

---

**Instytut Agrofizyki  
im. Bohdana Dobrzańskiego PAN  
w Lublinie**

**ACTA AGROPHYSICA**

**11**

**Henryk A. Sobczuk**

**OPIS STANU FIZYCZNEGO GLEBY  
JAKO OŚRODKA NIEUPORZĄDKOWANEGO  
NA PRZYKŁADZIE KRZYWYCH RETENCJI WODY**

Rozprawa habilitacyjna

Lublin 1998

---

**Komitet redakcyjny**

prof. dr hab. Jan Gliński, czł. koresp. PAN  
doc. dr hab. Krystyna Konstankiewicz  
doc. dr hab. Ryszard Dębicki

**Opiniował do druku**

prof. dr hab. Ryszard Walczak  
prof. dr hab. Jerzy Lipiec

**Adres redakcji**

Instytut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN  
ul. Doświadczalna 4, P.O. Box 201, 20-290 Lublin 27  
tel. (0-81) 744-50-61

**Publikacja indeksowana przez**

**POLISH SCIENTIFIC JOURNALS CONTENTS - AGRIC. & BIOL. SCI.**

w sieci INTERNET pod adresem <http://saturn.ci.uw.edu.pl/psjc/>

lub <http://ciuw.warman.net.pl/alf/psjc/>

© Copyright by Instytut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN, Lublin 1998

ISBN 83-87385-08-5

ISSN 1234-4125

Wydanie I. Nakład 100 egz.

Ark. wyd. 4,6. Ark. druk. 6,4

Skład komputerowy: Dr Henryk A. Sobczuk

Druk: "Tekst", ul. I Maja 51, 20-410 Lublin

# SPIS TREŚCI

<b>1. WSTĘP</b>	<b>5</b>
1.1. Kryteria klasyfikacji wody glebowej . . . . .	6
1.2. Potencjał wody glebowej . . . . .	8
<b>2. METODY WYLICZANIA CHARAKTERYSTYK HYDROFIZYCZNYCH GLEB</b>	<b>11</b>
2.1. Modele do wyliczania właściwości hydrofizycznych gleb z uziarnienia i innych parametrów fazy stałej . . . . .	11
<b>3. CEL, ZAKRES I HIPOTEZA ROBOCZA PRACY</b>	<b>13</b>
3.1. Podstawowe założenia . . . . .	13
3.2. Schemat realizacji . . . . .	14
<b>4. STATYSTYCZNY MODEL STRUKTURY GLEBY</b>	<b>16</b>
4.1. Gleba jako nieuporządkowany ośrodek ziarnisty . . . . .	16
4.1.1. Nieporządek i uporządkowanie w glebie . . . . .	16
4.1.2. Mechanika statystyczna mieszanin cząstek . . . . .	17
4.2. Geometria ośrodka modelowego . . . . .	18
4.2.1. Cząsteczkowe funkcje rozkładu . . . . .	20
4.3. Uśrednianie w ośrodku glebowym . . . . .	22
4.3.1. Woda w ośrodku złożonym z cząstek o jednakowych średnicach . . . . .	23
4.4. Obliczanie wilgotności próbki glebowej . . . . .	24
4.5. Radialne funkcje rozkładu używane do opisu mieszanin cząstek o różnych własnościach . . . . .	26
<b>5. RETENCJA WODY NA STYKU KULISTYCH CZĄSTEK STAŁYCH</b>	<b>28</b>
5.1. Ciśnienie wody a krzywizna powierzchni soczewek wodnych w glebie . . . . .	29
5.2. Właściwości funkcji opisującej powierzchnię soczewki wodnej . . . . .	35
5.3. Pole powierzchni soczewek wodnych . . . . .	37
5.4. Objętość soczewek wodnych . . . . .	40
5.5. Zależność objętości soczewek wodnych od krzywizny średniej . . . . .	41
5.5.1. Kula styczna do powierzchni soczewki . . . . .	41
5.5.2. Równanie powierzchni soczewki pomiędzy dwoma kulami . . . . .	44
5.6. Parametryzacja objętości soczewek . . . . .	47
5.7. Siły działające na przekroju soczewki wodnej . . . . .	47
5.8. Obliczanie niezbędnych całek . . . . .	49
<b>6. PROGRAMY OBLICZENIOWE</b>	<b>52</b>

<b>7. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH</b>	<b>52</b>
7.1. Podciśnienie i krzywizna średnia powierzchni wody . . . . .	52
7.2. Właściwości powierzchni soczewek w zależności od ich parametrów .	54
7.3. Mikrokrzywe retencji wody . . . . .	56
7.4. Podciśnienie charakterystyczne . . . . .	60
<b>8. MODEL PRAKTYCZNY KRZYWYCH RETENCJI</b>	<b>65</b>
<b>9. DANE POMIAROWE DO WERYFIKACJI MODELU</b>	<b>69</b>
<b>10. PORÓWNANIE WYNIKÓW OBLICZEŃ Z DANymi POMIAROWYMI</b>	<b>71</b>
<b>11. PODSUMOWANIE</b>	<b>89</b>
<b>12. WNIOSKI</b>	<b>91</b>
<b>13. LITERATURA</b>	<b>93</b>

## 1. WSTĘP

Modele retencji i przepływu wody w glebie są istotnym składnikiem wiedzy o środowisku otaczającym człowieka. Fizyczne i chemiczne właściwości wody powodują, że modyfikuje ona wszystkie zjawiska zachodzące w glebie. Począwszy od rozpuszczania niemal wszystkich substancji i ich przenoszenia w roztworze, poprzez modyfikację własności hydrofizycznych, mechanicznych i termicznych, woda w glebie wyznacza jej faktyczne właściwości. Większość parametrów fizycznych gleby może być modyfikowana poprzez regulację uwilgotnienia. Optymalizacja stosunków wodnych panujących w glebie zmierza przede wszystkim do stworzenia najlepszych, pod względem fizycznym, biologicznym i ekonomicznym, warunków wzrostu i rozwoju roślin.

Można więc powiedzieć, że obecność wody w glebie określa i wyznacza wszystkie ważne jej funkcje. Poznanie wodnych właściwości gleb jest więc podstawowym warunkiem do zrozumienia i opisu jej pozostałych funkcji.

Na podstawie uzyskanej wiedzy możliwa jest konstrukcja modeli wielu procesów fizycznych, chemicznych i biologicznych, które opisują przepływ i wiązanie wody i soli w glebie. Modele takie umożliwiają symulację wiązania i przepływu wody, degradacji i przenoszenia składników pokarmowych i zanieczyszczeń, a zatem symulację najważniejszych funkcji gleby.

Planowanie czy efektywne działanie w rolnictwie nie jest możliwe bez użycia podstawowych modeli: zużycia wody, plonowania roślin, czy też wpływu zmian klimatu na produktywność roślin [66, 89].

Wiarygodne użycie modeli w skali pola uprawnego i większych obszarów, ograniczone jest aktualną dostępnością danych zarówno o właściwościach roślin jak i gleby.

Postęp w technice komputerowej umożliwił modelowanie procesów agrofizycznych na niespotykaną dotychczas skalę. Z dużą ostrością ujawnił się więc problem zapewnienia danych dla modeli.

Dokładność modelowania zależy w dużym stopniu od tego, jak dokładnie potrafimy zmierzyć lub przewidzieć parametry fizyczne gleby w warunkach pola uprawnego. Wzrasta więc znaczenie metod estymacji parametrów fizycznych gleb, na podstawie znanych, stałych lub wolnozmiennych ich charakterystyk, które mogą być zmierzone raz a wykorzystane wielokrotnie po uzupełnieniu o proste pomiary aktualnego stanu gleby na polu uprawnym.

Szczególnie istotnymi z punktu widzenia modelowania komputerowego są parametry hydrofizyczne gleb: zależność energii wiązania wody w glebie od wilgotności (krzywa retencji wody krzywa pF), oraz zależność przewodnictwa wodnego od wilgotności lub potencjału wody glebowej [43]. Te dwie charakterystyki w sposób kluczowy wpływają na dokładność wyników modelowania, są jednak kosztowne i trudne do uzyskania. Wysokie koszty pomiarów hydrofizycznych charakterystyk gleb w połączeniu z czasochłonnością pomiarów skłaniają do poszukiwania metod ich estymacji [20].

Ze względu na wewnętrzną złożoność potraktowano tu glebę, która jest ośrodkiem żywym i zmiennym, w sposób uproszczony tak by możliwe było wyciąganie wniosków z małej liczby jej najważniejszych parametrów. Uznano, że gleba jest ośrodkiem trójfazowym złożonym z cząstek stałych o różnych wymiarach i kształtach rozłożonych w przestrzeni w sposób nieuporządkowany, roztworu glebowego o zmiennym składzie, zwilżającego części stałe gleby, oraz składowej gazowej o składzie mogącym znacznie odbiegać od składu powietrza atmosferycznego.

Charakterystyczną cechą fazy stałej gleby jest jej bezładne rozłożenie w zajmowanej przez glebę przestrzeni. Rozłożenie to spowodowane jest wzajemnymi oddziaływaniami pomiędzy poszczególnymi składnikami gleby. Główne siły jakie należy wyróżnić w tym kontekście to: siła grawitacji oddziałująca na wszystkie składniki gleby, proporcjonalna do ich masy i skierowana pionowo w dół, siły adhezji działające pomiędzy cząsteczkami wody glebowej i cząstkami fazy stałej oraz siły oddziaływania cząstek stałych na siebie, przeciwdziałające przemieszczeniom cząstek ku sobie w przypadku wystąpienia ich mechanicznego kontaktu [44, 62].

Do opisu nieuporządkowanego ośrodka ziarnistego jakim jest gleba, zastosowano opartą na założeniach statystyki, teorię ośrodków ziarnistych, a w szczególności teorię radialnych funkcji rozkładu. Zaproponowany opis krzywych retencji wody gleb wynika z opisu fizycznego retencji wody pomiędzy ziarnami fazy stałej, a po zastosowaniu odpowiedniej metody uśredniania daje w wyniku wilgotność reprezentatywną dla makroskopowych próbek gleby. Tutaj za makroskopowe uznaje się próbki o objętości  $100\text{cm}^3$  jakich używa się do standardowych oznaczeń laboratoryjnych, a skala mikroskopowa wyznaczona jest rozmiarami ziaren fazy stałej w glebie.

W związku z mikroskopowym podejściem do analizy krzywych retencji wody należy podkreślić fakt, że woda w glebie w zakresie potencjałów tu rozważanych gromadzi się głównie w pobliżu miejsc gdzie cząstki stałe stykają się ze sobą. Fakt ten ogólnie znany, i od dawna dobrze zrozumiany [61], jest jednak zaniebdywany w modelowaniu.

Pojęcie soczewki wodnej odnoszące się do wody pomiędzy dwoma cząstkami stałymi nie znalazło właściwego miejsca w modelowaniu właściwości wodnych gleb i zwykle zastępowane jest definiowanym *ad hoc* na potrzeby każdego modelu, pojęciem "por" czy "kapilara glebowa" [14, 26, 74].

Właściwości wodne ośrodka modelowego zależą zatem od liczby *por* cząstek sąsiadujących ze sobą, a nie od liczby *cząstek* jak dotychczas zakłada się w modelowaniu właściwości fizycznych gleb (*por. np.* [5, 14, 86]).

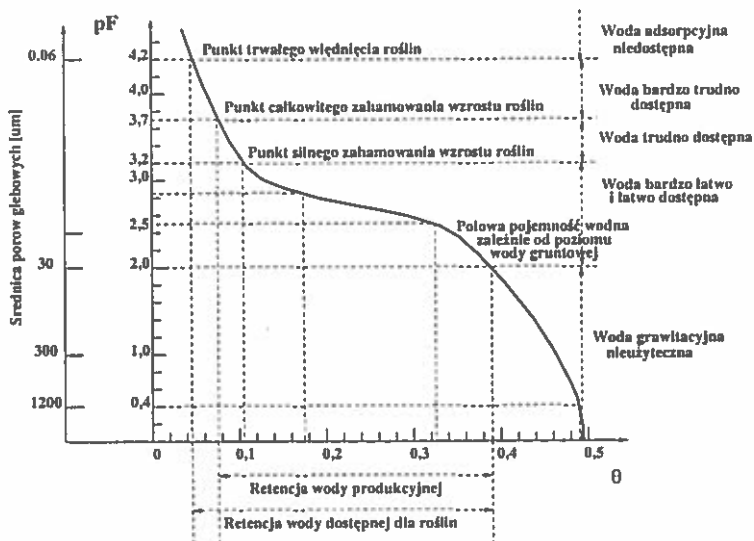
## 1.1. Kryteria klasyfikacji wody glebowej

Zgodnie z pracami [13, 84] dla potrzeb gleboznawstwa stworzono klasyfikację wody glebowej w zależności od stanu jej związania oraz mobilności. Jakkolwiek nie jest to jedyna klasyfikacja, warto o niej wspomnieć ze względu na jej praktyczne znaczenie.

Główne, wyróżnione tam, ze względu na wielkość energii wiązania, formy wody glebowej są następujące:

1. Woda wolna – jest najsłabiej związana z fazą stałą gleby. Wypełnia makropory, spękania i pory duże, ulega łatwemu przemieszczeniu pod wpływem sił grawitacji jako woda infiltracyjna (prześlakająca), może jednak ulegać stagnacji jako woda gruntowo-głębowa. Źródłem wody wolnej mogą być opady, spływ powierzchniowy lub też napływ podpowierzchniowy. Za wyjątkiem terenów podmokłych, woda wolna pochodząca z opadów, niezbyt długo przebywa w profilu glebowym.
2. Woda kapilarna – jest mocniej związana z fazą stałą niż woda wolna, wiązanie powstaje na skutek zwilżania cząstek stałych wodą przy jednoczesnej obecności powietrza w glebie. Niecałkowite nasycenie gleby powoduje, że powstają błonki wodne na granicy fazy ciekłej i gazowej dążące do zmniejszenia swojej powierzchni, co przy ustalonej geometrii fazy stałej powoduje obniżanie się ciśnienia wewnątrz wody (wytwarza się podciśnienie w stosunku do powietrza). Różnica ciśnień (lub podciśnień w stosunku do powietrza atmosferycznego), jaka występuje pomiędzy punktami o różnym uwilgotnieniu, jest głównym motorem przepływu wody kapilarnej w profilu glebowym. Siły grawitacji powodują znikomy ruch wody kapilarnej ponieważ gradienty ciśnienia wody glebowej są zwykle wielokrotnie większe niż gradient ciśnienia hydrostatycznego pochodzący od sił grawitacyjnych. W związku z tym, woda kapilarna ma zdolność podsiąkania również w kierunku przeciwnym do działania sił grawitacji. Fakt ten, w połączeniu ze znaczną mobilnością i stosunkowo łatwą przyswajalnością wody kapilarnej przez rośliny, powoduje, że z praktycznego punktu widzenia, zasoby wody kapilarnej w strefie korzeniowej i w jej pobliżu decydują o zasobności wody w profilu glebowym w ogóle.
3. Woda molekularna – woda ta jest silniej związana niż woda kapilarna. Prawie cała woda molekularna jest niedostępna dla roślin z powodu silnego przylegania do fazy stałej gleby, część może być wykorzystana przez rośliny ale znajduje się w zakresie wody bardzo trudno dostępnej. Woda molekularna ma znaczenie dla produkcji ale tylko jako woda umożliwiająca roślinom przetrwanie okresu posuchy.
4. Woda w postaci pary wodnej – stanowi mały procent wody glebowej, jej ważność wynika z dwu właściwości: jej mobilności i zdolności do zmiany stanu skupienia. Mobilność pary wodnej spowodowana wysokim współczynnikiem dyfuzji pary wodnej w powietrzu powoduje szybkie wysychanie powierzchniowej warstwy gleby i łatwe przenoszenie pary wodnej pod wpływem różnicy ciśnienia w powietrzu glebowym. Zdolność do zmiany stanu skupienia z równoczesnym pobieraniem lub oddawaniem dużych ilości ciepła (ciepło parowania) powoduje, że para wodna odgrywa znaczącą rolę w przenoszeniu ciepła w glebie. Występujące gradienty temperatury powodują, na odwrót, przenoszenie wody w postaci pary; po odparowaniu w cieplejszym miejscu następuje skroplenie wody w chłodniejszym miejscu.

Jak wynika z powyższej dyskusji, największa ilość wody dostępnej jaka może



Rys. 1. Przybliżone granice potencjałów dla wody o różnym stanie związania za [84] (rysunek uproszczony). Retencja wody produkcyjnej zachodzi w postaci wody kapilarnej w przybliżonym zakresie potencjałów od  $pF=2,0$  do  $pF=3,7$ .

być wykorzystana przez rośliny zawiera się w klasie nazywanej wodą kapilarną. Jakkolwiek dokładne granice energii wiązania tej wody nie są określone, można powiedzieć, że zawierają się one w przybliżeniu od  $pF$  2,0 do  $pF$  3,7. Górna granica energii ( $pF$  2,0) bierze się z określenia połowej pojemności wodnej jako wilgotności przy której woda przestaje się łatwo przenosić pod wpływem sił grawitacji, a dolna granica energii ( $pF$  3,7) wyznaczona jest przez najniższą energię wiązania wody produkcyjnej.

Ze względu na ważność retencji wody w wyżej wymienionym zakresie energii wiązania, pokrywającym zakres wody dostępnej dla roślin, zaproponowany w niniejszej pracy model przeznaczony jest przede wszystkim do opisu zjawiska wiązania wody kapilarnej. Możliwe rozszerzenia modelu mogą, jak się wydaje, posłużyć do opisu wiązania wody w rozszerzonym zakresie energii wiązania.

## 1.2. Potencjał wody glebowej

Definicja potencjału wody glebowej (jej stanu energetycznego) opiera się na argumentacji zaczerpniętej z termodynamiki. Szeroko zaakceptowanym jest fakt, że termodynamika klasyczna, zakładająca homogeniczność ośrodka glebowego oraz warunki równowagi termodynamicznej, opisuje zadowalająco niejednorodny (w skali wyznaczonej przez wymiar cząstek stałych) ośrodek glebowy. Zakłada się, że pa-



rametry stanu mają sens makroskopowy i ich zmienność lokalna nie ma wpływu na właściwości makroskopowej próbki [73]. Takie założenie prowadzi ostatecznie do traktowania ośrodka glebowego raczej jako ciekłego roztworu, zamiast jako trójfazowej mieszaniny. Faza stała, ciekła i gazowa stają się nierozróżnialne w tym opisie [9, 26, 73].

Definicja potencjału wody glebowej opiera się na założeniu, że w skali, w jakiej gleba jest rozpatrywana, jest ona ośrodkiem homogenicznym (jednorodnym) [32]. Oznacza to, że już na poziomie definicji zaniedbuje się opis wszelkich zjawisk powierzchniowych, pomijając wewnętrzną niejednorodność spowodowaną obecnością trzech faz materii w glebie (gazu, cieczy i fazy stałej). Takie założenie prowadzi do trudności teoretycznych i praktycznych wynikających z zaniedbania zjawisk fizycznych dominujących w skali wyznaczonej rozmiarami pojedynczych ziaren fazy stałej [33, 34, 35], a mających swe widoczne konsekwencje w skali wyznaczonej wielkością laboratoryjnie badanych makroskopowych próbek glebowych, czy też w skali pola uprawnego [23, 27].

Pośród zjawisk niewyjaśnionych na gruncie teorii ośrodków homogenicznych, można wymienić: mechanizm wiązania wody w ośrodku porowatym, w tym całkowite pominięcie zjawisk powierzchniowych, histerezę w przebiegu zależności potencjału wody glebowej – wilgotność, potencjału wody glebowej i przewodnictwa wodnego w strefie nienasyconej. Niektóre z tych zjawisk opisywane są na podstawie domenowych teorii histerezy [39, 16]

Ciśnienie równoważne wody glebowej, działające efektywnie w ośrodku glebowym, jest traktowane jako ciśnienie mierzone za pomocą bloczków porowatych. Z drugiej strony uznaje się je za parametr stanu wody glebowej w opisie termodynamicznym. Problemem jest wyrażenie ciśnienia w stanie, gdy woda jest wysokozwiązana. Prowadzi to do ciśnień ujemnych co do wartości i do trudności w jednolitym opisie termodynamicznym. Ciśnienie może być zatem używane jako parametr w równaniach tylko w ograniczonym zakresie energii wiązania wody w ośrodku porowatym [23, 64].

