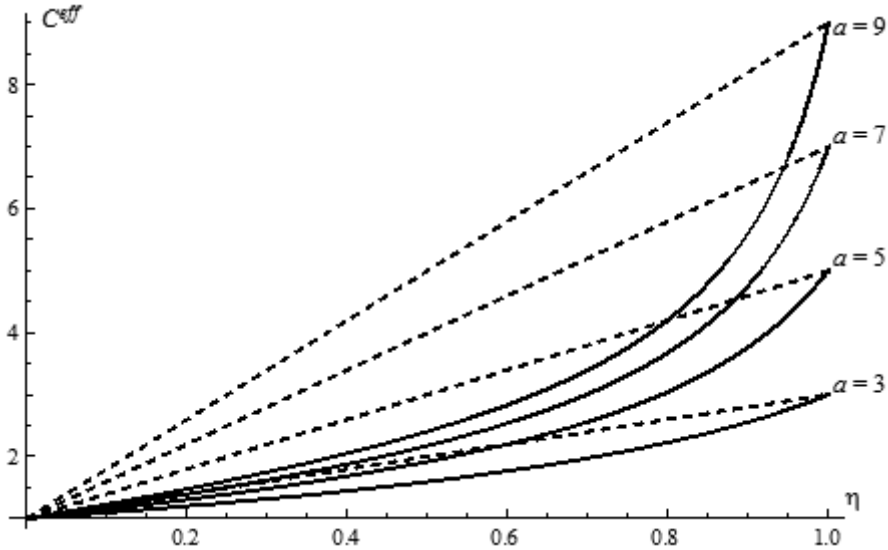
Jeśli wprowadzi się oznaczenie:  $\eta = l_{11} / l_1$ , gdzie  $l_1$  – długość komórki (rys. 2),  $l_{11}$  – długość podkomórki (obszaru wzmocnionego), to na podstawie wzorów (10) i (12) współczynnik efektywny można przedstawić w następującej postaci:



$$C^{eff} = \eta(\lambda_1 + 2\mu_1) + (1 - \eta)(\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{8(1 - \eta)\eta(\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 + 2\mu_2)^2}{\pi^2[(1 - \eta)(\lambda_1 + 2\mu_1) + \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)]} \quad (14)$$

gdzie:  $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$  – stałe Lamégo dla każdego z obszarów;  $\alpha = 1$  oznacza obszar wzmocniony,  $\alpha = 2$  – osnowę.

Zakładając, że materiał wzmocnienia i materiał osnowy mają taką samą liczbę Poissona, a różnią się jedynie modułem Younga (dla kompozytów typu stal-beton takie założenie jest słuszne), można określić stosunek tych modułów:  $a = E_1/E_2$  ( $E_1 > E_2$ , czyli  $a > 1$ ). Wynika stąd, że stosunki stałych Lamégo są także równe  $a$ . Dlatego współczynnik  $\eta$  nazwano współczynnikiem udziału podkomórki sztywniejszej. Zależność współczynnika  $C^{eff}$  od  $\eta$  dla różnych wartości  $a$  przedstawia rysunek 4.



RYSUNEK 4. Zależność współczynnika efektywnego ( $C^{eff}$ , wzór 13) od udziału podkomórki sztywniejszej ( $\eta$ , linie ciągłe) w porównaniu z zależnością samego współczynnika  $\langle \lambda + 2\mu \rangle$  od  $\eta$  (linie przerywane)

FIGURE 4. Relation between an effective coefficient  $C^{eff}$  (13) and the share of a stiffer subcell  $\eta$  (continuous lines) compared to the relation between the coefficient  $\langle \lambda + 2\mu \rangle$  and  $\eta$  (dashed lines)

Największy wpływ niejednorodności występuje dla wartości  $\eta$  odpowiadającej ekstremum ułamka ( $Fr$ ) we wzorze (14); wartość ta oraz ekstremum są równe odpowiednio:

$$\eta_0 = \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \quad Fr_{max} = \frac{8(\sqrt{a} - 1)^2}{\pi^2}$$