Za najwygodniejszy do opisu stanu termodynamicznego wody w glebie uznano potencjał chemiczny  $\mu(P, T, \Theta)$ , którego różniczka, w zależności od liczby parametrów może być zdefiniowana jako:

$$d\mu(P, T, \Theta) = \frac{\partial\mu}{\partial T}dT + \frac{\partial\mu}{\partial P}dP + \frac{\partial\mu}{\partial\Theta}d\Theta \quad (1)$$

gdzie:  $P$ ,  $T$ ,  $\Theta$  to ciśnienie, temperatura i wilgotność.

Na podstawie równania (1) można określić przyrost potencjału przy zmianie stanu wody glebowej od stanu  $A$  do stanu  $B$ . W przybliżeniu uznaje się [70], że równość:

$$\mu(P_B, T, \Theta_B) - \mu(P_A, T, \Theta_A) \approx \Psi_P(P_B) - \Psi_P(P_A) + \Psi_\Theta(\Theta_B) - \Psi_\Theta(\Theta_A) \quad (2)$$

jest spełniona z dostateczną do praktycznych celów dokładnością.

Tab. 1. Wartości pF przeliczone na różne jednostki do wyrażania wartości potencjału

pF	$Jm^{-3}$	Pa	cmH <sub>2</sub> O	bar
1,0	981	980,6	10	0,0098
1,5	3100	3100,7	31,6	0,031
2,0	9810	9806,0	100,0	0,098
2,2	15596	15541,5	158,5	0,155
2,3	19620	19565,9	199,5	0,196
2,7	49050	49146,7	501,2	0,491
3,4	245250	246315,9	2511,9	2,463
4,2	1471500	1554146	15849	15,54

Ze względu na złożoność układu faza stała – roztwór glebowy, istnieje wiele prób ulepszenia definicji potencjału wody glebowej. Iwata w publikacjach [32, 33, 34, 35], Sychev w publikacjach [77, 78], rozwinęli teorię niehomogeniczności energii wiązania wody w pobliżu cząstek mineralów ilastych w związku z oddziaływaniem sil Van der Waalsa na dipolową strukturę cząsteczek wody. Iwata wprowadził ideę “warstw” albo “faz” wody, podlegających tym oddziaływaniom w różnym natężeniu. Idea ta zrywa z rozumieniem ośrodka glebowego jako mikroskopowo homogenicznego.

Wpływ zjawisk powierzchniowych na właściwości wody glebowej jest akceptowany ale nie jest uwzględniony w obowiązującej definicji zaproponowanej przez I.S.S.S. [31]. Bardziej realistyczne traktowanie zagadnienia wiązania wody glebowej prowadzi do poważnych trudności pojęciowych, teoretycznych i pomiarowych [23, 27].

Potencjał wody glebowej wyrażany jest w jednostkach [ $J/m^3$ ], powszechnie używane są jednostki ciśnienia równoważnego (paskale, bary) lub nawet jednostki długości słupa wody wywierającego ciśnienie hydrostatyczne równe danemu. W naukach rolniczych używana jest również jednostka pF, która wyraża podciśnienie wody w skali logarytmicznej. W tabeli 1 przedstawiono najczęściej używane wartości potencjału wody glebowej wyrażone w różnych jednostkach:

W niniejszej pracy uznano, że w rozważanym zakresie energii wiązania, woda wiązana jest głównie na skutek zwilżania fazy stałej w warunkach obecności powietrza o ciśnieniu atmosferycznym. Prowadzi to do przypisania wiodącej roli zjawisku napięcia powierzchniowego i uznania, że jest ono podstawowym powodem powstawania podciśnienia w wodzie względem powietrza w warunkach występujących w nienasyconej glebie dla niezbyt wielkich energii wiązania.

## 2. METODY WYLICZANIA CHARAKTERYSTYK HYDROFIZYCZNYCH GLEB

Metody wyliczania charakterystyk hydrofizycznych są ciągle niedoskonałe. Podstawową przyczyną jest ekstremalna komplikacja obserwowana w glebie – obiekcie żywym i zmiennym – wymykająca się idealizacji i nie poddająca się uproszczeniom potrzebnym do jej zrozumienia.

Metody wyliczania oparte na założeniach teoretycznych wymagają dokonania wielu uproszczeń ideowych, zaniedbania wielu czynników komplikujących rzeczywiste procesy, a niemożliwych do uwzględnienia w modelu [68], co w konsekwencji zmniejsza dokładność przewidywań, a zatem i wartość metod.

Metody wyliczania charakterystyk hydrofizycznych gleb są trudne do zweryfikowania ze względu na znaczny rozrzut mierzonych charakterystyk gleb, wynikający z naturalnej zmienności przestrzennej obserwowanej w skali pola uprawnego.

W poszukiwaniu efektywnych metod pomiaru parametrów hydrofizycznych gleb zainwestowano wiele czasu i wysiłku, wyniki jednak nie są zadowalające. Jedną z przyczyn jest czasowa i przestrzenna zmienność tych parametrów w warunkach naturalnych, niwecząca przydatność wyników zwykle opartych na założeniu o jednorodności badanego obiektu [67].

Czasowa zmienność parametrów hydrofizycznych gleb jest silnie skorelowana ze zmiennością ich zagęszczenia powodowanego uprawą. Przestrzenna zmienność warunkowana jest przede wszystkim naturalną niejednorodnością gleby powodowaną przez różne czynniki od antropogenicznych do naturalnych [45].

### 2.1. Modele do wyliczania właściwości hydrofizycznych gleb z uziarnienia i innych parametrów fazy stałej

Istnieje wiele modeli korelacji statystycznych pomiędzy właściwościami hydrofizycznymi, a parametrami fazy stałej gleb. Pośród parametrów najczęściej branych pod uwagę wyliczyć można uziarnienie (rozkład granulometryczny), zagęszczenie, skład mineralogiczny (zawartość frakcji koloidalnej i rodzaj koloidów), parametry struktury gleby (rozkład agregatowy), zawartość substancji organicznych, itp. [74, 86].

Można wyróżnić dwa typy modeli: pierwszy polegający na korelacji współczynników jakiegoś modelu teoretycznego opisującego całą charakterystykę hydrofizyczną, z wybranymi parametrami fizycznymi i strukturalnymi gleby [6, 25, 67, 85], i drugi polegający na korelacji punktów na hydrofizycznych charakterystykach dla określonych wartości potencjału z wybranymi parametrami fazy stałej gleby [1, 7, 68, 86].

Metody te mają jednak swoje wady. Do uzyskania wyników potrzebny jest reprezentatywny dla badanych gleb zestaw danych pomiarowych. Oznacza to konieczność przebadania wszystkich gleb, dla których model ma być stosowany. Po

drugie wyniki otrzymywane przy użyciu tych metod są trudne w ekstrapolacji na inne, nieprzebadane gleby, ze względu na możliwość istnienia czynnika, który zdominuje zależność hydrofizyczną tej specyficznej gleby, a nieobecnego w glebach przebadanych. Oprócz tego metody te dają w wyniku zależność średnią (w tym sensie, że wyliczone parametry są średnie dla wszystkich gleb wziętych pod uwagę), a więc nie są optymalne dla każdej gleby z osobna. Jest to cena jaką się płaci za względną uniwersalność tych modeli.

Inną wadą wymienionych modeli jest ich słabe powiązanie z opisem podstawowych procesów fizycznych zachodzących w glebie. Prowadzą one jedynie do zależności empirycznych, nie mających zwykle głębszego poparcia w fizycznej teorii ciał kapilarno porowatych, do jakich należy ośrodek glebowy.

Inna klasa modeli wyróżnia się szczególnie tym, że do opisu poszczególnych charakterystyk hydrofizycznych wykorzystuje się funkcje o znanym przebiegu, których współczynniki mogą być wyznaczone z parametrów badanych gleb. Pośród nich wyróżnia się szczególnie często używany model opracowany w publikacji [19]. Istnieje wiele wersji tego modelu mniej lub bardziej dokładnie pasujących do krzywych eksperymentalnych [24, 63, 80].

Osobną grupę modeli stanowią próby opisu krzywych retencji wody i przewodnictwa wodnego za pomocą parametrów uziarnienia. Spośród nich wymienić można na przykład modele opisane w publikacjach: [3, 6, 28]. Przegląd uznanych modeli dokonany został w pracy [14].

Nieliczne modele uwzględniające mikroskopową strukturę ziarnistą gleby do wyznaczania charakterystyk wodnych zaprezentowane są na przykład w publikacjach [5, 14, 55].

Konstrukcja wiarygodnych modeli wymaga ich weryfikacji na podstawie równie wiarygodnych danych pomiarowych. Bazy danych wymagane do takich badań są zwykle ubogie, niekompletne, rozproszone i różnie sformatowane. Wymagany jest dodatkowy wysiłek do skompletowania jak najszerzej bazy danych tego typu.

Istotnym problemem jest brak łatwych i tanich, a przy tym nieniszczących metod pomiarowych do określania charakterystyk hydrofizycznych gleb, w szczególności w strefie nienasyconej. Metoda TDR do pomiaru wilgotności gleby, intensywnie ostatnio rozwijana, jest rozwiązaniem posiadającym wiele pozytywnych cech [46, 60, 71, 88]; pomiary innych parametrów wymagają dalszych intensywnych prac. Dodatkowym problemem, który nie został do dziś rozwiązany, jest niekompatybilność metod pomiarowych używanych w różnych ośrodkach naukowych do pomiarów tych samych wielkości fizycznych. Powoduje to trudności w wykorzystaniu danych uzyskanych różnymi metodami przez różne ośrodki.

W świetle danych literaturowych, a także prac własnych autora, można wnioskować, że brak fizycznych teorii do opisu struktury gleby i zjawiska wiązania wody, jest poważnym utrudnieniem w zrozumieniu podstawowych procesów zachodzących w profilu glebowym. W niniejszej pracy zaproponowano jeden z opisów możliwych do zastosowania w ważnym z praktycznego punktu widzenia zakresie energii wiązania wody.

### 3. CEL, ZAKRES I HIPOTEZA ROBOCZA PRACY

Celem pracy jest zaproponowanie opisu konfiguracji fazy stałej gleby o zróżnicowanym uziarnieniu umożliwiające wyliczanie niektórych charakterystyk fizycznych tego ośrodka w oparciu o opis zjawisk fizycznych w kategoriach teorii ośrodków nieuporządkowanych, w skali wyznaczonej rozmiarami pojedynczych ziaren fazy stałej. Zaproponowanie metody uśredniania zjawisk i wielkości fizycznych w skali pojedynczych ziaren fazy stałej tak, by odpowiednie wartości średnie reprezentowały wielkości fizyczne mierzalne w skali makroskopowych próbek glebowych. Zastosowanie zaproponowanego opisu zaprezentowano na przykładzie modelowania krzywej retencji wody gleb przy użyciu wybranych parametrów fazy stałej jako danych wejściowych.

Założono, że ocena przydatności zaproponowanego modelu zostanie dokonana na podstawie zgodności wyliczonych wartości średnich wilgotności ze zmierzonymi doświadczalnie wilgotnościami, które należy traktować jako wartości uśrednione po objętości próbek.

#### 3.1. Podstawowe założenia

Realizację celu pracy oparto na następujących założeniach i hipotezach:

1. Teoria ośrodków nieuporządkowanych pozwoli opisać ziarnisty ośrodek nieuporządkowany, jakim jest gleba, z dostateczną dokładnością i elastycznością.
2. Uśrednianie wielkości fizycznych w skali wyznaczonej rozmiarami ziaren stałych doprowadzi do wyliczenia mierzalnych makroskopowo parametrów fizycznych gleby.

W pracy tej, na podstawie teorii ośrodków nieuporządkowanych, zaproponowano metodę wyznaczania wartości średnich wielkości fizycznych używanych do opisu stanu gleby, na przykładzie wilgotności w funkcji potencjału wody glebowej, z zakresem stosowności pokrywającym zakres wody dostępnej dla roślin.

Dla dokonania zamierzonego opisu ośrodka glebowego w terminach teorii ośrodków nieuporządkowanych dokonano następujących założeń oraz uproszczeń:

- Cząstki należą do  $K$  frakcji granulometrycznych o ustalonym udziale masy każdej frakcji, reprezentatywnym dla modelowanej gleby,
- W każdej frakcji granulometrycznej cząstki mają jednakową średnicę równą środkowej średnicy frakcji,
- Modelowy ośrodek złożony jest z mieszaniny kul o średnicach odpowiednich do założonego uziarnienia,
- Kule rozłożone są w sposób nieuporządkowany w objętości  $V$ , tak że gęstość ośrodka modelowego równa się gęstości gleby, którą ośrodek modeluje,
- Nieuporządkowany rozkład kul uznany jest za statystycznie jednorodny tzn. jego własności statystyczne nie zależą od położenia punktu, w którym je obliczono,

- Nieuporządkowany rozkład kul uznany jest za izotropowy tzn. żadne jego własności nie zależą od wyboru kierunków w przestrzeni,
- Ośrodek modelujący glebę składa się z cząstek stałych o kształcie kulistym, idealnie zwilżanych wodą,
- Woda może gromadzić się na pojedynczych cząstkach stałych, oraz tworząc soczewki pomiędzy parami cząstek, które sąsiadują ze sobą.

### 3.2. Schemat realizacji

Na Rys. 2 przedstawiono elementy teorii składające się na model. Ośrodek glebowy w pracy potraktowano dwojako.

Po pierwsze, ośrodek glebowy w skali makroskopowej próbki glebowej traktowany jest jako nieuporządkowany ośrodek ziarnisty, który poddaje się opisowi statystycznemu, a w szczególności opisowi za pomocą teorii radialnych funkcji rozkładu. W ramach teorii radialnych funkcji rozkładu zaproponowano metodę wyliczania wartości średniej z objętości wody zawartej w soczewkach w danej objętości gleby oraz wody związanej na pojedynczych ziarnach stałych. Wyliczona wartość średnia jest przeliczalna na wilgotność objętościową rozważanej próbki. Dane do obliczeń stanowią uziarnienie oraz zagęszczenie rozważanej próbki gleby.

Po drugie, w kategoriach deterministycznej teorii fizycznej opisano właściwości soczewek wodnych jakie tworzą się na styku kulistych cząstek stałych. Rozwiązanie równania opartego na wzorze Laplace'a dla takiej sytuacji pozwala na wyznaczenie objętości soczewek wodnych dla różnych wartości podciśnienia i parametrów wyznaczających geometrię układu (odległości pomiędzy cząstkami i ich promienie).

Wyliczenie przebiegu zmian objętości wody magazynowanej w soczewkach w zależności od podciśnienia prowadzi do mikrokrzywych retencji wody tj. do krzywych retencji wody pomiędzy parami cząstek stałych.

Dodatковым wynikiem rozwiązania równania opartego na wzorze Laplace'a jest określenie siły oddziaływania, z jaką woda przyciąga zwilżane cząstki stałe. Ten ostatni wynik sygnalizuje dalsze możliwe zastosowania zaproponowanej teorii do opisu własności mechanicznych zależnych od wilgotności ośrodka ziarnistego.

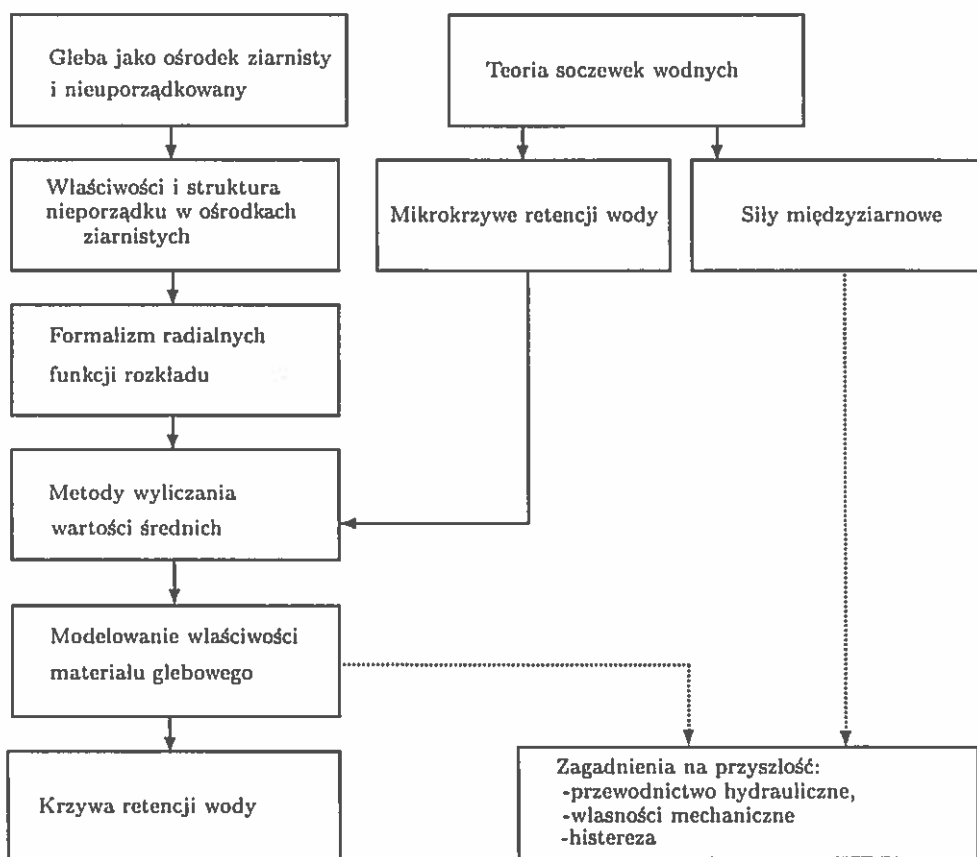
Dokonanie obliczeń, na podstawie zaproponowanego modelu praktycznego, dla różnych wartości podciśnienia wody glebowej prowadzi do wyznaczenia krzywej retencji wody w żądanym zakresie podciśnienia panującego w próbce.

Zastosowanie dwóch teorii: deterministycznej i statystycznej jednocześnie, do opisu nieuporządkowanego ośrodka glebowego, umożliwiło uwzględnienie zjawisk fizycznych takich jak zwilżanie czy napięcie powierzchniowe w opisie mechanizmu wiązania wody w tym ośrodku.

Zaproponowany model uwydatnia zjawisko fizyczne wiązania wody w soczewkach wodnych na skutek zjawiska zwilżania fazy stałej gleby, przy jednoczesnym spadku ciśnienia wewnątrz fazy ciekłej. Jasno stawia też fakt, że dużą część powierzchni ograniczającej fazę ciekłą stanowi błonka utrzymywana siłami napięcia

## Interpretacja

probabilistyczna      deterministyczna



Rys. 2. Traktowanie ośrodka glebowego jako deterministycznego w mikroskali (skali wyznaczonej przez rozmiar ziaren stałych) i przypadkowego w makroskali (skali wyznaczonej przez rozmiar próbki, wielokrotnie większej niż ziarna stałe) umożliwia konstrukcję modelu retencji wody na podstawie fizycznych przesłanek

powierzchniowego. W tym kontekście, nie ma zatem wyraźnej potrzeby wprowadzania w sposób sztuczny pojęcia "por" ani "kapilara glebowa". Średnice równoważne soczewek mogą być łatwo wprowadzone przy użyciu średnic cząstek je tworzących.

## 4. STATYSTYCZNY MODEL STRUKTURY GLEBY

### 4.1. Gleba jako nieuporządkowany ośrodek ziarnisty

W tym rozdziale zaproponowano użycie metody opisu nieuporządkowanego ośrodka glebowego opartej na formalizmie radialnych funkcji rozkładu. Używając radialnych funkcji rozkładu mieszaniny twardych kul, zaproponowano metodę wyliczania krzywej retencji wody modelowego ośrodka o zadanym uziarnieniu i zagęszczeniu. Metoda ta oparta jest na znajomości mikrokrzywych retencji wody w skali pojedynczych ziaren stałych oraz na algorytmie uśredniania właściwości mikroskopowych ośrodka przy użyciu radialnych funkcji rozkładu. Wynikowy wzór opisuje retencję wody zarówno na powierzchni fazy stałej jak i na stykach pomiędzy parami ziaren stałych.

#### 4.1.1. Nieporządek i uporządkowanie w glebie

Istnienie sił oddziaływania pomiędzy składnikami gleby powoduje pewien stopień ich uporządkowania (por. np. [76]). Uporządkowanie to wynika z kilku prostych praw fizycznych. Pierwszym czynnikiem porządkującym jest siła ciężenia powodująca, że cząstki glebowe przyjmują najniższe z możliwych, w danej sytuacji położenia. W przypadku niesferyczności cząstek powoduje to pewien stopień ich uporządkowania. Cząstki wydłużone lub w formie płytek przybierają częściej wyróżniony kierunek co powoduje makroskopową anizotropowość możliwą do zaobserwowania w próbkach glebowych.

Czynnikiem, który porządkuje w trochę innym sensie cząstki glebowe jest ich wzajemne oddziaływanie powodujące, że dana cząstka nie może zająć objętości już zajętej przez inną. W wyniku tego powstaje pewne spontaniczne uporządkowanie, szczególnie widoczne w glebach złożonych z cząstek o zbliżonych wymiarach i mające dalekie odniesienie do porządku występującego w sieci krystalicznej ciał stałych.

Innym istotnym czynnikiem porządkującym cząsteczki fazy stałej jest oddziaływanie sił adhezji i napięcia powierzchniowego pomiędzy fazą stałą i cieczą. Oddziaływanie to powoduje wzajemne przyciąganie cząstek stałych poprzez soczewki wodne oraz przyleganie substancji organicznej do cząstek mineralnych. Oddziaływanie to – w dużym stopniu powodowane przez wodę – jest skorelowane z aktualną wartością ciśnienia wody glebowej. Dla ciśnienia wody glebowej niższego od atmosferycznego siły te mają charakter przyciągający. Wzmiankowane oddziaływanie powoduje inny rodzaj szczególnego uporządkowania polegający na grupowaniu się



cząstek o małych średnicach wokół cząstek o dużych średnicach. Ten typ oddziaływania wspomaga także powstawanie i utrzymanie struktury gruzelkowej gleby.

Uporządkowanie obserwowane w próbkach glebowych pozwala na poszukiwanie pewnych prawidłowości w ich strukturze. Naturalny nieporządek uzasadnia użycie metod statystycznych. Z tego punktu widzenia mierzalne, makroskopowe właściwości gleby należy traktować jako wartości średnie liczone po naturalnie występujących, przypadkowych, konfiguracjach. Ścisłej mówiąc, należałoby określić prawdopodobieństwo wystąpienia wszystkich możliwych konfiguracji cząstek fazy stałej gleby i policzyć wartość średnią interesującego parametru, o którym wiadomo, że zależy od wymienionych konfiguracji.

Występowanie krótkozasięgowego uporządkowania położenia cząstek fazy stałej gleby jakie obserwuje się wokół poszczególnych cząstek, a zanikającego wraz z odległością, upoważnia do wprowadzenia korelacji jako miary uporządkowania. Dwucząstkowe funkcje korelacji opisują prawdopodobieństwo znalezienia cząstki danego rodzaju w danym położeniu względem wybranej cząstki. Funkcje te mogą być użytecznym narzędziem służącym do opisu struktury gleby.

Rzadko spotyka się w przyrodzie stan idealnego nieporządku. W większości przypadków należy uwzględnić istnienie korelacji między cząstkami położonymi w małej odległości od siebie (najbliższymi i dalszymi sąsiadami) [83]. W układach nieuporządkowanych krótkozasięgowo uporządkowanie zanika w miarę zwiększania odległości.

#### 4.1.2. Mechanika statystyczna mieszanin cząstek

Możliwość analizy właściwości termodynamicznych układów wielu ciał na podstawie znajomości dwuczłowego potencjału oddziaływania otwarto w pracy [59]. Równanie stanu dla mieszanin twardych kul zostało znalezione w pracy [81] na podstawie równania zaproponowanego w [59]. Równanie na radialną funkcję rozkładu zostało rozwiązane dla mieszaniny twardych kul w pracy [40].

Metody obliczania radialnych funkcji rozkładu w mieszaninach cieczy i cieczech czystych rozwinięto w pracach [22, 29, 30, 41]. Uzyskane rozwiązania umożliwiają obliczenie radialnych funkcji rozkładu cząstek oddziałujących modelowym potencjałem twardych nieprzenikliwych kul, a także przy założonych innych funkcjach oddziaływań międzycząsteczkowych [72].

Tendencja stosowania osiągnięć termodynamiki statystycznej do zagadnień fizyki proszków i materiałów porowatych jest ostatnio coraz wyraźniejsza [15]. Gleba może być rozważana, podobnie jak i mieszanina proszków o różnych średnicach ziaren, z wykorzystaniem osiągnięć mechaniki statystycznej. Mechanika statystyczna traktuje o ośrodku ziarnistym i nieuporządkowanym zawierającym mniej więcej  $10^{22}$  atomów w każdym mililitrze. Liczba ta dla gleb zawiera się w przybliżeniu w granicach  $10^3$ – $10^{10}$ . Liczby te, jakkolwiek małe w porównaniu z  $10^{22}$ , są wystarczająco duże, aby wartości średnie wielkości fizycznych wyliczone na ich podstawie były statystycznie wiarygodne.

Opierając się na tego typu rozumowaniu autorzy pracy [15] odwołują się bezpośrednio do analogii pomiędzy ośrodkiem ziarnistym (proszkiem) a gazem opisywanym przez termodynamikę statystyczną. Na podstawie tej analogii autorzy wnioskuje o ściśliwości nieuporządkowanych proszków i mieszanin proszków stosując znane od dawna rozwiązania zagadnień termodynamiki statystycznej.

Podejście to zostało rozwinięte i poszerzone w pracach [4, 49, 52, 53], do przewidywania osiadania oraz separacji frakcji proszków pod wpływem drgań. W pracy [50] opisano ruchy kolektywne w masie proszku z uwzględnieniem procesu spulchniania, relaksacji oraz histerezy w ruchu proszku. Mikroskopowa analiza nieuporządkowanej struktury proszku za pomocą funkcji korelacyjnych par ziaren została natomiast opisana w pracy [51].

W oparciu o sformalizowaną teorię mieszanin, w pracy [56] wyprowadzono formuły na niektóre właściwości ośrodków ciągłych z niejednorodnościami.

Ścisłe podejście do opisu ośrodków nieuporządkowanych metodami mechaniki statystycznej zaprezentowano w pracy [75]. W pracy tej scharakteryzowano materiał o nieuporządkowanej strukturze składający się z przypadkowych wtrąceń w jednorodnym otoczeniu.

Opis oddziaływania niemieszających się płynów w ośrodku porowatym opierający się na teorii mieszanin zaprezentowany jest w pracy [54]. Autorzy opisują przepływ masy i pędu płynu w dwóch różnych skalach wielkości: mniejszej niż rozmiar ziaren i znacznie większej niż rozmiar ziaren. Większa skala użyta jest do wyznaczenia wartości średnich strumieni przepływu.

Niektóre metody opisu konfiguracji nieuporządkowanych zbiorów atomów, sieci nieuporządkowanych, obiektów biologicznych i innych występujących w naturze zaprezentowano w pracy [57]. W pracach [58, 65] pokazano ściśle obliczenia wielkości średnich występowania obiektów w nieuporządkowanych zbiorach oraz metody modelowania nieuporządkowanych procesów punktowych o zadanej z góry strukturze statystycznej.

Układy nieuporządkowane cząstek mogą być charakteryzowane przez podanie ich statystycznych właściwości. W praktyce najważniejszą z nich jest radialna funkcja rozkładu [83]. Porównując zmierzone i obliczone (metodą Monte Carlo) radialne funkcje rozkładu autorzy charakteryzują lokalne właściwości nieuporządkowanego ośrodka dla różnych gęstości upakowania cząstek. Analityczne równanie stanu dla mieszaniny cząstek różniących się średnicą przedstawiono w pracy [72].

Zależność efektywnych (średnich) właściwości ośrodka nieuporządkowanego (przewodnictwa elektrycznego, współczynnika sprężystości) od jego mikrostruktury badano w pracy [82].

## 4.2. Geometria ośrodka modelowego

W niniejszej pracy założono, że modelowy ośrodek glebowy składa się z kulistych cząstek stałych o wymiarach określonych przez uziarnienie, w którym wyróżniamy  $K$  frakcji [86]. Zakładamy, że cząstki w wyróżnionych frakcjach granulometrycznych

mają ustalone, jednakowe średnice.

Za pracą [86] wprowadzimy następujące oznaczenia:

$P_i$  – ułamek masowy zawartości  $i$ -tej frakcji – uziarnienie (rozkład granulometryczny),

$D_i$  – środkowa średnica cząstek w  $i$ -tej frakcji

$r_i = D_i/2$  – środkowy promień cząstek fazy stałej  $i$ -tej frakcji

$\rho_i^s$  – gęstość fazy stałej cząstek w  $i$ -tej frakcji

Wykorzystując te oznaczenia i założenie o kulistości cząstek fazy stałej można wyznaczyć liczbę cząstek  $n_i$  każdej ze średnic przypadających na jednostkę masy gleby:

$$n_i = \frac{3P_i}{4\pi\rho_i^s r_i^3} . \quad (3)$$

Liczba cząstek o danej średnicy, zawarta w pewnej masie  $m$  mieszaniny, jest wyrażona równaniem:

$$N_i = mn_i . \quad (4)$$

Całkowita liczba cząstek  $N$  zawartych w próbce gleby o masie  $m$  równa się sumie cząstek zawartych we wszystkich frakcjach.

$$N = \sum_{i=1}^K N_i . \quad (5)$$

Lub po skorzystaniu z równania (4) i (3) wyraża się równaniem:

$$N = m \sum_{i=1}^K \frac{3P_i}{4\pi\rho_i^s r_i^3} . \quad (6)$$

Korzystając z określeń wielkości zdefiniowanych równaniami (4) oraz (6) określono ułamek udziału liczby cząstek w mieszaninie  $x_i$ :

$$x_i = \frac{N_i}{N} . \quad (7)$$

Oznaczmy gęstość suchej gleby przez  $\rho_b$  zdefiniowaną jako:

$$\rho_b = \frac{m}{V} \quad (8)$$

gdzie  $V$  jest objętością zajmowaną przez glebę.

Liczba cząstek w jednostkowej objętości  $\rho$ , zwana gęstością punktową cząstek, wynosi:

$$\rho = \frac{N}{V} = \rho_b \sum_{i=1}^K \frac{3P_i}{4\pi\rho_i^s r_i^3} . \quad (9)$$

Przeciętna objętość przypadająca na jedną cząstkę stałą wynosi:

$$v = \frac{V}{N} . \quad (10)$$

Objętość przypadająca na cząstkę każdej z frakcji granulometrycznych przy założeniu, że tylko one zajmują objętość  $V$  wynosi:

$$v_i = \frac{V}{N_i} . \quad (11)$$

Odwrotności wielkości określonych we wzorach (10) i (11) nazwano gęstościami punktowymi cząstek:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{v} \\ \rho_i &= \frac{1}{v_i} \end{aligned} \quad (12)$$

odpowiednio dla wszystkich cząstek i dla cząstek z  $i$ -tej frakcji granulometrycznej.

#### 4.2.1. Cząsteczkowe funkcje rozkładu

Najprostszym pojęciowo sposobem opisu układu  $N$  cząstek byłoby podanie wszystkich promieni wodzących  $r_1, \dots, r_N$  cząstek, a także położenia ich osi względem wyróżnionego kierunku. Opis makroskopowej próbki, gdy liczba cząstek jest duża (w próbce gleby może być mniej więcej  $10^3$ – $10^{10}/\text{cm}^3$  cząstek stałych), jest jednak trudny do zrealizowania. W takiej sytuacji wygodnie jest wyrazić parametry układu poprzez notację statystyczną.

Potrzeba modelowania struktury fazy stałej gleby za pomocą teorii statystycznych wynika przede wszystkim z braku informacji na temat rzeczywistych położzeń cząstek i z trudności w modelowaniu próbek gleby złożonych z wielu cząstek (modelowanie metodą Monte Carlo [10]). Potraktowanie położzeń ziaren jako twórców przypadkowych w sensie teorii statystycznych, np. w kategorii pól losowych, procesów punktowych etc., umożliwia wykorzystanie aparatu matematycznego oferowanego przez statystykę i tworzenie modeli oddających najważniejsze właściwości makroskopowych próbek.

Jednym z narzędzi użytecznych w takiej sytuacji są cząsteczkowe funkcje rozkładu [82]. Reprezentują one  $k$  cząstkowe gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstek w określonych położeniach zgodnie ze wzorem:

$$dP(1, 2, \dots, k) = n(1, 2, \dots, k)d1d2\dots dk \quad (13)$$

gdzie:

$dP(1, 2, \dots, k)$  jest prawdopodobieństwem znalezienia cząstki 1 w objętości  $d1$  wokół położenia 1, cząstki 2 w objętości  $d2$  wokół położenia 2 itd. aż do cząstki  $k$  w położeniu  $k$ .

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia  $k$  cząstek w wybranych położeniach reprezentowana jest przez funkcje  $n(1, 2, \dots, k)$ .

Aby w pełni opisać przypadkowe rozłożenia cząstek należy podać gęstości jednocząstkowe, dwucząstkowe, trzycząstkowe itd. W praktyce rzadko sięga się do opisu trójcząstkowego kończąc zwykle na opisie dwucząstkowym. Podyktowane jest to trudnościami w oszacowaniu gęstości wyższych rzędów z wymaganą dokładnością, a także faktem, że opis za pomocą dwucząstkowych funkcji rozkładu wnosi wiele do obrazu fizycznego zjawisk [69, 90].

Z podstawowego założenia o statystycznej jednorodności rozważanej mieszaniny cząstek wynika, że średnia liczba cząstek w jednostce objętości jest stała i wynosi (zgodnie z definicją we wzorze (13)):

$$n(1) = \frac{N}{V} = \rho \quad (14)$$

niezależnie od położenia rozważanej cząstki.  $n(1)$  reprezentuje po prostu liczbę cząstek w jednostce objętości.

Obliczenia upraszczają się po wprowadzeniu kanonicznych funkcji rozkładu  $g(1, 2, \dots, k)$  w formie:

$$g(1, 2, \dots, k) = n(1, 2, \dots, k)/N^k \quad (15)$$

Całka z funkcji  $g(1, 2, \dots, k)$  po jednostkowej objętości równa się jedności. Innymi słowy wielkość  $g$  określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia dokładnie takiego typu konfiguracji  $k$  cząstek spośród wszystkich sposobów rozmieszczenia tych cząstek w przestrzeni, przy założonej gęstości, niezależnie od położenia innych cząstek.

Wielkości fizyczne charakteryzujące lokalnie ośrodek nieuporządkowany są najczęściej zależne od wzajemnego położenia cząstek. W szczególnych przypadkach możliwy jest rozkład danej wielkości  $v$  na część zależną od położenia pojedynczych cząstek  $v_1$ , położenia par cząstek względem siebie  $v_{12}$ , położenia trójek cząstek  $v_{123}$  etc. [36, 37, 92]. W takim przypadku wartość średnia objętościowa wielkości fizycznej  $\langle v \rangle$  może zostać wyrażona w postaci szeregu, w którym pierwszy wyraz to wkład od pojedynczych cząstek, drugi od par cząstek, każdy następny wyraz obrazuje wkład od większej o jeden liczby cząstek niż poprzedni:

$$\langle v \rangle = \langle v_1 n(1) \rangle + \langle v_{12} n(1, 2) \rangle + \langle v_{123} n(1, 2, 3) \rangle + \dots \quad (16)$$

a znak  $\langle \dots \rangle$  oznacza uśrednianie objętościowe.

Wiele właściwości mieszaniny cząstek sferycznie symetrycznych można opisać za pomocą dwucząstkowych funkcji rozkładu. Zgodnie z założoną jednorodnością ośrodka funkcje te zależą jedynie od długości wektora łączącego oba rozważane punkty  $r = |r_{1-2}|$  i wtedy  $g(1, 2) = g(r)$ . Funkcje te, zwyczajowo, nazywane są radialnymi funkcjami rozkładu.

Informacja o strukturze materiału makroskopowo izotropowego, a mikroskopowo niejednorodnego, zawarta w radialnej funkcji rozkładu może pochodzić z pomiarów

rentgenograficznych lub mikroskopowych. Metody wnioskowania o właściwościach materiału na podstawie przebiegu radialnych funkcji rozkładu są intensywnie rozwijane [42, 47, 51, 57, 91].

Niektóre cechy radialnej funkcji rozkładu materiałów ziarnistych poddają się natychmiastowej fizycznej interpretacji. W szczególności ma ona zerową wartość w pobliżu zera argumentu. Ziarna mają skończone wymiary i prawdopodobieństwo znalezienia innego ziarna w obszarze zajmowanym przez dane ziarno równa się zero (ziarna nie mogą się nawzajem przenikać). Na dużych odległościach radialna funkcja rozkładu przyjmuje wartość równą jedności, co jest oznaką, że wszelki związek położenia odległych cząstek z położeniem cząstki w początku układu współrzędnych zanika. W pośrednich odległościach funkcja ta odwzorowuje lokalne odchylenia gęstości cząstek w funkcji promienia. Zwykle osiąga ona maksimum dla pewnej wartości promienia  $r_0$ . Jest to równoważne pierwszej sferze koordynacyjnej w kryształach, a występuje również w nieuporządkowanych ośrodkach ziarnistych. Całka po objętości kuli zawierającej pierwszy pik w postaci:

$$z = 4\pi \int r^2 g(r) dr \quad (17)$$

jest utożsamiana z pierwszą liczbą koordynacyjną z tj. liczbą najbliższych sąsiadów danej cząstki. Analogicznie drugi pik reprezentuje drugą sferę koordynacyjną itd.. Liczba koordynacyjna w materiałach o nieuporządkowanej strukturze nie jest dobrze określona ze względu na przekrywanie się maksimów radialnej funkcji rozkładu spowodowane nieporządkiem. Dalsze maksima radialnych funkcji rozkładu reprezentujące następne sfery koordynacyjne są coraz bardziej rozmyte ze względu na przekrywanie się rozmytych pików lub mogą zupełnie zanikać gdy nieporządek jest wyraźnie zaznaczony. Ostatecznie  $g(r) \rightarrow 1$  dla dostatecznie dużych promieni. Pierwsze maksimum radialnej funkcji rozkładu mieszaniny cząstek o różnych średnicach wyznaczone jest poprzez wartość średnią średnicy cząstek w mieszaninie.

### 4.3. Uśrednianie w ośrodku glebowym

Woda w glebie może być uważana za związaną na co najmniej dwa sposoby; poprzez przyleganie do poszczególnych ziaren stałych oraz poprzez tworzenie soczewek wody pomiędzy co najmniej dwoma ziarnami stałymi.

Pierwszy sposób wiązania wynika z bliskości poszczególnych ziaren stałych. Woda związana jest poprzez tworzenie soczewek pomiędzy dwoma (lub więcej) cząstkami stałymi. Wiązanie wody w ten sposób nie jest zbyt silne tak, że rośliny pobierają ją bez przeszkód. Woda tak związana jest dostatecznie mobilna aby łatwo przemieszczać się i uzupełnić wodę pobraną w strefie korzeniowej przez transpirujące rośliny.

Drugi natomiast sposób charakterystyczny jest dla wody związanej adsorpcyjnie z fazą stałą, a także dla wody, która okupuje zagłębienia i szczeliny wewnątrz cząstek stałych. Do naszych rozważań istotnym jest, że do utrzymania wody w takim stanie nie jest wymagane sąsiedztwo innych cząstek. Jakkolwiek wiązanie to może być

silne, ilość wody w ten sposób związanej nie jest wielka (wyjątek stanowią gleby o wysokiej zawartości części splawialnych (o średnicy mniejszej niż  $0,02mm$ ), a w szczególności mineralów ilastych [79, 86]). Obliczenia modelowe wykazują, że ilość wody dla  $pF=4,2$  jest szczególnie silnie skorelowana z powierzchnią właściwą wyznaczaną metodą adsorpcji pary wodnej [11, 12, 86].

Uwzględnienie jedynie dwu typów wiązania wody jest uproszczeniem umożliwiającym zakończenie szeregu we wzorze (16) na drugim wyrazie i zastosowanie takiego wzoru do wyliczania objętości wody związanej w glebie.

Upraszczając założymy, że główny wkład w objętości wody kapilarnej mają soczewki rozpięte na dwóch ziarnach stałych i że one gromadzą przeważającą ilość wody związanej w glebie. Założenie to spełnione jest w zakresie średnich wartości podciśnienia, w szczególności w zakresie wody dostępnej dla roślin. Nie jest ono jednak spełnione w nasyceniu i jego pobliżu (w zależności od średnic ziaren stałych) gdzie soczewki nie są dostatecznie izolowane.