Nie zawsze jednak funkcja kształtu przyjęta w postaci kombinacji sinusów/cosinusów jest wygodna w obróbce. Spotyka się przypadki, gdzie warunki, które musi spełnić funkcja kształtu, są takie, że przyjęcie pewnego typu funkcji (trygonometrycznych, wykładniczych, hiperbolicznych) wymusiłoby poszukiwanie współczynników funkcyjnych poprzez rozwiązywanie układu równań uwikłanych. Dlatego wygodnie często posługiwać się wielomianami (np. Chalecki 2011).

Warunki (11) spełnia następująca wielomianowa funkcja kształtu:

$$h(x) = \begin{cases} l_1 - \frac{6}{l_1(1-\eta)^2}x^2 - \frac{4(5-10\eta-\eta^2)}{l_1^2\eta^3(1-\eta)^2}x^3 + \frac{30(1-2\eta)}{l_1^3\eta^4(1-\eta)^2}x^4 - \frac{12(1-2\eta)}{l_1^4\eta^5(1-\eta)^2}x^5 & \text{dla } x \in [0, l_{11}) \\ -l_1 \frac{1-3\eta-3\eta^2+\eta^3}{(1-\eta)^3} - \frac{12\eta}{(1-\eta)^3}x + \frac{6(1+\eta)}{l_1(1-\eta)^3}x^2 - \frac{4}{l_1^2(1-\eta)^3}x^3 & \text{dla } x \in [l_{11}, l_1) \end{cases} \quad (15)$$

Jej wykres jest bardzo podobny do wykresu z rysunku 3. Trzeba jednak zauważyć, że dla  $\eta > 0,5$  należy przyjąć funkcję kształtu, która jest odbiciem tej z przedziałem  $\eta \in (0, 0,5)$  – wzór otrzymamy, wstawiając do wzoru (15)  $l_1 - x$ , zamiast  $x$ . Z kolei dobór stopnia wielomianu podyktowany jest następującymi warunkami:

- nieparzysta wartość wielomianu wynika z warunku mówiącego, że każda z funkcji składowych nie może być symetryczna względem środka swojej podkomórki (por. rozdz. Funkcje kształtu),
- wielomian dla podkomórki węższej ma wyższy stopień niż dla szerszej, bo wtedy łatwiej jest „zszyć” oba wielomiany tak, aby spełniały warunki (11).

Dla takiej funkcji współczynnik efektywny jest równy:

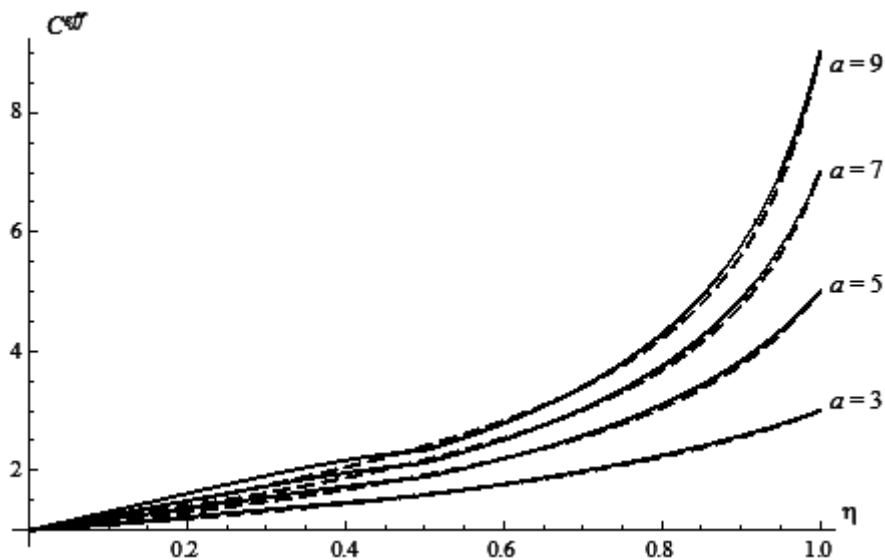
- dla  $\eta \leq 0,5$

$$C^{eff} = \eta(\lambda_1 + 2\mu_1) + (1-\eta)(\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{35(1-\eta)^4 \eta(\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 + 2\mu_2)^2}{2(25 - 100\eta + 145\eta^2 - 90\eta^3 + 21\eta^4)(\lambda_1 + 2\mu_1) + 42(1-\eta)^3 \eta(\lambda_2 + 2\mu_2)} \quad (16a)$$

- dla  $\eta > 0,5$

$$C^{eff} = \eta(\lambda_1 + 2\mu_1) + (1-\eta)(\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{35(1-\eta)\eta^4(\lambda_1 + 2\mu_1 - \lambda_2 + 2\mu_2)^2}{2(1-4\eta + \eta^2 - 6\eta^3 + 21\eta^4)(\lambda_2 + 2\mu_2) + 42(1-\eta)\eta^3(\lambda_1 + 2\mu_1)} \quad (16b)$$

Zależność tego współczynnika od wartości  $\eta$  jest pokazana na rysunku 5.



RYSUNEK 5. Zależność współczynnika efektywnego ( $C^{eff}$ , wzór 16) od udziału podkomórki sztywniejszej  $\eta$  (linie ciągłe) w porównaniu z zależnością współczynnika według wzoru (14) – linie przerywane (por. rys. 4)

FIGURE 5. Relation between an effective coefficient  $C^{eff}$  (16) and the share of a stiffer subcell  $\eta$  (continuous lines) compared to the analogical relation for the coefficient according to the (14) – dashed lines (see Fig. 4)

Kształt wykresów pokazanych na rysunkach 4 i 5 jest zgodny z wynikami otrzymanymi przez innych autorów. Nagórko oraz autor (Chalecki i Nagórko 2010, Wilmański i in., red. 2011) otrzymali identyczne wykresy dla płyty warstwowej, stosując funkcje kształtu, będące kawałkami parabol (mimo że funkcje te nie są oscylujące). Podobne wykresy otrzyma się też z zależności na sztywności płyt cienkich żebrowanych, przedstawionych przez Z. Kączkowskiego (por. Woźniak, red. 2001, cz. III).

## Podsumowanie

Projektowane i realizowane obiekty budowlane, oprócz bezpieczeństwa konstrukcji, muszą spełniać wiele wymogów ważnych z punktu widzenia parametrów środowiskowych, takich jak: hałas, energooszczędność, drgania. Artykuł dotyczy jednego z nich, tzn. drgań.

Przedstawiono model drgań ciała niejednorodnego periodycznie, który może odwzorowywać zachowanie różnego rodzaju elementów konstrukcyjnych, na przykład słupów lub murów ceglanych. W szczególności może posłużyć do obliczenia drgań

własnych, co jest istotne m.in. z punktu widzenia przenoszenia drgań i hałasu na pozostałe elementy konstrukcji.