#### 4.3.1. Woda w ośrodku złożonym z cząstek o jednakowych średnicach

Znając radialną funkcję rozkładu nieuporządkowanego układu cząstek o jednakowym promieniu  $g(r)$ , można powiedzieć, że dana cząstka posiada, na średnio, liczbę sąsiadów, położonych w odległości od  $r$  do  $r + dr$ , daną wzorem:

$$n(r)dr = \rho g(r)4\pi r^2 dr . \quad (18)$$

Scalkowanie równania (18) prowadzi do wyznaczenia średniej liczby cząstek zawartych w kuli o promieniu  $r$  pomniejszonej o jedność.

Jeżeli pewna wielkość fizyczna jest funkcją liczby par cząstek to jej średnia wartość może być wyznaczona przy użyciu wzoru (18) opisującego liczbę sąsiadów.

Zalóżmy, że objętość soczewek wody łączących dwie cząstki odległe o  $r$  wynosi  $v(r)$ . Średnia ilość wody zawartej pomiędzy cząstkami położonymi w odległości od  $r$  do  $r + dr$  w soczewkach wokół cząsteczki dana jest równaniem:

$$V(r)dr = v(r)\rho g(r)4\pi r^2 dr . \quad (19)$$

Scalkowanie zależności (19) po  $r$  daje w wyniku całkowitą ilość wody jaka gromadzi się w soczewkach wokół danej cząsteczki:

$$V_c = 4\pi\rho \int_0^\infty v(r)g(r)r^2 dr . \quad (20)$$

Aby wyznaczyć ilość wody zawartej we wszystkich soczewkach wokół wszystkich cząstek należy wynik równania (20) pomnożyć przez liczbę cząstek w rozpatrywanej próbce gleby, a następnie podzielić na dwa aby uniknąć dwukrotnego uwzględniania tych samych soczewek, raz z jedną a później z drugą cząstką je tworzącą.

$$V_{tot} = N * V_c/2 \quad (21)$$

czyli:

$$V_{tot} = 2\pi V \rho^2 \int_0^{\infty} v(r)g(r)r^2 dr . \quad (22)$$

Ze względu na fakt, że soczewki wodne powstałe pomiędzy dwoma kulistymi cząstkami w warunkach panującego w wodzie podciśnienia względem fazy gazowej mają skończone wymiary, całkowanie we wzorach (20) może być rozciągnięte do nieskończoności bez obawy o rozbieżność całki.

#### 4.4. Obliczanie wilgotności próbki glebowej

Rozszerzając uprzednie rozumowanie do mieszanki cząstek kulistych o niejednakowych średnicach można obliczyć wilgotność modelowego ośrodka.

Radialna funkcja rozkładu cząstek z frakcji  $j$  wokół cząstki z frakcji  $i$  gdzie wskaźniki:  $i, j \in 1, \dots, K$  oznaczają numery poszczególnych frakcji cząstek, oznaczając będziemy symbolem  $g_{ij}(r)$ . Funkcja ta określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki z frakcji  $j$  w jednostce objętości, w odległości  $r$  od cząstki z frakcji  $i$  położonej w środku układu współrzędnych ( $r = 0$ ).

Średnia liczba sąsiadów typu  $j$  położonych w odległości od  $r$  do  $r + dr$  od cząstki typu  $i$  dana jest wzorem:

$$n_{ij}(r)dr = \rho x_j g_{ij}(r)4\pi r^2 dr . \quad (23)$$

Jeżeli rozpatrzemy wyłącznie soczewki binarne (rozpięte na dwóch cząstkach stałych) o objętości  $v_{ij}$  to średnia objętość wody zawarta w soczewkach wokół rozpatrywanej cząstki  $i$  dana jest wzorem:

$$\bar{v}_{ij}(r) = 4\pi \rho x_j \int_0^r v_{ij}(r)g_{ij}(r)r^2 dr . \quad (24)$$

Ilość wody zawarta wokół cząstki rodzaju  $i$  i pozostałymi cząstkami (wszystkich rodzajów) może być obliczona przez zsumowanie wyrażenia (24) po wszystkich  $j$ :

$$V_i(r) = 4\pi \rho \sum_{j=1}^K x_j \int_0^r v_{ij}(r)g_{ij}(r)r^2 dr . \quad (25)$$

A więc wszystkie cząstki rodzaju  $i$  będą zawierać:

$$V_i^{tot}(r) = N_i V_i(r) . \quad (26)$$

A cała próbka o objętości  $V$  będzie zawierać:

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K V_i^{tot} . \quad (27)$$

Co korzystając z równania (25) może być wyrażone w formie:



$$v = 2\pi V \rho^2 \sum_{i,j=1}^K x_i x_j \int_0^r v_{ij}(r) g_{ij}(r) r^2 dr . \quad (28)$$

Wilgotność objętościowa (uwzględniając jedynie wodę soczewkową) może być zatem wyrażona wzorem:

$$\theta = \frac{v}{V} = 2\pi \rho^2 \sum_{i,j=1}^K x_i x_j \int_0^r v_{ij}(r) g_{ij}(r) r^2 dr . \quad (29)$$

Wzór (29) wyraża wilgotność gleby poprzez parametry jej uziarnienia oraz radialne funkcje rozkładu cząstek poszczególnych frakcji. Zagęszczenie gleby występuje tu niejawnie poprzez gęstość punktową cząstek  $\rho$  oraz poprzez radialne funkcje rozkładu, które od zagęszczenia zależą.

Woda, zgodnie z powyższą dyskusją, związana jest na pojedynczych ziarnach oraz poprzez ich pary. Wykorzystując wzór (16), pozostawiono po prawej stronie dwa wyrazy. Pierwszy z nich oznacza średnią objętość wody związanej przez pojedyncze cząstki w próbce o danej objętości  $V$ . Drugi wyraz oznacza średnią objętość wody zmagazynowanej w soczewkach dwucząstkowych w próbce o objętości  $V$ . Całkowita średnia objętość wody w rozważanej próbce traktowanej jako mieszanina cząstek wyrażona jest wzorem:

$$v = V \rho \sum_{i=1}^K x_i v_i + 2\pi V \rho^2 \sum_{i,j=1}^K x_i x_j \int_0^r v_{ij}(r) g_{ij}(r) r^2 dr . \quad (30)$$

W powyższym równaniu wykorzystano dyskusję prowadzącą do wzoru (28). Pierwsza suma po prawej stronie wzoru (30) oznacza wodę związaną przez pojedyncze cząstki w glebie. Objętość wody związanej przez cząstkę należącą do frakcji  $i$  oznaczona jest przez  $v_i$ . Dane doświadczalne wskazują, że pierwsza suma we wzorze (30) zależna jest od powierzchni właściwej modelowanej gleby.

Druga suma uwzględnia soczewki wodne pomiędzy dwoma cząstkami wody. Objętość soczewki pomiędzy cząstkami typu  $i$  i  $j$  oznaczona jest  $v_{ij}$ . Dla uproszczenia zapisu pominięto oczywistą zależność objętości  $v_i$  i  $v_{ij}$  od potencjału.

Przekształcenie wzoru (30) do postaci:

$$\theta = v/V = \rho \sum_{i=1}^K x_i v_i + 2\pi \rho^2 \sum_{i,j=1}^K x_i x_j \int_0^r v_{ij}(r) g_{ij}(r) r^2 dr \quad (31)$$

daje zależność do wyliczania wilgotności objętościowej próbki gleby w ramach proponowanego modelu.

Należy zwrócić uwagę na obecność pierwszej sumy w równaniu (31) odpowiadającej za wiązanie wody w glebie na pojedynczych ziarnach. Zgodnie z [86] ilość wody zaadsorbowanej w fazie stałej gleby jest silnie skorelowana z jej powierzchnią

właściwą, a raczej słabo z pozostałymi własnościami fizycznymi gleb w tym również z zawartością różnych frakcji granulometrycznych. Wynika z tego, że wielkość  $v_i$  powinna być zależna od powierzchni właściwej cząstek stałych należących do  $i$ -tej frakcji.

Wyrażenie (31) w swojej drugiej części nie zawiera zawartości poszczególnych frakcji granulometrycznych, a tylko iloczyny gęstości punktowych cząstek stałych z poszczególnych frakcji. Tłumaczy to na gruncie teorii statystycznej dlaczego korelacja wilgotności z zawartością poszczególnych frakcji jest słaba. Woda soczewkowa wiązana jest raczej na skutek istnienia sąsiedztwa ziaren niż na skutek obecności pojedynczych ziaren. Fakt ten tłumaczy w szczególności słabą zgodność modelu korelacyjnego opisanego w [2] z rzeczywistymi danymi.

#### 4.5. Radialne funkcje rozkładu używane do opisu mieszanin cząstek o różnych własnościach

Radialna funkcja rozkładu zupełnie nieuporządkowanych, twardych kul ma postać funkcji schodkowej. Przyjmuje wartość równą zero dla małych odległości a po przekroczeniu odległości równej średnicy kul przyjmuje skokowo wartość równą jedności. Jeżeli jednak położenia kul nie są zupełnie przypadkowe ze względu na wzajemne oddziaływania, radialna funkcja rozkładu staje się bardziej skomplikowana.

Wyliczanie wartości radialnych funkcji rozkładu  $g(r)$  dla nieuporządkowanej mieszaniny cząstek jest poważnym zagadnieniem teoretycznym i obliczeniowym. Nieco prostszym zagadnieniem jest poszukiwanie wartości radialnych funkcji rozkładu cząstek w kontakcie. Wyznaczone wartości mogą być następnie wykorzystane do określenia radialnych funkcji rozkładu w zależności od odległości rozważanych cząstek  $r$ .

Istnieje w szczególności wiele prób opisu radialnych funkcji rozkładu dla mieszanin kul o jednakowych średnicach, a także dla mieszanin kul o różnych średnicach. Podstawowym zastosowaniem rozwijanych teorii jest wyznaczanie funkcji termodynamicznych cieczy i mieszanin cieczy (roztworów) ze znajomości potencjałów oddziaływania pomiędzy cząstkami i koncentracji poszczególnych składników.

Do obliczania wilgotności modelowego ośrodka zgodnie ze wzorem (31) można użyć radialnych funkcji rozkładu dla mieszaniny twardych kul w kontakcie znanych jako funkcji Mansoori-Carnahan-Starling-Leland'a [29] danych wzorem:

$$g_{ij}(d_i, d_j) = \frac{1}{1 - \xi_3} + \frac{3d_i d_j}{d_i + d_j} \frac{\xi_2}{(1 - \xi_3)^2} + 2 \left( \frac{d_i d_j}{d_i + d_j} \right)^2 \frac{\xi_2^2}{(1 - \xi_3)^3} \quad (32)$$

oraz ich modyfikacji. We wzorze (32) wielkość  $\xi_n$  określona jako:

$$\xi_n = \frac{1}{6} \pi \rho \sum_k x_k d_k^n \quad (33)$$

jest dla  $n = 2$  równa szóstej części geometrycznej powierzchni właściwej (liczonej jako powierzchnia kulistych cząstek zawartych w jednostkowej objętości mieszaniny), a dla  $n = 3$  równa się względnej gęstości upakowania cząstek (względnej objętości zajmowanej przez cząstki). Porowatość gleby  $\vartheta$  może być zatem wyrażona wzorem:  $\vartheta = 1 - \xi_3$ .

Funkcja  $g_{ij}(d_i, d_j)$  zależy od zawartości wszystkich składników mieszaniny poprzez  $\xi_2$  i  $\xi_3$ .  $x_i, x_j$  są udziałami liczb cząstek danej frakcji w mieszaninie, a  $\rho$  jest gęstością liczby cząstek zawartych w mieszaninie (liczbą cząstek zawartych w jednostkowej objętości mieszaniny lub gęstością punktową cząstek mieszaniny).

Inną możliwością jest użycie funkcji zaproponowanych w [30], które spełniają warunki brzegowe dla rozcieńczonych mieszanin, w formie wynikającej z równania (32):

$$g_{ij}(d_i, d_j) = g_0 + \left(\frac{d_i d_j}{d_{ij}}\right) g_1 + \left(\frac{d_i d_j}{d_{ij}}\right)^2 g_2 \quad (34)$$

tutaj jednak:

$$g_0 = \frac{1}{1 - \xi_3} \quad (35)$$

$$g_1 = \frac{(4\lambda - 1)\xi_2}{(1 - \xi_3)(1 - 4\lambda\xi_3)} \quad (36)$$

$$g_2 = 0 \quad (37)$$

Wzór (34) po rozszerzeniu na mieszaniny ma formę:

$$g_{ij}(d_i, d_j) = \frac{1}{1 - \xi_3} + \left(\frac{d_i d_j}{d_{ij}}\right) \frac{\frac{1}{6}\pi\rho \sum_k x_k d_k^2 (4\lambda_k - 1)\xi_2}{(1 - \xi_3)(1 - \frac{2}{3}\pi\rho \sum_k x_k d_k^3 \delta_k)} \quad (38)$$

gdzie  $\delta_k \approx 0,22\lambda_k$  [30].

Dokładna forma radialnych funkcji rozkładu zależy znacznie od potencjału oddziaływania wzajemnego cząstek [18, 42, 75]. Jednak niektóre właściwości są wspólne dla wszystkich radialnych funkcji rozkładu i mogą być użyte do konstrukcji prostych i stosunkowo dokładnie aproksymujących je modeli [8, 22, 48, 82, 83].

Ze względu na swoją uniwersalność i możliwość doboru wartości parametrów, szczególnie wygodna jest postać radialnej funkcji rozkładu zaproponowana w [48]:

$$g(y) = 1 + y^{-m}[g(d) - 1 - \lambda] + [(y - 1 + \lambda)/y] \exp[-\alpha(y - 1)] \cos[\beta(y - 1)] \quad (39)$$

dla  $m \geq 1$  i  $y \geq 1$ , a dla  $y < 1$  mającą postać:

$$g(y) = g(d) \exp[-\gamma(y - 1)^2] \quad (40)$$

gdzie:

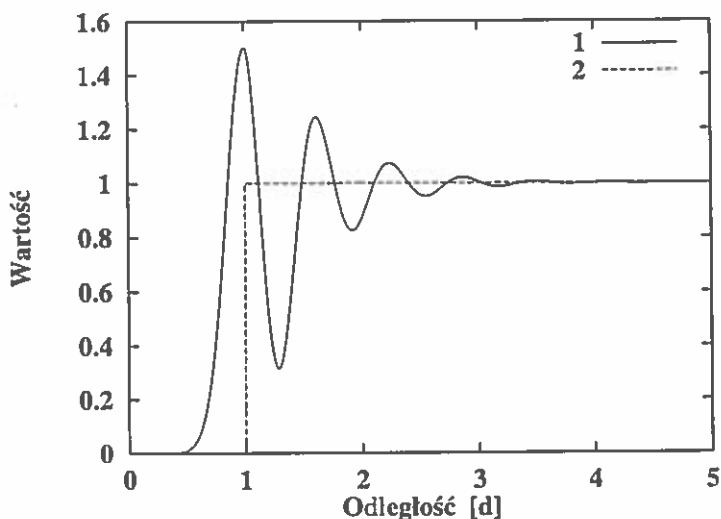
$y = r/d$  bezwymiarowa odległość od cząstki o średnicy  $d$ ,

$m, \lambda, \alpha, \beta, \gamma$  parametry adjustowalne

$g(d)$  wartość funkcji radialnej cząstek w kontakcie (dla  $y = 1$ )

Forma taka jest wystarczająco elastyczna, ze względu na kilka parametrów możliwych do dobrania, aby można nią było aproksymować występujące w rzeczywistości funkcje radialne.

Jako przykład zaprezentowano przebieg radialnej funkcji rozkładu wyliczonej ze wzoru (39) (krzywa 1 na Rys. 3) w porównaniu z przebiegiem radialnej funkcji rozkładu przy założeniu istnienia całkowitego nieporządku (krzywa 2 na Rys. 3). Krzywa 1 wyliczona ze wzoru (39) charakteryzuje się znacznie bardziej rozbudowanym kształtem w porównaniu do krzywej schodkowej jaka reprezentuje radialną funkcję rozkładu zupełnie nieuporządkowanego ośrodka ziarnistego.



Rys. 3. Przykładowe radialne funkcje rozkładu mieszaniny twardych kul: 1) przebieg wyliczony ze wzoru (39) przedstawiający możliwy przebieg tej funkcji dla realnej mieszaniny i 2) radialna funkcja rozkładu przy założeniu całkowitego nieporządku (odległość  $d$  wyrażona jest w jednostkach średnicy cząstek)

## 5. RETENCJA WODY NA STYKU KULISTYCH CZĄSTEK STAŁYCH

Następujące wyjaśnienia i obliczenia kończą się wyznaczeniem kształtu powierzchni jaki przyjmuje woda umieszczona pomiędzy zwilżalnymi kulistymi cząstkami.

Na podstawie przedstawionych rachunków określono objętość wody w soczewkach pomiędzy kulami o danych średnicach, przy założonej wartości podciśnienia panującego wewnątrz wody w stosunku do otaczającego powietrza.

Dodatkowym wynikiem jest określenie siły z jaką soczewka wodna oddziałuje na kule.

Zastosowanie poniższej teorii do ziaren fazy stałej gleby daje przybliżony obraz fizyczny wiązania wody pomiędzy nimi. Obliczenia numeryczne prowadzą do wyznaczenia mikrokrzywych retencji wody tzn. zależności objętości wody związanej pomiędzy ziarnami stałymi w glebie od podciśnienia w wodzie panującego.

### 5.1. Ciśnienie wody a krzywizna powierzchni soczewek wodnych w glebie

Geometria fazy ciekłej w glebie nienasyconej jest określona przez geometrię fazy stałej (powierzchnię zwilżania cieczy i cząstek stałych) i przez geometrię powierzchni swobodnej cieczy (powierzchnie kontaktu ciecz – gaz). Z założenia, że powierzchnia fazy stałej jest niezmienna, wynika, że podczas zmian wilgotności powierzchnia styku cieczy z gazem i cieczy z fazą stałą musi się zmieniać.

Kluczowym zagadnieniem jest, w związku z tym, kształt powierzchni styku cieczy z gazem, który wyznacza objętość wody w soczewkach wody pomiędzy ziarnami fazy stałej w glebie. Różnica ciśnienia  $\Delta p$  po obu stronach powierzchni cieczy w soczewce (wewnątrz cieczy i na zewnątrz cieczy) związana jest z krzywizną średnią powierzchni cieczy  $H$  i napięciem powierzchniowym  $\sigma$  za pomocą wzoru Laplace'a.

$$\Delta p = 2H\sigma \quad (41)$$

gdzie średnia krzywizna  $H$  określona jest jako:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) . \quad (42)$$

W powyższym równaniu  $R_1$  i  $R_2$  są głównymi promieniami krzywizny rozważanej powierzchni i mogą przybierać wartości dodatnie lub ujemne. Wyboru znaku dokonuje się na podstawie kierunku wektora normalnego do przecięcia normalnego powierzchni. W naszej sytuacji promień jest dodatni jeżeli środek krzywizny znajduje się po stronie wody zwilżającej fazę stałą. Promień kapilary równoważnej określono jako odwrotność modulu krzywizny średniej  $H$  za pomocą wzoru:

$$R_{eq} = \frac{1}{|H|} . \quad (43)$$

Równanie (41) łączy trzy istotne czynniki: czynnik geometryczny jakim jest średnia krzywizna powierzchni cieczy  $H$  z czynnikami fizycznymi – różnicą ciśnień  $\Delta p$  i napięciem powierzchniowym  $\sigma$ .

Znając zatem mierzalne wielkości fizyczne  $\Delta p$  i  $\sigma$ , można określić czysto geometryczną charakterystykę powierzchni wody w soczewce. Co więcej równanie (41)

mówi, że średnia krzywizna  $H$  powierzchni cieczy zależy wyłącznie od różnicy ciśnień  $\Delta p$  i napięcia powierzchniowego  $\sigma$  i w przypadku gdy te dwie wielkości są ustalone to i krzywizna  $H$  jest stała. Warunki zbliżone do opisanych panują w rozważanych tutaj próbkach glebowych w równowadze termodynamicznej. Jeśli można zaniebierać oddziaływanie grawitacyjne, to w równowadze istnieje stała różnica ciśnienia  $\Delta p$  między cieczą a gazem, stałe napięcie powierzchniowe  $\sigma$  w całej objętości próbki a zatem i stała krzywizna  $H$  powierzchni swobodnej wody w całej próbce. Jak wspomniano, na kształt powierzchni wody wpływa również oddziaływanie wody z cząstkami fazy stałej co w formie warunków brzegowych musi być określone przy rozwiązaniu równania (41).

Opierając się na pracy Gibbsa [21] można stwierdzić, że równowaga mechaniczna między dwoma nie mieszającymi się płynami (np. powietrzem i wodą) może być osiągnięta gdy zakrzywiona powierzchnia graniczna  $z(x, y)$ , pomiędzy nimi spełnia równanie:

$$\frac{(1 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{(1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2)^{3/2}} = \frac{\Delta p}{\sigma} . \quad (44)$$

Tutaj zajęto się sytuacją gdy  $\Delta p$  jest ujemne i duże co do wartości bezwzględnej tak, że różnica ciśnień powstała na rozpiętości rozpatrywanej soczewki na skutek działania sil grawitacji (różnica ciśnień hydrostatycznych) może być pominięta. Można zatem przepisać równanie (44), uznając różnicę ciśnień za stałą w postaci:

$$\frac{(1 + \frac{dz^2}{dy^2}) \frac{d^2 z}{dx^2} - 2 \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \frac{d^2 z}{dx dy} + (1 + \frac{dz^2}{dx^2}) \frac{d^2 z}{dy^2}}{(1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2})^{3/2}} = 2H \quad (45)$$

która jawnie eksponuje średnią krzywiznę  $H$  opisanej powierzchni:

$$2H = \frac{\Delta p}{\sigma} . \quad (46)$$

Tutaj założono, że cząstki fazy stałej modelowej gleby mają kształt idealnych kul i soczewki wody rezydują pomiędzy dwoma kulami każda, warunki brzegowe dla równania (45) mają kształt funkcji o symetrii obrotowej. Wygodnie jest zatem dokonać zamiany układu współrzędnych z kartezjańskiego na cylindryczny i przetransformować równanie (45) do tego układu. Równania transformujące współrzędne mają formę:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi; \\ y &= r \sin \varphi; \\ z &= z; \end{aligned} \quad (47)$$

Funkcja opisująca powierzchnie  $z(x, y)$  wyrazi się po transformacji zmiennych przez  $z(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ .

Zamiana współrzędnych na cylindryczne przeprowadza równanie (45) do postaci:

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} (1 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2)}{(1 + (\frac{\partial z}{\partial r})^2)^{3/2}} = 2H . \quad (48)$$

Ponieważ zmienna  $z$  nie występuje samodzielnie w równaniu (48) a wyłącznie w postaci pierwszych i drugich pochodnych można, wykorzystując to, wprowadzić zmienną  $u = \partial z / \partial r$  uzyskując redukcję rzędu równania z drugiego do pierwszego:

$$\frac{u' + \frac{1}{r} u(1 + u^2)}{(1 + u^2)^{3/2}} = 2H . \quad (49)$$

Aby rozwiązać równanie (49) wprowadzono nową zmienną  $t$  równaniem:

$$u = \tan t . \quad (50)$$

Zamiana zmiennych zgodnie z równaniem (50) prowadzi równanie (49) do postaci:

$$t' \cos t + \frac{\sin t}{r} = 2H \quad (51)$$

a separacja zmiennych w równaniu (51) prowadzi do postaci:

$$\frac{t' \cos t}{\sin t} - \frac{2H}{\sin t} = -\frac{1}{r} . \quad (52)$$

Równanie (52) rozwiązano w dwu krokach. W pierwszym rozwiązano równanie jednorodne powstałe poprzez nadanie wartości zero lewej stronie równania (52):

$$\frac{t' \cos t - 2H}{\sin t} = 0 \quad (53)$$

lub równoważnie:

$$t' \cos t - 2H = 0 . \quad (54)$$

Rozwiązanie równania (54) ma postać:

$$\sin t = 2Hr + C_0 . \quad (55)$$

W drugim kroku użyto metody uzmienniania stałej całkowania aby rozwiązać niejednorodne równanie (52) przy użyciu rozwiązania (55):

$$t' \cos t = 2H + C_0' . \quad (56)$$

Wstawiając równanie (56) do równania (52) otrzymano równanie na niewiadomą wartość funkcji  $C_0$ :

$$\frac{2H + C'_0}{\sin t} - \frac{2H}{\sin t} = -\frac{1}{r} \quad (57)$$

które upraszcza się do formy:

$$C'_0 = -\frac{\sin t}{r} . \quad (58)$$

Użycie równania (55) prowadzi do postaci:

$$C'_0 = -\frac{2Hr + C_0}{r} \quad (59)$$

a powyższe równanie ma rozwiązanie na niewiadomą funkcję  $C_0$ :

$$C_0 = \frac{C}{r} - Hr . \quad (60)$$

W równaniu (60) stała  $C$  jest na razie dowolną stałą całkowania, która zostanie określona potem w związku z warunkami brzegowymi. Wracając z równaniem (60) do równania (55) otrzymano następujące:

$$\sin t = Hr + \frac{C}{r} \quad (61)$$

które stanowi rozwiązanie równania (52). W jawnej formie, wracając do zmiennych określonych w równaniu (50), rozwiązanie równania (49) ma postać:

$$u = \pm \frac{Hr + \frac{C}{r}}{\sqrt{1 - (Hr + \frac{C}{r})^2}} \quad (62)$$

gdzie jak określono:  $u = \partial z / \partial r = z'$

Równanie (62) opisuje nachylenie obrotowej powierzchni soczewki wodnej w funkcji promienia. Średnia krzywizna powierzchni równa się:  $H = \Delta p / 2\sigma$  i jest powiązana z parametrami fizycznymi rozważanego układu. Na fizycznej podstawie musi stać również wybór znaku pierwiastka w równaniu (62).

Zgodnie z definicją  $z(r, \varphi)$  osiowy przekrój powierzchni jest dany przez równanie:

$$z(r) = \int_{r_1}^{r \leq r_2} u dr + z_0 \quad (63)$$

gdzie:

$z_0$  jest stałą całkowania,

$r_1$  i  $r_2$  są największym i najmniejszym dopuszczalnym promieniem soczewki opisanej przez równanie (62), powierzchnia  $z(r, \varphi)$  istnieje tylko dla promieni  $r \in (r_1, r_2)$ .

Równanie (62) może być przepisane w formie:



$$z' = \frac{Hr^2 + C}{\sqrt{r^2 - (Hr^2 + C)^2}} . \quad (64)$$

Aby określić zakres zmienności promienia  $r$ , określono kiedy wielkość pod pierwiastkiem w równaniu (64) jest dodatnia:

$$r^2 - (Hr^2 + C)^2 > 0 \quad (65)$$

lub równoważnie:

$$-H^2r^4 + (1 - 2HC)r^2 - C^2 > 0 . \quad (66)$$

Ponieważ współczynnik stojący przy najwyższej potędze jest niedodatni ( $-H^2 \leq 0$ ) rozwiązaniem tej nierówności mogą być wartości  $r$  leżące pomiędzy pierwiastkami równania określonego przez nierówność (66).

Wstawiając znak równości do nierówności (66) otrzymano równanie dwukwadratowe z wyróżnikiem równym:

$$\Delta = 1 - 4HC . \quad (67)$$

Aby równanie to miało dwa pierwiastki, muszą być spełnione następujące warunki:

$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ HC &< \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (68)$$

w takim przypadku istnieją dwa pierwiastki równania (66):

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{-(1 - 2HC) - \sqrt{1 - 4HC}}{-2H^2} > 0 \\ r_2^2 &= \frac{-(1 - 2HC) + \sqrt{1 - 4HC}}{-2H^2} > 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Można pokazać, że pod warunkami danymi przez (68), równania (69) dają nieujemne rozwiązania, a co więcej można pokazać że:

$$r_2^2 - r_1^2 \geq 0 . \quad (70)$$

W jawnej formie dwa dodatnie pierwiastki równania (66) mają postać:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\frac{1 - 2HC - \sqrt{1 - 4HC}}{2H^2}} \\ r_2 &= \sqrt{\frac{1 - 2HC + \sqrt{1 - 4HC}}{2H^2}} \end{aligned} \quad (71)$$

Powyższa dyskusja ważna jest dla niezerowych wartości parametrów  $H$  i  $C$  równania (63). Jeżeli parametry przyjmują wartości zerowe, to równanie degeneruje się i może być rozwiązane prościej.

Jeżeli średnia krzywizna  $H$  w równaniu (62) jest równa zeru to równanie degeneruje się do formy:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\frac{C}{r}}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2}}} . \quad (72)$$

Dyskusja zakresu ważności rozwiązań opiera się na nierównościach:  
 $1 - C^2/r^2 > 0$ ;  $r^2 - C^2 > 0$ , dając w wyniku:

$$r > |C| . \quad (73)$$

Co oznacza, że powierzchnia rozciąga się od minimalnego promienia równego  $|C|$  do nieskończoności.

Dla powierzchni o zerowej krzywiznie ( $H = 0$ ) równanie (72) może być scalkowane natychmiast dając:

$$z(r) = \ln \left| r/C \pm \sqrt{r^2/C^2 - 1} \right| \Big|_{|C|}^r + z_0 . \quad (74)$$

Prawa strona równania (74) opisuje krzywą odwrotną do znanej pod nazwą krzywej łańcuchowej.

Jeżeli  $C = 0$  to równanie (66) redukuje się do formy:

$$-H^2 r^4 + r^2 > 0 \quad (75)$$

mając rozwiązanie w postaci:

$$r \leq \frac{1}{|H|} . \quad (76)$$

Równanie (66) przybiera dla  $C = 0$  postać:

$$z' = \frac{Hr^2}{\sqrt{r^2(1 - H^2 r^2)}} \quad (77)$$

która może być przetransformowana do postaci:

$$z' = \frac{Hr}{\sqrt{1 - H^2 r^2}} \quad (78)$$

i także może być scalkowane bezpośrednio dając w wyniku:

$$z(r) = \pm \frac{1}{|H|} \sqrt{1 - H^2 r^2} + z_0 . \quad (79)$$

Rozwiązanie to stanowi sferę o promieniu  $r = 1/|H|$  zapisaną w cylindrycznym układzie współrzędnych.

## 5.2. Właściwości funkcji opisującej powierzchnię soczewki wodnej

W następującej dyskusji założono, że  $H \neq 0$  i  $C \neq 0$ . W celu uniezależnienia się od wartości wielkości występujących w równaniach wprowadzono bezwymiarowe zmienne i parametry  $\rho$  i  $s$  za pomocą równań:

$$\rho = |H|r \quad s = CH \quad h = z|H| \quad (80)$$

W starych zmiennych równanie (62) ma postać:

$$u = \frac{Hr + \frac{C}{r}}{\sqrt{1 - (Hr + \frac{C}{r})^2}} \quad (81)$$

a w nowych przybiera formę:

$$\frac{dh}{d\rho} = \frac{\rho + \frac{s}{\rho}}{\sqrt{1 - (\rho + \frac{s}{\rho})^2}} \quad (82)$$

Warunek wyrażony równaniem (68) na istnienie pierwiastków ma teraz postać:  $s \leq 1/4$ , a równanie (71) na zakres dopuszczalnych wartości promieni  $\rho$  przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} - s} - \sqrt{\frac{1}{4} - s} \\ \rho_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} - s} + \sqrt{\frac{1}{4} - s} \end{aligned} \quad (83)$$

Równanie (82) w nowych zmiennych przybiera formę:

$$h' = \frac{\rho^2 + s}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \quad (84)$$

Z formy zależności w równaniu (84) wynika, że dla  $s \neq 0$  jest:

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_1, \rho_2} h' = \pm\infty \quad (85)$$

co oznacza, że gdy argument  $\rho$  dąży do swoich granicznych wartości, nachylenie  $h'$  funkcji  $h$  zmierza do nieskończoności, a zatem powierzchnia obrotowa  $h(\rho, \varphi)$  staje się w granicy pionowa.

Równanie (84) może być przepisane w formie:

$$h' = \frac{\rho^2 + s}{\sqrt{-(\rho - \rho_1)(\rho + \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho + \rho_2)}} . \quad (86)$$

Można stwierdzić, że gdy  $\rho \rightarrow \rho_1$ ,  $h'$  zachowuje się w przybliżeniu jak:

$$h' \approx \frac{\text{const}_1}{\sqrt{|\rho - \rho_1|}} \quad (87)$$

a co za tym idzie może być scałkowane w otoczeniu  $\rho_1$  dając:

$$h \approx \text{const}_2 \sqrt{|\rho - \rho_1|} + h_0 . \quad (88)$$

Jedynym wyjątkiem od takiego zachowania jest przypadek  $s = 0$  dla którego mianownik w formule (86) ma podwójny pierwiastek (równy zero) i w związku z tym  $h' = 0$  w pobliżu zerowej wartości  $\rho$ . Prowadzi to do wniosku, że powierzchnia  $h(\rho = 0, \varphi)$  jest pozioma w granicy małych  $\rho$ .

Dla  $s$  w pobliżu górnej dozwolonej wartości  $s = 1/4$ , na przykład  $s = 1/4 - \epsilon$ , gdzie  $\epsilon$  jest małą liczbą dodatnią, na podstawie równania (84) jest:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\frac{1}{4} + \epsilon - \sqrt{\epsilon}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\epsilon} \\ \rho_2 &= \sqrt{\frac{1}{4} + \epsilon + \sqrt{\epsilon}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\epsilon} \end{aligned} \quad (89)$$

Z analizy prawych stron równości (90) wynika, że pierwiastki  $\rho_1$  i  $\rho_2$  są położone symetrycznie do wartości  $\rho = 1/2$ . Ponieważ licznik we wzorze (84) nie posiada zer w tym zakresie, a co za tym idzie nie zmienia znaku, można wyciągnąć wniosek, że funkcja  $h(\rho)$  jest funkcją monotoniczną dla dodatnich wartości  $s$ . Powierzchnia obrotowa  $h(\rho)$  dla  $s > 0$  przedstawiona jest na Rys. 4.

Sytuacja zmienia się gdy  $s < 0$ . Równania (84) dla  $\rho_{1,2}$  przyjmują kształt:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\frac{1}{2} - s - \sqrt{\frac{1}{4} - s}} = \sqrt{1/4 - s} - 1/2 \\ \rho_2 &= \sqrt{\frac{1}{2} - s + \sqrt{\frac{1}{4} - s}} = \sqrt{1/4 - s} + 1/2 \end{aligned} \quad (90)$$

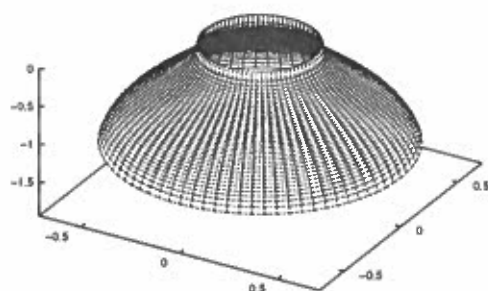
Obydwa pierwiastki położone są symetrycznie do  $\rho = \sqrt{1/4 - s}$  i różnica między nimi jest stała i równa jedności. W diskutowanym zakresie zmienności parametru  $s$  licznik równania (84) przechodzi przez zero dla  $\rho_0 = \sqrt{-s}$ .

Można pokazać, że pierwiastek w liczniku równania (84) leży pomiędzy wartościami granicznymi dla  $\rho$ :  $\rho_1 < \sqrt{-s} < \rho_2$ .

Oznacza to, że miejsce zerowe licznika równania (84) leży pomiędzy pierwiastkami mianownika, które z kolei wyznaczają zakres zmienności zmiennej niezależnej  $\rho$ , a co za tym idzie pochodna funkcji  $h(\rho)$  zmienia znak, czyli funkcja  $h(\rho)$  ma ekstremum w rozważanym zakresie promieni  $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ .

Po tej analizie można wykreślić kształt funkcji  $h(\rho)$  dla  $s < 0$ . Powierzchnia wykreślona na Rys. 6 odpowiada temu zakresowi.

Wartość  $s = 0$  odpowiada po prostu powierzchni kulistej, odpowiednia ilustracja przedstawiona jest na Rys. 5.



Rys. 4. Kształt funkcji  $h(\rho)$  dla parametru  $s$  w zakresie  $0 < s < 1/4$

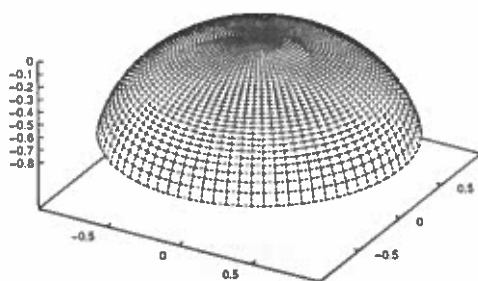
Ponieważ najbardziej interesujące są soczewki wodne łączące dwie powierzchnie sferyczne musimy także wziąć pod uwagę powierzchnie powstające ze "zszycia" dwu powierzchni przedstawionych na Rys. 4 lub 6. Po odrzuceniu zewnętrznych części otrzymano powierzchnie (Rys. 7 i 8) jakie przyjmie woda umieszczona w pomiędzy dwoma zwilżalnymi sferami.

Rysunek 7 przedstawia soczewkę wodną, w której wewnątrz panuje nadciśnienie a Rys. 8 soczewkę, w której wewnątrz panuje podciśnienie.

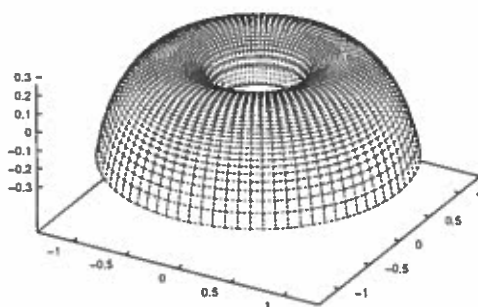
Ponieważ soczewki, jakie tworzy woda w glebie w warunkach nienasyconych, gdy zwilżanie jest bliskie idealnemu, są typu przedstawionego na Rys. 8 ze względu na panujące w nich podciśnienie, szczególnie zajęto się soczewkami o kształcie uwidocznionym na tym rysunku.

### 5.3. Pole powierzchni soczewek wodnych

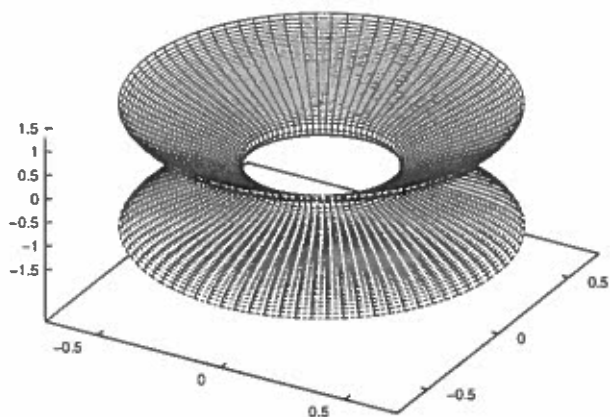
Równanie (84) wyrażające nachylenie powierzchni soczewki w kierunku radialnym ma postać:



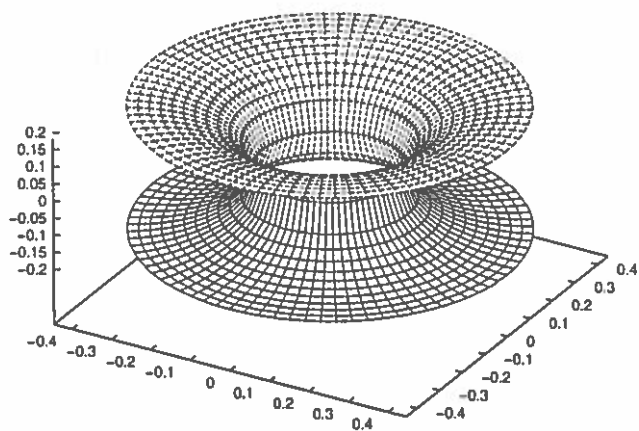
Rys. 5. Kształt funkcji  $h(\rho)$  dla  $s = 0$



Rys. 6. Kształt funkcji  $h(\rho)$  dla  $s < 0$



Rys. 7. Kształt soczewki wodnej  $h(\rho)$  dla parametru  $s$  w zakresie  $0 < s < 1/4$ .



Rys. 8. Kształt soczewki wodnej  $h(\rho)$  dla  $s < 0$ .

$$h' = \frac{\rho^2 + s}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} . \quad (91)$$

Równanie to reprezentuje pośrednio powierzchnię obrotową powstałą przez obrót krzywej:

$$h(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho \leq \rho_2} h'(\rho) d\rho + h_0 \quad (92)$$

wokół osi  $h$  (tzn. dla  $\rho = 0$ ).