W skonstruowanym modelu występuje w ogólnym przypadku  $3(N + 1)$  równań na przemieszczenia i na fluktuacje (w przedstawionym przykładzie drgań jednowymiarowych –  $N + 1$ ), których wyznaczenie zależy od pewnych postulowanych funkcji periodycznych i oscylujących, zwanych funkcjami kształtu ( $N$  – liczba tych funkcji). Muszą one być znane. W pracy przedstawiono te funkcje zgodnie z kryteriami techniki uśredniania tolerancyjnego. Pokazano dwa sposoby doboru funkcji kształtu w odniesieniu do pręta niejednorodnego periodycznie, zbudowanego z dwóch materiałów. Dają one bardzo podobne wyniki, jednak sposób wykorzystujący wielomiany jest łatwiejszy w zastosowaniu. Według przedstawionego modelu sztywność efektywna rośnie wraz ze wzrostem udziału materiału o większym module Younga, ale wzrost ten jest początkowo słabszy, a dopiero po przekroczeniu 60–70% udziału sztywność gwałtownie rośnie. Wyniki te wydają się być zgodne z rzeczywistością, są też bardzo podobne do wyników innych autorów, powinny jednak zostać potwierdzone innymi metodami. Należy podkreślić, że w modelu nie uwzględniono mikrodrgań, co wprowadza pewien błąd, jednak jego wielkość oraz istotność dla rozważanego problemu może być określona dopiero przez eksperyment.

Porównując to podejście z klasyczną homogenizacją, należy zaznaczyć, że w zaprezentowanym modelu występuje efekt skali. Oznacza to, że otrzymane wyniki zależą od wymiaru komórki periodyczności.

## Literatura

- CHALECKI M. 2011: Certain Modeling Problems Of Free Vibrations Of Periodically Multicomponent Plates. III Sympozjum „Modeling Of The Microstructured Media”, Łódź.
- CHALECKI M., NAGÓRKO W. 2010: Modelowanie nieasymptotyczne elastodynamiki ciał wieloskładnikowych. III Konferencja „Mechanika ośrodków niejednorodnych”, Łągow.
- MAZUR-ŚNIADY K., 2007: Dynamika belek zginanych typu FGM. I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa.
- NAGÓRKO W., WOŹNIAK C. 2002: Nonasymptotic Modeling of Thin Plates Reinforced by a System of Stiffeners. EJPAU. *Civil Engineering* 5: 2.
- WILMAŃSKI K., MICHALAK B., JĘDRYSIAK J. (ed.) 2011: Mathematical Methods in Continuum Mechanics. Wydaw. Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- WOŹNIAK C. (red.) 2001: Mechanika sprężystych płyt i powłok. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- WOŹNIAK C. (ed.) 2010: Mathematical modeling and analysis in continuum mechanics of microstructured media. Wydaw. Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- WOŹNIAK C., WIERZBICKI E. 2000: Averaging techniques in thermomechanics of composite solids. Politechnika Częstochowska, Częstochowa.
- WOŹNIAK C., MICHALAK B., JĘDRYSIAK J. (ed.) 2008: Thermomechanics of microheterogeneous solids and structures. Tolerance averaging approach. Wydaw. Politechniki Łódzkiej, Łódź.

## Streszczenie

**O pewnym modelu drgań ciał periodycznie wieloskładnikowych.** Artykuł przedstawia metodę wyprowadzania równań ruchu trójwymiarowych ciał periodycznie niejednorodnych oraz zastosowanie tych równań do obliczenia częstości drgań własnych pręta periodycznie niejednorodnego. Przedstawiono też sposób konstrukcji funkcji kształtu. Są one zaprezentowane w dwóch postaciach: jako kombinacja funkcji trygonometrycznych oraz kombinacja wielomianów. Obie postaci dają bardzo podobne zależności modułu sztywności efektywnej od struktury komórki periodyczności; zależności te są podobne do prezentowanych w literaturze problemu.

## Summary

**Free vibrations model for periodically multicomponent bodies.** The paper presents a certain method of deriving of motion equations of 3-dimensional periodically multicomponent bodies as well as the application of those equations to calculate natural frequencies of a periodically non-homogeneous bar. A way of a construction of shape functions is also shown. Those functions are presented in two forms: as a combination of trigonometric functions as well as a combination of polynomials. Both of those ways give very similar dependence between the effective stiffness modulus and the structure of the periodic cell; this dependence is similar to those presented in the literature.

### Author's address

Marek Chalecki  
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
Katedra Inżynierii Budowlanej  
ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa  
e-mail: marek\_chalecki@sggw.p