Równanie parametryczne tej powierzchni ma postać:

$$h(\rho, \varphi) = (h(\rho) \sin \varphi, h(\rho) \cos \varphi) . \quad (93)$$

Aby obliczyć pole tej powierzchni wyznaczono różniczkę jej pola:

$$dA = 2\pi \sqrt{1 + h'^2} \rho d\rho . \quad (94)$$

Wykorzystując równanie (91) otrzymano:

$$dA = 2\pi \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} . \quad (95)$$

Całkowanie równania (95) prowadzi do następującego związku:

$$A(\rho) = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \quad (96)$$

który może być wyrażony w skończonej formie w terminach całek eliptycznych.

#### 5.4. Objętość soczewek wodnych

Różniczka objętości bryły obrotowej o przekroju  $h(\rho)$  może być przedstawiona w formie:

$$dV = \pi \rho^2 dh(\rho) \quad (97)$$

lub też w formie:

$$dV = \pi \rho^2 h'(\rho) d\rho \quad (98)$$

jako że rozważamy powierzchnię obrotową.

Wykorzystując równanie (91) dla wyrażenia  $h'(\rho)$  otrzymano:

$$dV = \pi \frac{\rho^2 (\rho^2 + s) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \quad (99)$$



1. Dla  $s > 0$  (Rys. 4) cała powierzchnia zamyka pewną objętość, ze środkiem na osi  $\rho = 0$ :

$$V(\rho) = \left| \pi \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\rho^2(\rho^2 + s)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \right|. \quad (100)$$

2. Dla  $s < 0$  (Rys. 6) musimy rozdzielić obliczoną objętość na dwie części, pierwszą całkując od  $\rho_1$  do  $\rho_0$  i drugą całkując od  $\rho_0$  do  $\rho_2$ :

$$V_1(\rho) = \left| \pi \int_{\rho_1}^{\rho < \rho_0} \frac{\rho^2(\rho^2 + s)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \right| \quad (101)$$

$$V_2(\rho) = \left| \pi \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho^2(\rho^2 + s)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \right|. \quad (102)$$

Objętość  $V_1(\rho)$  zamknięta jest pomiędzy osią pionową ( $h$ ), a gałęzią  $h(\rho)$  dla  $\rho \in (\rho_1, \rho_0)$ , objętość  $V_2(\rho)$  zawarta jest pomiędzy osią  $h$ , a gałęzią  $h(\rho)$  dla  $\rho \in (\rho_0, \rho_2)$ .

## 5.5. Zależność objętości soczewek wodnych od krzywizny średniej

### 5.5.1. Kula styczna do powierzchni soczewki

Powierzchnia soczewki wyznaczona jest przez obrót krzywej:

$$h(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho \leq \rho_2} h'(\rho)d\rho + h_0 \quad (103)$$

wokół osi  $h$ .

Rozważmy kulę o promieniu  $R$  położoną stycznie do powierzchni soczewki. Kula w zredukowanych współrzędnych ma promień  $r = |H|R$ . Jej równanie ma formę:

$$\rho^2 + (h - h_1)^2 = r^2 \quad (104)$$

tutaj  $(0, h_1)$  są współrzędnymi środka kuli.

Warunki styczności dwóch krzywych o równaniach (103) i (104) są następujące:

1. równania (103) i (104) muszą być spełnione jednocześnie dla pary  $(\rho_t, h_t)$ , oraz
2. pochodne  $h'(\rho_t)$  z równania (103) oraz pochodna  $h$  obliczonego z równania (104) muszą być sobie równe dla argumentu  $\rho_t$ .

Gdy oba powyższe warunki są spełnione jednocześnie to para  $(\rho_t, h_t)$  wyznacza współrzędne punktu styczności kuli o równaniu (104) z powierzchnią wyznaczoną przez obrót krzywej danej równaniem (103) wokół osi pionowej.

Aby wyznaczyć punkt styczności obliczamy  $h$  z równania (104):

$$h = \pm \sqrt{r^2 - \rho^2} + h_1 \quad (105)$$

oraz pochodną  $h$  po  $\rho$ :

$$h' = \pm \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \cdot \quad (106)$$

Dla kuli zakres zmienności  $\rho$  jest ograniczony ( $\rho \in (0, r)$ ), dla rozwiązalności zagadnienia niezbędne jest by zakresy zmienności promieni  $\rho$  obu krzywych pokrywały się.

Najpierw rozwiązano równanie wynikające z warunku na pochodne otrzymując:

$$h'(\rho) = h' \quad (107)$$

lub po użyciu równania (106) i (91):

$$\pm \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \frac{\rho^2 + s}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \cdot \quad (108)$$

Podnosząc do kwadratu obie strony w równaniu (108) otrzymano:

$$\frac{\rho^2}{r^2 - \rho^2} = \frac{(\rho^2 + s)^2}{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2} \quad (109)$$

a po przekształceniach otrzymano równanie dwukwadratowe do rozwiązania względem  $\rho$ :

$$(1 - r^2)\rho^4 - 2r^2s\rho^2 - r^2s^2 = 0 \cdot \quad (110)$$

Delta obliczona dla tego równania ma formę:

$$\Delta = 4r^2s^2 \geq 0 \quad \text{dla} \quad r \neq 1 \quad (111)$$

Co sugeruje, że rozwiązanie zawsze istnieje. Jest to prawdą jeśli chodzi o równanie (109), ale może nie być prawdziwe dla wyjściowego równania (107). Aby spełnione było równanie (107), rozwiązanie musi być w zakresie  $(\rho_1, \rho_2)$  i jednocześnie w zakresie  $(0, \rho)$ , jeśli nie to równanie (107) nie będzie spełnione.

Formalne pierwiastki równania (110) są dane przez:

$$\rho_t^2 = \frac{2r^2s \pm 2rs}{2(1 - r^2)} = \frac{rs(r \pm 1)}{(1 - r)(1 + r)} \quad (112)$$

lub w jawnej formie przez:

$$\rho_{t1}^2 = \frac{rs}{1-r} \quad \rho_{t2}^2 = \frac{-rs}{1+r} . \quad (113)$$

Dla  $r = 1$  występuje tylko jedno rozwiązanie:  $\rho_t = \sqrt{-s/2}$ .

Dla  $s = 0$  obydwa pierwiastki w równaniu (113) są równe zeru, co oznacza, że punkt styczności może znajdować się w  $\rho = 0$  (zobacz Rys. 5).

Dla dodatnich wartości  $s$  oraz dla  $r < 1$  otrzymano:

$$\rho_t = \sqrt{\frac{rs}{1-r}} . \quad (114)$$

Równanie (114) jest ważne tylko wtedy, gdy  $\rho_t \geq \rho_1$  i jednocześnie  $\rho_t \leq \rho_2$ , jeżeli któryś z tych warunków nie jest spełniony to równanie (114) nie określa pierwiastków równania (108).

Sprawdzono konsekwencje nierówności  $\rho_t \leq \rho_1$ :

$$\sqrt{\frac{rs}{1-r}} > \sqrt{\frac{1}{2} - s} - \sqrt{\frac{1}{4} - s} . \quad (115)$$

Po przekształceniach otrzymano:

$$r > \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - s} . \quad (116)$$

Co oznacza, że  $r > \rho_1$  (porównaj z równaniem (84)). Podobne warunki występują dla  $\rho_t < \rho_2$  i prowadzą do równania:

$$r < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - s} \quad \text{i.e.} \quad r < \rho_2 \quad (117)$$

Obydwa wyniki są zgodne z intuicją (zob. Rys. 4).

Dla wartości  $r > 1$  oraz  $s > 0$  nie występują dodatnie pierwiastki równania (113). A dla  $s < 0$  i  $r < 1$  (zob. Rys. 6) istnieje jedno rozwiązanie równania (113), mianowicie:

$$\rho_t = \sqrt{\frac{-rs}{1+r}} \quad (118)$$

dla  $r > \rho_1$  otrzymano następujący warunek wiążący  $r$  i  $s$ :

$$r > \rho_1 \quad (119)$$

dla  $\rho_t < \rho_2$  otrzymano następujący warunek:

$$r > -\sqrt{\frac{1}{4} - s} - \frac{1}{2} \quad (120)$$

który, ponieważ  $r \geq 0$  i tak, nie ogranicza bardziej zakresu wartości  $r$ .

Dla  $s < 0$  i  $r > 1$  równanie (113) ma dwa rozwiązania:

$$\begin{aligned}\rho_{t1} &= \sqrt{\frac{rs}{1-r}} \\ \rho_{t2} &= \sqrt{\frac{-rs}{1+r}}\end{aligned}$$

Tylko warunek  $\rho_{t1} \leq \rho_2$  daje dodatkowe ograniczenie w postaci:

$$r \leq \rho_2 . \quad (121)$$

Wszystkie powyższe warunki mogą być traktowane jako ograniczenia dla  $r$  przy założonym  $s$  albo jako ograniczenia na  $s$  gdy wartość  $r$  jest ustalona.

Ostatnim punktem jest dyskusja dla szczególnych wartości parametrów; najpierw dla  $r = 1$  i  $s < 0$  gdy równanie (109) ma jeden pierwiastek równy  $\rho_t = \sqrt{-s/2}$  i warunek  $\rho_t \geq \rho_1$  prowadzi do ograniczenia na możliwe do zastosowania wartości  $s$  warunkiem  $s \in (0, 1/4)$ .

Warunek  $\rho_t \leq \rho_2$  nie ogranicza ujemnych wartości parametru  $s$ . Warunki dla  $\rho_{t2}$  są takie same jak wynikające z równań (118) i (119).

Otrzymawszy pierwiastek  $\rho_t$  z równania (107) znaleziono położenie środka kuli, która jest styczna do powierzchni soczewki. W tym celu przepisano równanie (103) kładąc  $h_0 = 0$ :

$$h(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho \leq \rho_2} h'(\rho) d\rho . \quad (122)$$

Punkt o współrzędnych  $(\rho_t, h(\rho_t))$  jest rozwiązaniem równania (104). Formalne wstawienie tych wartości do równania (104) daje:

$$\rho_t^2 + (h(\rho_t) - h_1)^2 = r^2 . \quad (123)$$

Powyższe jest równaniem na nieznanne położenie  $h_1$  środka kuli.

Rozwiązaniem zamykającym problem jest:

$$h_1 = h(\rho_t) \pm \sqrt{r^2 - \rho_t^2} \quad (124)$$

gdzie właściwy znak powinien być wybrany z punktu widzenia geometrii problemu.

### 5.5.2. Równanie powierzchni soczewki pomiędzy dwoma kulami

W tym rozdziale rozszerzono dyskusję na sytuację dwu kul pomiędzy którymi związana jest woda w soczewce. Jeżeli kule o promieniach  $R_i$  i  $R_j$  (a po przeskalowaniu  $r_i$  oraz  $r_j$ ) położone są w odległości  $R_{ij}$  (a po przeskalowaniu  $d_0$ ) od siebie to zgodnie z równaniem (124) wypisano równania dla każdej kuli z osobna:

$$h_i = h(\rho_{ti}) \pm \sqrt{r_i^2 - \rho_{ti}^2} \quad (125)$$

$$h_j = h(\rho_{tj}) \pm \sqrt{r_j^2 - \rho_{tj}^2} \quad (126)$$

obliczając  $\rho_{ti}$  oraz  $\rho_{tj}$  dla każdej kuli rozwiązując równanie (107) (w sposób pokazany w części następującej po nim).

Mając dane wartości  $h_i$  oraz  $h_j$  wypisano warunek jaki muszą one spełniać:

$$d_0 = h_i + h_j \quad (127)$$

Warunek ten może być spełniony, dla dostatecznie małych  $d_0$ , poprzez odpowiedni dobór zmiennej  $s$  obecnej w równaniach określających  $h(\rho)$  oraz  $\rho_t$  dla każdej kuli.

W szczególności zmienna  $s$ , w rozpatrywanym przypadku, musi należeć do przedziału  $s \in (s_{min}, 0)$ , gdzie  $s_{min}$  wynika z przekształcenia pierwszego ze wzorów (91):

$$s_{min} = \frac{1}{4} - \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (128)$$

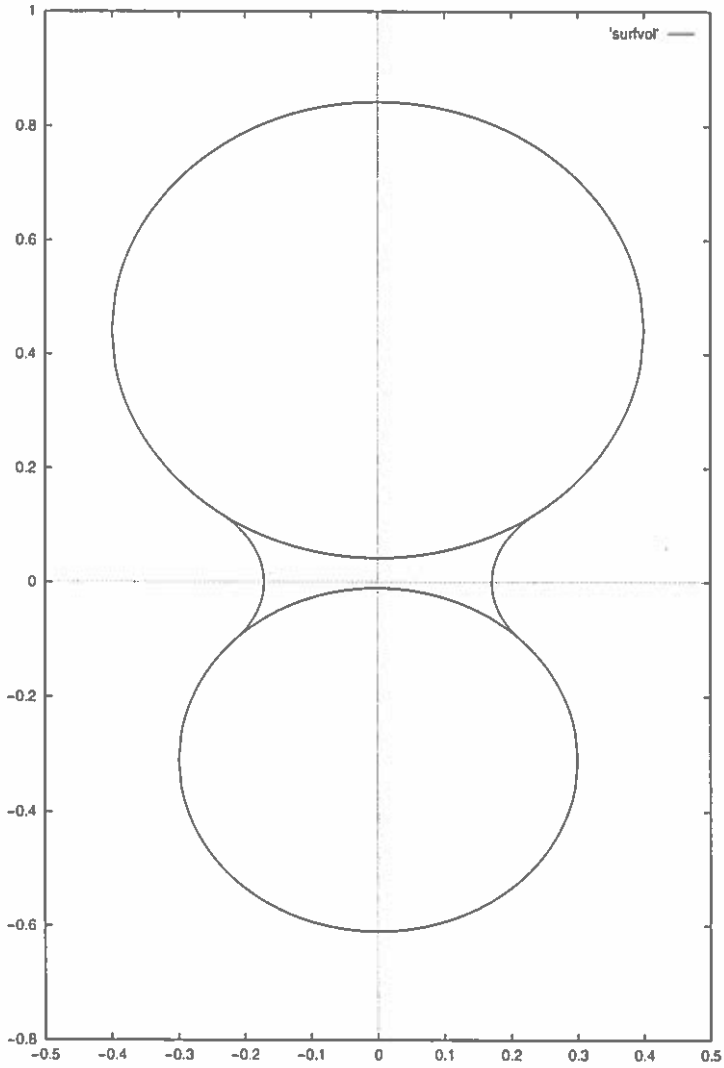
gdzie w miejsce  $\rho_1$  wstawiono  $r$  równe mniejszemu z promieni  $r_i$  lub  $r_j$ . Dla bardziej ujemnych wartości parametru  $s$  minimalny promień soczewki będzie większy niż promień mniejszej z kul, pomiędzy którymi soczewka ma się znajdować. Taki przypadek jest sprzeczny z wymaganiem by obie kule były styczne do powierzchni soczewki i musi być wyeliminowany poprzez ograniczenie zakresu zmienności parametru  $s$ .

Równanie (127) musi być rozwiązane numerycznie ze względu na obecność funkcji nieelementarnych w wyrażeniach na  $h_i$  oraz  $h_j$ . Po jego rozwiązaniu otrzymano wartość  $s$  wspólną dla obu kul, niezbędną do wyznaczenia objętości soczewki pomiędzy danymi kulami.

Ponieważ wzór (100) określa objętość soczewki o płasko ściętych powierzchniach (górną i dolną), a soczewki w modelu zakończone są powierzchniami kul, które wypierają część wody, musimy od objętości obliczonej wzorem (100) odjąć objętość odcinków kuli o wysokości  $a$  (Rys. 9) wyznaczoną z zależności:

$$v_o = \frac{1}{6} \pi a^2 (3r - a) \quad (129)$$

Po odjęciu objętości odcinków każdej z kul tworzących soczewkę (Rys. 9) otrzymano objętość wody w soczewce ograniczonej dwoma kulami.



Rys. 9. Soczewka wodna i kule do niej styczne

## 5.6. Parametryzacja objętości soczewek

Na objętość soczewki składają się: objętość dwu połówek soczewki (wzór (101)) o parametrze  $s$  i  $\rho = \rho_t$  (gdzie  $\rho_t$  dane jest jednym ze wzorów (121)) pomniejszonych o objętość odcinków kul o promieniach  $r_i$  i  $r_j$  (wzór (129)).

Można zatem zapisać, że objętość  $V_{ij}$  soczewki pomiędzy dwoma kulami wynosi:

$$V_{ij}(r_i, r_j, s, d_0) = V(\rho_{ti}) + V(\rho_{tj}) - v_{oi} - v_{oj} \quad (130)$$

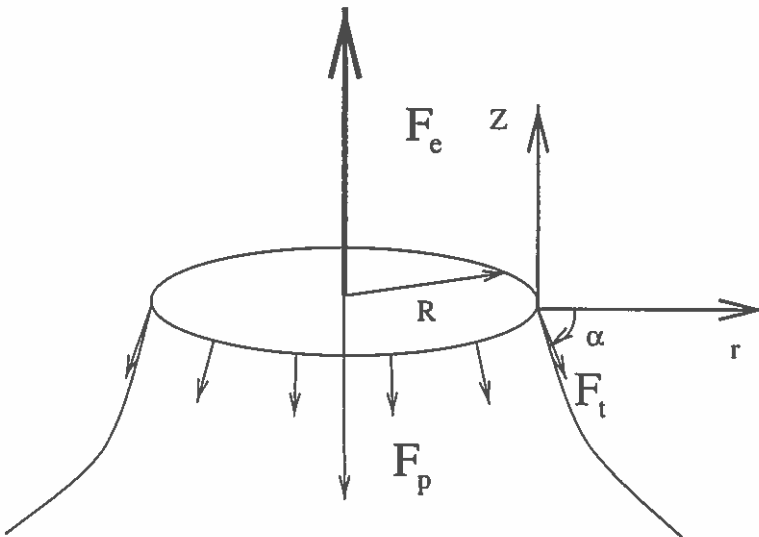
gdzie:

$r_i$  i  $r_j$  - zredukowane promienie kul (równanie (104)) ograniczających soczewkę,  
 $s$  parametr soczewki wyliczony z rozwiązania równania (127),  
 $d_0$  założona odległość środków kul ograniczających soczewkę,  
 $\rho_{ti}$  i  $\rho_{tj}$  zredukowane promienie w których kule styczne są do soczewki,  
 $v_{oi}$  i  $v_{oj}$  objętości wyparte z soczewek poprzez kule je ograniczające.

## 5.7. Siły działające na przekroju soczewki wodnej

Wzór Laplace'a łączące różnicę ciśnień pomiędzy dwiema stronami powierzchni wody ma wcześniej cytowaną postać (równanie (44)):

$$\Delta p = 2H\sigma \quad (131)$$



Rys. 10. Rozkład sił na przekroju powierzchni soczewki.

Rozważono tu siły działające na poziomym przekroju soczewki (Rys. 10). Siła parcia cieczy,  $F_p$ , skierowana jest prostopadle do powierzchni przekroju. Siła napięcia

powierzchniowego,  $F_t$ , skierowana jest stycznie do powierzchni soczewki, tangens kąta  $\alpha$  dany jest więc równaniem:

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr} . \quad (132)$$

Pierwsza siła to parcie wody pod ciśnieniem  $\Delta p$ :

$$F_p = -\pi R^2 \Delta p . \quad (133)$$

Druga siła to pionowa składowa siły napięcia powierzchniowego cieczy na powierzchni soczewki dana równaniem:

$$F_t = 2\pi R\sigma \sin \alpha . \quad (134)$$

Dodatkowo rozważono tu siłę zewnętrzną  $F_e$  działającą na przekrój soczewki. Jeżeli przekrój soczewki jest w spoczynku to wszystkie przyłożone siły muszą się równoważyć, co może być wyrażone równaniem:

$$F_p + F_t - F_e = 0 . \quad (135)$$

Równanie (134) może być przekształcone przy użyciu równań (132) i (84) do formy:

$$F_t = 2\pi\sigma(|H|R^2 + C) . \quad (136)$$

A równanie (135) przy wykorzystaniu wyniku z równania (136) i równania (133) przybiera postać:

$$-\pi R^2 \Delta p + 2\pi\sigma(|H|R^2 + C) - F_e = 0 . \quad (137)$$

Po zastosowaniu równości (131) otrzymano:

$$F_e = 2\pi\sigma C . \quad (138)$$

A stąd jawne wyrażenie na parametr  $C$ :

$$C = \frac{F_e}{2\pi\sigma} \quad (139)$$

a w związku z tym:

$$s = H \frac{F_e}{2\pi\sigma} . \quad (140)$$

Wyrażenie (140) oznacza, że parametr  $s$  jest ściśle związany z siłą rozciągającą soczewkę wodną wzdłuż jej osi. Ponieważ wartość siły  $F_e$  nie zależy od miejsca, w którym przekroju dokonano – można wnioskować, że ziarna stałe, pomiędzy którymi soczewka się znajduje, będą przyciągane z siłą  $F_e$ , zależną od parametru  $C$  rozpiętej na nich soczewki wodnej wyrażoną wzorem (138).



## 5.8. Obliczanie niezbędnych całek

Aby obliczyć  $h(\rho)$  z równania (84) należy wykonać całkowanie:

$$h(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\rho^2 + s}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} d\rho . \quad (141)$$

Aby obliczyć pole powierzchni soczewki, zgodnie z równaniem (96), należy policzyć całkę:

$$A(\rho) = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} d\rho . \quad (142)$$

Obliczenie objętości, zgodnie z równaniem (100) prowadzi do całek o postaci:

$$V(\rho) = \pi \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\rho^2(\rho^2 + s)}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} d\rho . \quad (143)$$

W celu wyznaczenia całek z równań (141), (142) i (143) wprowadzono następujące całki pomocnicze:

$$\begin{aligned} H_0 &= \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \\ H_2 &= \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \\ H_4 &= \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\rho^4 d\rho}{\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2}} \end{aligned} \quad (144)$$

i wyrażono wszystkie całki za pomocą całek ze wzoru (144). Po podstawieniu równanie (141) przyjmuje formę:

$$h(\rho) = H_2 + sH_0 \quad (145)$$

równanie (142) formę:

$$A(\rho) = 2\pi H_2 \quad (146)$$

a równanie (143) przybiera kształt:

$$V(\rho) = \pi H_4 + \pi s H_2 . \quad (147)$$

Wszystkie potrzebne całki przekształcono w wyrażenia zawierające  $H_0$ ,  $H_2$  i  $H_4$ .

Aby scałkować te wyrażenia przekształcono pierwiastek kwadratowy w mianowniku równania (144) do postaci:

$$\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2} = \sqrt{-\rho^4 - (2s - 1)\rho^2 - s^2} \quad (148)$$

z dwoma dodatnimi pierwiastkami  $\rho_1^2$  i  $\rho_2^2$  danymi przez wzór (84). Wykorzystanie tych pierwiastków prowadzi do wyrażenia:

$$\sqrt{\rho^2 - (\rho^2 + s)^2} = \sqrt{-(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho^2 - \rho_2^2)} . \quad (149)$$

Bez utraty ogólności można założyć, że  $0 \leq \rho_1^2 \leq \rho_2^2$  co można osiągnąć poprzez odpowiednie ponumerowanie pierwiastków.

Wprowadzono następnie nowe parametry  $u'$  i  $u''$  wzorami [17]:

$$u' = \frac{1}{\rho_2} \quad (150)$$

$$u'' = \frac{1}{\rho_1} \quad (151)$$

oraz nową zmienną  $t$  zdefiniowaną równaniem:

$$u' \rho = \sqrt{1 - \frac{u''^2 - u'^2}{u''^2} t^2} \quad (152)$$

(warto zauważyć, że  $t(\rho_2) = 0$  i  $t(\rho_1) = 1$ )

Powyzsza zamiana zmiennych prowadzi do następującej różniczki:

$$u' d\rho = \frac{-k^2 t}{\sqrt{1 - k^2 t^2}} dt . \quad (153)$$

gdzie:  $k^2 = (u''^2 - u'^2)/u''^2$  jest parametrem całki

Połączenie równań (150), (152) i (153) daje wzór:

$$\frac{d\rho}{\sqrt{-(\rho^2 - \rho_1^2)(\rho^2 - \rho_2^2)}} = \frac{-u' dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} . \quad (154)$$

Odpowiednio do zamiany zmiennych, całki ze wzoru (144) przyjmują postać:

$$H_{2n} = \frac{-1}{u'^{2n-1}} \int_1^{t(\rho)} \frac{(1 - k^2 t^2)^n dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \quad (155)$$

lub jawnie:

$$\begin{aligned} H_0 &= -u' \int_1^{t(\rho)} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \\ H_2 &= \frac{-1}{u'} \int_1^{t(\rho)} \frac{(1 - k^2 t^2) dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \\ H_4 &= \frac{-1}{u'^3} \int_1^{t(\rho)} \frac{(1 - k^2 t^2)^2 dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \end{aligned} \quad (156)$$

Wprowadzono następane całki za pomocą wzorów:

$$I_n = \int_1^{t^{(\rho)}} \frac{t^{2n} dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \quad (157)$$

i przy ich użyciu przepisano wzory (156) do postaci:

$$\begin{aligned} H_0 &= -u' I_0 \\ H_2 &= \frac{-1}{u'} (I_0 - k^2 I_1) \\ H_4 &= \frac{-1}{u'^3} (I_0 - 2k^2 I_1 + k^4 I_2) \end{aligned} \quad (158)$$

Użycie wzoru redukcyjnego:

$$(2n-1)k^2 I_n - (2n-2)(k^2+1)I_{n-1} + (2n-3)I_{n-2} = t^{2n-3} \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)} \quad (159)$$

przeprowadza  $I_2$  do formy:

$$I_2 = \frac{1}{3k^2} \left[ t \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)} \Big|_1^{t^{(\rho)}} + 2(k^2+1)I_1 - I_0 \right] \quad (160)$$

co oznacza, że wszystkie całki wyrażają się za pomocą  $I_0$  i  $I_1$ . Podstawienie  $t = \sin \varphi$  zamienia te całki w standardową postać:

$$I_0 = \int_{\pi/2}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi) - F(k, \pi/2) \quad (161)$$

oraz:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi/2}^{\varphi(t)} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{1}{k^2} \int_{\pi/2}^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2} \int_{\pi/2}^{\varphi(t)} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= \frac{1}{k^2} (F(k, \varphi) - E(k, \varphi) - F(k, \pi/2) + E(k, \pi/2)) \end{aligned} \quad (162)$$

W powyższych wzorach całki  $F(k, \varphi)$  oraz  $E(k, \varphi)$  to niepełne całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju.

Jak wynika z przeprowadzonej dyskusji wszystkie te całki są możliwe do wyliczenia w sposób analityczny i wyrażają się przez niepełne całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju  $F(k, \varphi)$  oraz  $E(k, \varphi)$ , elementarne funkcje od  $k$  i dodatkowe parametry.

Wielkości  $h(\rho)$ ,  $A(\rho)$  i  $V(\rho)$  określone odpowiednio wzorami (141), (142) i (143) są to wielkości bezwymiarowe, przeskalowane za pomocą odpowiedniej potęgi krzywizny średniej  $H$ . Wielkości fizyczne: wysokość  $z(r)$ , pole powierzchni soczewki  $S(r)$  oraz jej objętość  $V(r)$  otrzymano dokonując skalowania odwrotnego za pomocą równań:

$$\begin{aligned} z(r) &= \frac{h(|H|r)}{|H|} \\ S(r) &= \frac{A(|H|r)}{|H|^2} \\ V(r) &= \frac{V(|H|r)}{|H|^3} \end{aligned} \quad (163)$$

## 6. PROGRAMY OBLICZENIOWE

W celu wykonania obliczeń numerycznych napisano i uruchomiono oprogramowanie w języku FORTRAN. Oprogramowanie uruchomiono na komputerze klasy IBM PC z systemem operacyjnym FreeBSD. Oprogramowanie składa się z szeregu plików wykonujących poszczególne obliczenia. Wyniki w formie numerycznej posłużyły do wykonania rysunków i tabel.

Poniżej wymieniono najważniejsze programy.

1. Do wyliczania wilgotności próbek glebowych zgodnie z równaniem (31) program MEANSOIL.FOR.
2. Do wyliczania objętości i powierzchni soczewek wodnych zgodnie ze wzorami (141), (142), (143) napisano program LENS.FOR.
3. Do rozwiązania równań (103) i (104) na styczność kul i powierzchni soczewki napisano program DBLENS.FOR.

Programy zorganizowano w sposób umożliwiający wzajemne korzystanie ze wspólnych procedur i zbiorów danych.

## 7. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

### 7.1. Podciśnienie i krzywizna średnia powierzchni wody

Jeżeli po obu stronach powierzchni rozdzielającej wodę od powietrza panują różne ciśnienia to różnica ciśnień spowoduje przemieszczenie się cieczy i zakrzywienie powierzchni aż do osiągnięcia stanu równowagi. Zgodnie ze wzorem Laplace'a w stanie równowagi krzywizna średnia powierzchni  $H$  spełnia równanie:

$$H = \frac{\Delta p}{2\sigma} . \quad (164)$$

Tab. 2. Wybrane wartości pF przeliczone na podciśnienie, promień kapilary równowaznej i krzywiznę średnią powierzchni wody

pF	$\Delta p [cm_{H_2O}]$	$R_{eq} [mm]$	$H [mm^{-1}]$
0,0	1,0	1,459	0,685
1,0	10,0	0,1459	6,850
1,5	31,6	0,04620	21,646
1,6	39,8	0,03668	27,260
2,0	100,0	0,01460	68,500
2,2	158,5	0,009210	108,570
2,3	199,5	0,007318	136,658
2,7	501,2	0,002913	343,322

Równanie (164) wiąże krzywiznę średnią  $H$  różnicę ciśnień  $\Delta p$  oraz napięcie powierzchniowe wody względem powietrza.

W warunkach normalnych napięcie powierzchniowe wody wynosi  $\sigma = 0,073N/m$ . Wartość napięcia powierzchniowego wody glebowej może odbiegać od tej liczby, z powodu obecności rozpuszczonych substancji, do celów obliczeniowych przyjęto jednak tę wartość.

Przeliczając jednostki we wzorze (164) otrzymano:

$$H [mm^{-1}] = 0,85 \Delta p [cm_{H_2O}] \quad (165)$$

Wykorzystując wzór (42) wyliczono promień kapilary równowaznej (w milimetrach), używając podciśnienia w centymetrach słupa wody, jako:

$$R_{eq} [mm] = \frac{1,459854}{\Delta p [cm_{H_2O}]} \quad (166)$$

Promień kapilary równowaznej równy jest w tym przypadku średniemu promieniowi krzywizny tzn.  $R_{eq} = 1/H$ .

Wzory (165) oraz (166) posłużyły do określania krzywizny średniej powierzchni wody w soczewkach  $H$  (w  $mm^{-1}$ ) i promienia równowaznego kapilar  $R_{eq}$  (w  $mm$ ) przy założonym podciśnieniu  $\Delta p$  (w  $cm_{H_2O}$ ) wody glebowej.

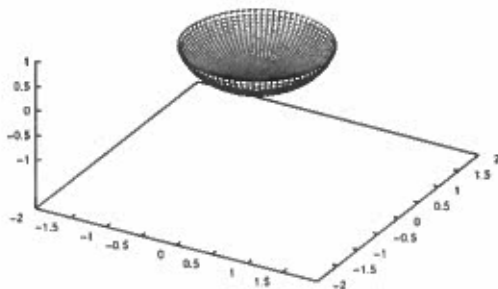
Wstawiając wartość podciśnienia dla określonej wartości pF do wzoru (165) otrzymano wartość krzywizny średniej powierzchni wody w soczewce, w której wewnątrz panuje zadane podciśnienie.

Dla ustalenia uwagi przedstawiono niektóre wartości w tabeli 2.

## 7.2. Właściwości powierzchni soczewek w zależności od ich parametrów

Przebieg funkcji opisującej kształt soczewki wodnej o zadanych parametrach omówiono pokrótce w rozdziale 5.2.. Równanie powierzchni soczewki dane wyrażeniem (141) wymaga dalszej dyskusji.

W stanie nierozciągniętym ( $s = 0$ ) soczewka o danej krzywiznie średniej  $H$  przybiera kształt kulisty. Dla  $H < 0$ , taki właśnie kształt przybiera menisk wklęsły w kapilarze o średnicy  $2/H$  (Rys. 11) przy założeniu idealnego zwilżania ścianek kapilary i zaniedbaniu sił grawitacji.

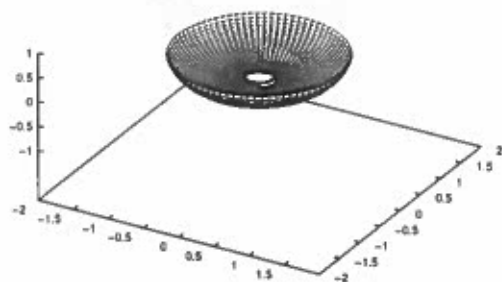


Rys. 11. Menisk wklęsły w kapilarze

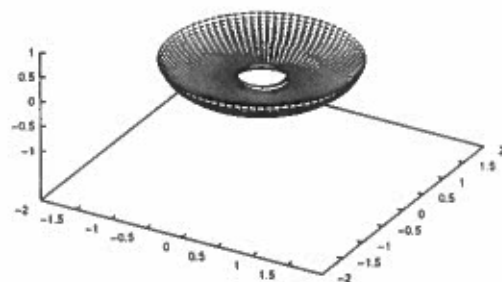
Jeżeli jednak do powierzchni wody przyłożono siłę (zgodnie z równaniem (140)) na przekroju kolistym, skierowaną ku górze ( $s > 0$ ) to menisk zostanie zdeformowany do postaci pokazanej na Rys. 12. Część środkowa menisku uniesie się ku górze. Ponieważ wszystkie parametry powierzchni na rysunkach, oprócz przyłożonej siły są identyczne to na rysunkach Rys. 11 – 14 możemy prześledzić zmiany kształtu menisku w miarę wzrostu przyłożonej siły, przy zachowaniu wartości podciśnienia wody w stosunku do powietrza.

Gdy  $s < 0$ , odpowiada to przyłożeniu do powierzchni wody siły (zgodnie z równaniem (140)) na przekroju kolistym skierowanej ku dołowi (w układzie współrzędnych rysunku). Menisk zostanie odkształcony do postaci pokazanej na rysunkach 15 – 17. Część dolna zostanie w miarę wzrostu parametru  $s$  do wartości granicznej ( $s=0,25$ ) rozciągnięta do dołu. Jednocześnie początkowa półsfera (Rys. 11) zmienia się upodabniając się do cylindra o osi pionowej (Rys. 17).

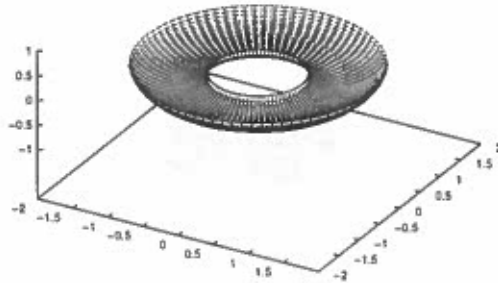
Na wymienionych rysunkach wartość średniej krzywizny jest zawsze jednakowa i wynosi  $H = -1$ . Oznacza to, że wszelkie zmiany wymiarów przedstawianej powierzchni są wynikiem zmiany siły rozciągającej (z którą związany jest parametr  $s$ ),



Rys. 12. Menisk wklęsły w kapilarze dla parametru  $s = 0,2$

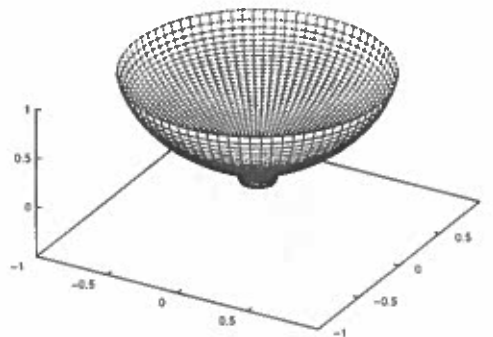


Rys. 13. Menisk wklęsły w kapilarze dla parametru  $s = 0,4$



Rys. 14. Menisk wklęsły w kapilarze dla parametru  $s=1$

a nie wartości różnicy ciśnień panującej po obu stronach powierzchni. Można więc orzec, że dla danego podciśnienia (danej krzywizny średniej  $H$ ) powierzchnia wody o symetrii obrotowej przyjmie kształt przedstawiony na wymienionych rysunkach.

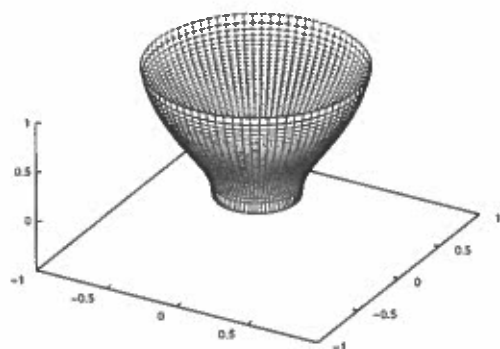


Rys. 15. Menisk wklęsły w kapilarze dla parametru  $s=-0,1$

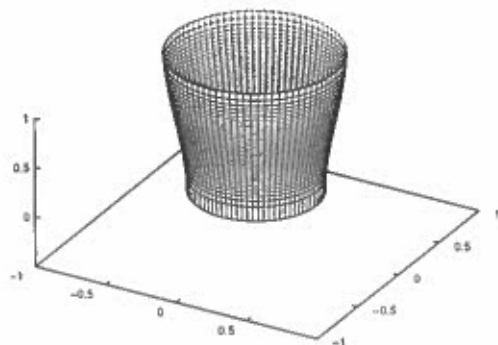
### 7.3. Mikrokrzywe retencji wody

W tym rozdziale pokazano zależność kształtu i objętości soczewek wodnych od potencjału wody (jej podciśnienia), oraz odległości i średnicy ziaren stałych,





Rys. 16. Menisk wklęsły w kapilarze dla parametru  $s=-0,2$



Rys. 17. Menisk wklęsły w kapilarze dla parametru  $s=-0,245$

między którymi soczewka jest utworzona. Zależność objętości soczewek wodnych od ich parametrów wyznaczono w równaniu (130). Jednostki względne, używane dotychczas we współrzędnych przestrzennych  $\rho$  i  $h$ , przeskalowano ze względu na krzywiznę średnią  $H$  powierzchni soczewek (zgodnie ze wzorami (80)). W ten sam sposób przeskalowano promienie kul tworzących soczewki jakie wyznaczono rozwiązując równanie (127).

Aby nawiązać do średnic ziaren stałych w glebie, wprowadzono na powrót zmienne rzeczywiste. Zmiana ta podyktowana jest tym by pokazać jak kształt soczewki zależy od stosunku średniego promienia krzywizny powierzchni (podciśnienia) do promienia kul łączonych soczewką wodną. Zmiana skali problemu (promieni kul łączonych soczewką) z jednoczesną zmianą promienia krzywizny powierzchni soczewki o ten sam czynnik przekształca soczewki w podobne w geometrycznym sensie do wyjściowych. Ograniczono się do rozważania soczewek wodnych pomiędzy kulami o danym stosunku promieni, zamiast rozpatrywać soczewki pomiędzy kulami o danych promieniach. Fakt ten redukuje zakres koniecznych obliczeń, a także rzuca dodatkowe światło na sens fizyczny objętości soczewek wodnych  $v_{ij}$  ze wzoru (142).

W ramach założeń uczynionych w zaprezentowanym tutaj modelu soczewek,  $V_{ij}$  jest funkcją zależną od stosunku promieni  $r_i/r_j$ , stosunku promienia krzywizny powierzchni i mniejszego z promieni kul  $r_i, r_j$  oraz od przeskalowanej odległości pomiędzy kulami. Fakt ten posiada głębsze znaczenie, gdyż redukuje zagadnienie obliczania mikrokrzywych retencji wody - jak nazwano tu zależność objętości soczewki od krzywizny średniej - do wyliczenia rodziny funkcji z trzema parametrami. Wykorzystanie geometrycznego podobieństwa pomiędzy soczewkami pozwala przeskalować wyniki do dowolnego zestawu danych.

W związku z powyższą dyskusją wzór (130):

$$V_{ij}(r_i, r_j, s, d_0) = V(\rho_{ti}) + V(\rho_{tj}) - v_{oi} - v_{oj} \quad (167)$$

przy użyciu zależności skalowania (164) sprowadzono do postaci:

$$v_{ij} = V_{ij}(R_i|H|, R_j|H|, C|H|, R_{ij}|H|)/|H|^3 \quad (168)$$

gdzie rzeczywista objętość  $v_{ij}$  wykorzystana będzie do wyliczenia wilgotności zgodnie ze wzorem (31).

Aby otrzymać rzeczywistą objętość soczewki wyliczono wartość objętości przeskalowanej dla przeskalowanych parametrów i podzielić ją przez trzecią potęgę średniej krzywizny.

Korzystając z zależności skalowania objętości (168) w szczególności wykorzystano wzór (43) wprowadzając bardziej obrazowy parametr jakim jest promień kapilary równoważnej  $R_{eq}$  do równania (168) otrzymując:

$$v_{ij} = V_{ij} \left( \frac{R_i}{R_{eq}}, \frac{R_j}{R_{eq}}, \frac{C}{R_{eq}}, \frac{R_{ij}}{R_{eq}} \right) R_{eq}^3 \quad (169)$$

Wzór powyższy jawnie obrazuje zależność objętości wody w soczewce od promienia równoważnego kapilary dla danego podciśnienia wody. Kształt mikrokrzywej retencji wody (zależności objętości wody w soczewce od ciśnienia lub promienia kapilary równoważnej) zależy wyłącznie od stosunku promieni ziaren stałych i promienia kapilary równoważnej. Czynnikiem skalującym jest wartość promienia kapilary równoważnej  $R_{eq}$ .

Zmiana promieni cząstek, a zarazem i odległości między nimi  $\beta$ -krotnie poprzez wprowadzenie nowych zmiennych  $R'_i = \beta R_i$ ,  $R'_j = \beta R_j$  oraz  $R'_{ij} = \beta R_{ij}$ , a jednocześnie zmiana wartości promienia kapilary równoważnej na  $R'_{eq} = \beta R_{eq}$  przeprowadza równanie (169) na:

$$v_{ij} = V_{ij} \left( \frac{R'_i \beta}{R'_{eq} \beta}, \frac{R'_j \beta}{R'_{eq} \beta}, \frac{C \beta}{R'_{eq} \beta}, \frac{R'_{ij} \beta}{R'_{eq} \beta} \right) (R'_{eq} / \beta)^3 . \quad (170)$$

Zmiana skali problemu (np. przejście od jednej frakcji granulometrycznej do innej) powoduje zmianę wszystkich wartości w jednakowym stosunku, tak że wyrażenie (170) zostaje podzielone przez trzecią potęgę współczynnika  $\beta$ , o który zmieniono skalę w geometrii problemu:

$$v_{ij} = V_{ij} \left( \frac{R'_i}{R'_{eq}}, \frac{R'_j}{R'_{eq}}, \frac{C}{R'_{eq}}, \frac{R'_{ij}}{R'_{eq}} \right) (R'_{eq} / \beta)^3 . \quad (171)$$

Argumenty funkcji  $v_{ij}$  w równaniu (171) nie zmieniły się w czasie skalowania, jej wartość pozostaje też niezmienna. Jedyne czynniki  $\beta$  na końcu równania (171) zmieniają się podczas zmiany skali.

Przenosząc ten czynnik na lewą stronę równania otrzymano wyrażenie na objętość  $v'_{ij}$  (po zmianie skali) w postaci:

$$v'_{ij} = v_{ij} \beta^3 = V_{ij} \left( \frac{R'_i}{R'_{eq}}, \frac{R'_j}{R'_{eq}}, \frac{C}{R'_{eq}}, \frac{R'_{ij}}{R'_{eq}} \right) R'^3_{eq} . \quad (172)$$

Ogólna postać równania (172) sugeruje, że zawartość wody w glebie stowarzyszoną z obecnością frakcji o różnych średnicach należy rozważać w funkcji stosunku promieni rozważanych frakcji do promienia kapilary równoważnej. Z ogólnych właściwości powierzchni soczewki wodnej można wnioskować, że objętość wody w soczewkach zmieniać się będzie w miarę gdy stosunek wymienionych promieni będzie się zmieniał. Niewielkie zmiany ciśnienia dla grubych frakcji, a co za tym idzie i niewielkie zmiany promienia równoważnego kapilar (zdefiniowanego równaniem (166)), będą powodować znaczne zmiany objętości wody w soczewkach, podczas gdy dla drobnych frakcji zmiany podciśnienia muszą być proporcjonalnie większe by otrzymać tę samą procentową zmianę wilgotności.

Fakt ten ma swój wyraz w obserwowanych właściwościach gleb. W glebach piaszczystych nawet niewielki wzrost podciśnienia powoduje ich gwałtowne osuszenie podczas gdy gleby ilaste tracą wodę w zakresie zmian ciśnienia sięgającym tysięcy centymetrów słupa wody.

Tab. 3. Podciśnienia charakterystyczne dla średnich promieni cząstek z frakcji granulometrycznych

LP	$D_i [mm]$	$r_i [mm]$	$\Delta p_i^0 [cm_{H_2O}]$
1	0,001	0,0005	2919,7
2	0,004	0,002	729,9
3	0,013	0,0065	224,6
4	0,035	0,0175	83,4
5	0,075	0,0375	38,9
6	0,300	0,150	9,7
7	0,750	0,3750	1,94

#### 7.4. Podciśnienie charakterystyczne

Korzystając z równania (166) wprowadzono podciśnienie charakterystyczne dla każdej z frakcji granulometrycznych. Podciśnieniem charakterystycznym nazwano podciśnienie jakie panuje we wnętrzu soczewki wodnej jeżeli średni promień krzywizny jej powierzchni równa się promieniowi  $r_i$  mniejszej z cząstek jakie ją tworzą:

$$\Delta p_i^0 [cm_{H_2O}] = \frac{1,459854}{r_i [mm]} \quad (173)$$

Dla danych zestawionych w tabeli 4 wyliczono wartości podciśnienia charakterystycznego  $\Delta p_i^0$  dla poszczególnych frakcji i zestawiono je w tabeli 3.

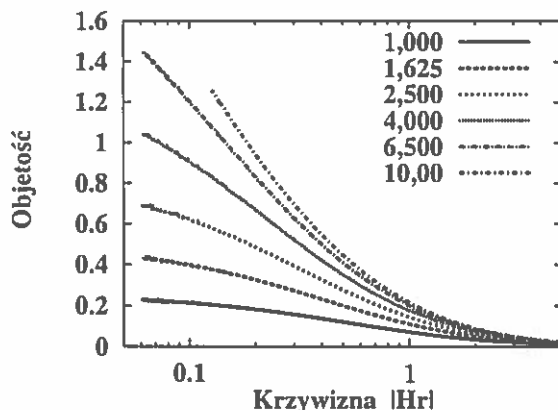
W dalszych obliczeniach wielkość  $Hr_i$  będzie użyta jako jednostka na osi poziomej. Pozwoli to znormalizować mikrokrzywe retencji wody i rozpatrywać wszystkie frakcje granulometryczne w jednym układzie współrzędnych.

Na rysunku 18 przedstawiono zależność stosunku objętości wody w soczewce do objętości mniejszej z kul ją tworzącej od krzywizny średniej wyrażonej w jednostkach  $Hr_i$ .

Poszczególne krzywe reprezentują objętości wody w soczewkach utworzonych pomiędzy kulami o różnych promieniach. Założono tutaj, że kule są styczne do siebie. W takiej sytuacji soczewki są stabilne i nie ulegają przerwaniu nawet dla dużych ujemnych wartości krzywizny (podciśnienia).

W miarę różnicowania się promieni (na rysunku 18 przedstawiono krzywe o stosunku promieni kul równym 1, 1,625, 2,5, 4,0, 6,5, 10,0) względna objętość soczewek dla tych samych pozostałych argumentów staje się coraz większa. Dla niewielkich krzywizn przekracza nawet wartość 1,0. Oznacza to, że na styku drobnych cząstek z dużymi może magazynować się woda o objętości przekraczająca objętość drobnych cząstek. W ten sposób manifestuje się obserwowane w naturze duże znaczenie drobnych frakcji granulometrycznych w retencji wody.

Poza dużą wartością, krzywe dla większych stosunków promieni są bardziej strome w zakresie niskich krzywizn. W procesie nawilżania i osuszania, te właśnie



Rys. 18. Mikrokrzywe retencji wody przy różnym stosunku promieni kul tworzących soczewki

soczewki (pory) są najaktywniejsze, w zakresie podciśnień wyznaczonych krzywizną i promieniami cząstek stałych.

Kształt i wymiary soczewek zmieniają się w miarę zmiany krzywizny (podciśnienia) w zależności od promieni cząstek je tworzących.

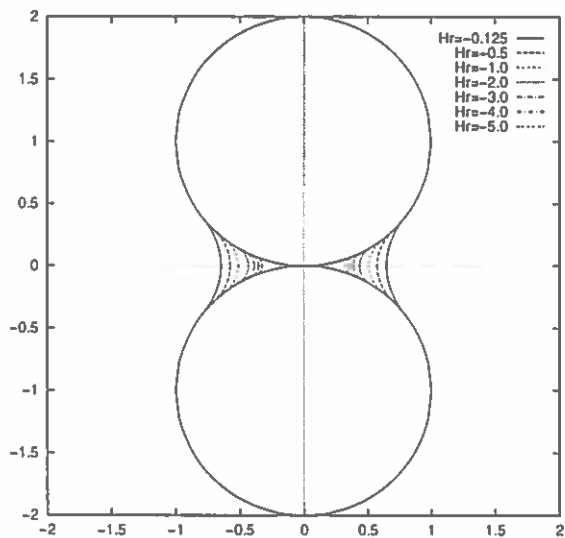
Rysunki 19 – 22 przedstawiają soczewki utworzone pomiędzy cząstkami o różnym stosunku promieni.

W przypadku jednakowych cząstek tworzących parę (Rys. 19) soczewki są symetryczne względem płaszczyzny poziomej poprowadzonej przez zero układu współrzędnych. W miarę zmiany stosunku promieni (Rys. 20–22) kształt soczewek różnicuje się w sąsiedztwie obu kul obejmując dla małych podciśnień duży obszar większej z kul. Fakt ten, biorąc pod uwagę symetrię obrotową soczewek względem osi pionowej, odpowiada za znaczny wzrost objętości soczewki w tym zakresie podciśnień.

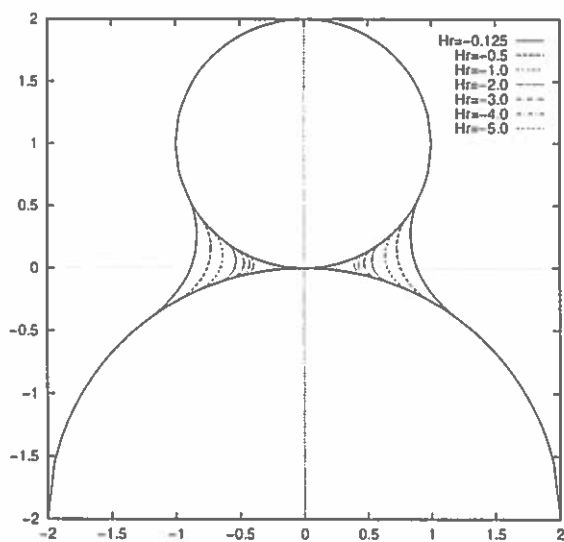
W przypadku gdy kule tworzące soczewki nie są styczne pojawiają się pewne dodatkowe efekty.

Jeżeli kule są położone bliżej niż suma ich promieni (Rys. 23), co odpowiada zbliżeniu kul ze ściętym odpowiednim odcinkiem, soczewka przybiera kształt o innych parametrach niż odpowiadający mu na Rys. 19. Asymptotyczne zachowanie objętości soczewki również zmienia się. Dąży ona do zera wolniej niż ta z Rys. 19 ze względu na niezerowy kąt pod jakim przecinają się przekroje kul ją tworzących (kule styczne z definicji stykają się pod kątem równym zero). Oznacza to, że zdolność retencyjna, gdy występują kule ścięte, jest większa (Rys. 25), w glebie, gdzie kształty ziaren stałych są zwykle nieregularne należy liczyć się z częstym wystąpieniem takiej sytuacji.

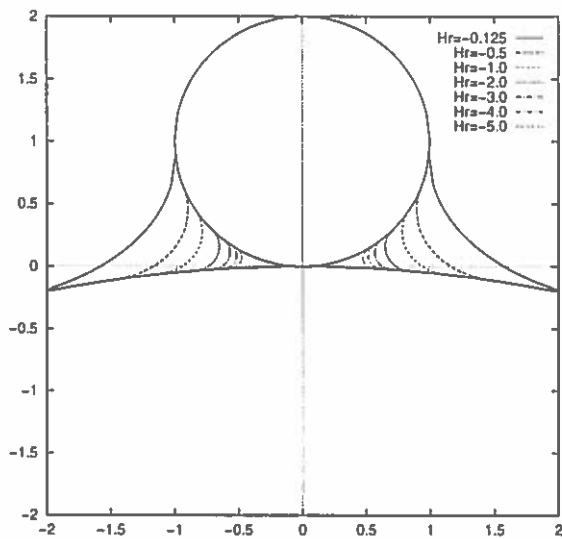
Jeżeli kule są położone dalej niż suma ich promieni (Rys. 24), pojawia się



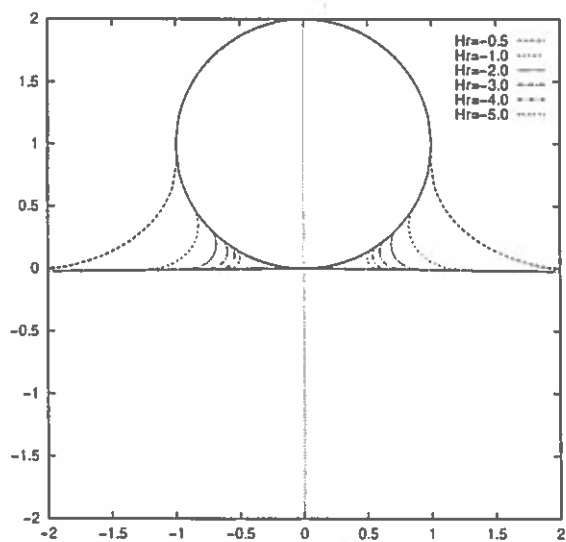
Rys. 19. Przekroje soczewek wodnych dla jednakowych, stycznych kul



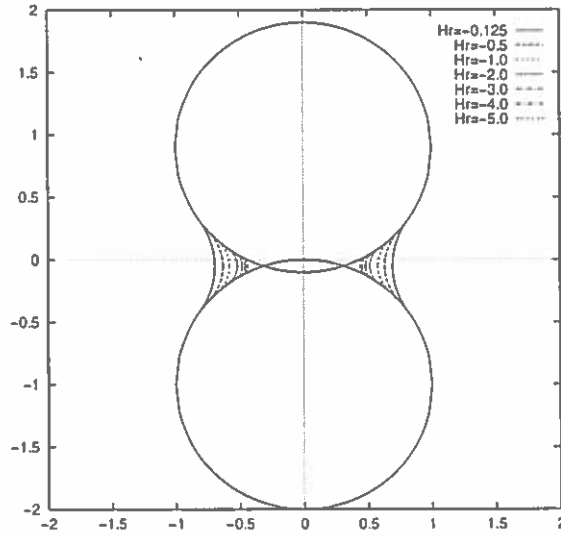
Rys. 20. Przekroje soczewek o różnym ciśnieniu dla stycznych kul o stosunku promieni  $1/2$



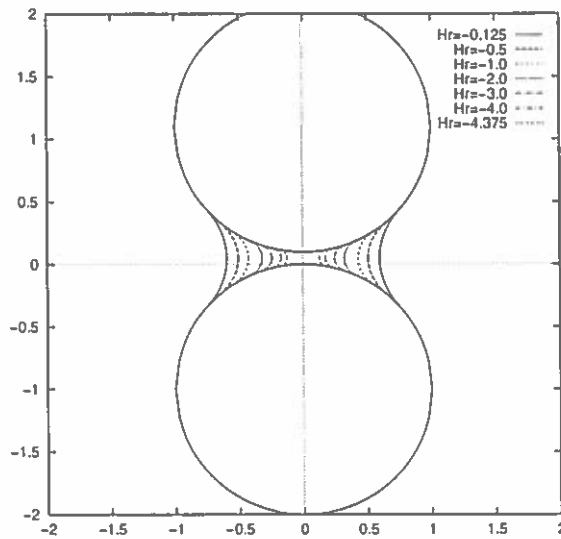
Rys. 21. Przekroje soczewek o różnym ciśnieniu dla stycznych kul o stosunku promieni  $1/10$



Rys. 22. Przekroje soczewek o różnym ciśnieniu dla stycznych kul o stosunku promieni  $1/100$



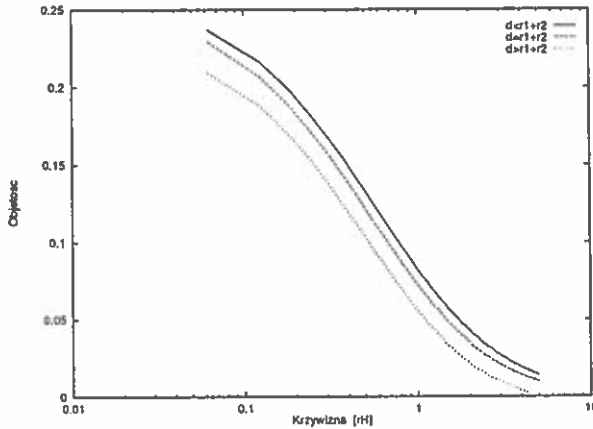
Rys. 23. Przekroje soczewek o różnym ciśnieniu dla jednakowych kul, których odległość jest mniejsza od sumy ich promieni



Rys. 24. Przekroje soczewek o różnym ciśnieniu dla jednakowych kul, których odległość jest większa od sumy ich promieni



dodatkowo ograniczenie spowodowane niestabilnością soczewek. Przy pewnym podciśnieniu (na Rys. 24 poniżej wartości  $Hr = -4,375$ ) następuje zerwanie soczewki. Poniżej ciśnienia zerwania, soczewka pomiędzy tak oddalonymi kulami, nie może istnieć. Woda więc nie może być retencjonowana w tych warunkach. W materiale glebowym jedynie ziarna stałe blisko położone mogą tworzyć soczewki, w których zmagazynowana jest woda.



Rys. 25. Mikrokrzywe retencji wody jednakowych stycznych kul, w porównaniu do mikrokrzywej pF kul niestykających się ze sobą oraz przekrywających się częściowo (d - odległość kul)

Soczewki pomiędzy cząstkami oddalonymi, w zależności od podciśnienia, stają się niestabilne i znikają oddając swoją wodę do soczewek je otaczających.

Mechanizm ten może być wykorzystany do wyjaśnienia zjawiska histerezy w ramach proponowanego modelu. Próby teoretycznego wyjaśnienia zjawiska histerezy występującego w retencji wody w glebie opierają się głównie na abstrakcyjnym pojęciu "domen" [71, 87, 38, 39] posiadających zdolność skokowego opróżniania się z wody. Tutaj pojęcie domen znajduje swój rzeczywisty odpowiednik w opisywanych soczewkach wodnych.

## 8. MODEL PRAKTYCZNY KRZYWYCH RETENCJI

Wilgotność makroskopowej próbki glebowej, zgodnie z uprzednio wyprowadzonym wzorem (31) wyraża się formułą:

$$\theta = \rho \sum_{i=1}^K x_i v_i + 2\pi\rho^2 \sum_{i,j=1}^K x_i x_j \int_0^r v_{ij}(r) g_{ij}(r) r^2 dr \quad (174)$$

gdzie pierwsza suma reprezentuje wodę związaną na pojedynczych cząstkach a druga wodę zmagazynowaną w soczewkach binarnych. Wykorzystanie wzoru (174) do wyliczania wilgotności próbki glebowej wymaga ustalenia postaci radialnej funkcji rozkładu  $g_{ij}(r)$  oraz przebiegu funkcji objętości soczewek  $v_{ij}(r)$  w zależności od aktualnego podciśnienia wody w glebie. Wyznaczenie tych wielkości jest trudnym zadaniem obliczeniowym i pomiarowym, ich wykorzystanie nie daje więc wielkich korzyści praktycznych. W związku z tym, do praktycznych obliczeń zaproponowano i zastosowano uproszczoną formułę opartą na wskazówkach wynikających z dokładnych rachunków przedstawionych uprzednio.

Upraszczając, zaproponowano użycie radialnej funkcji rozkładu ośrodka ziarnistego i nieuporządkowanego jaka charakteryzuje zupełnie nieuporządkowany ośrodek. Wykres tej funkcji przedstawiono na Rys. 3 na stronie 28 (krzywa 2). Dla mieszaniny cząstek funkcja ta zdefiniowana jest w postaci:

$$\begin{aligned} g_{ij}(r) &= 0 && \text{dla } r < r_i + r_j \\ g_{ij}(r) &= 1 && \text{dla } r > r_i + r_j \end{aligned} \quad (175)$$

gdzie:  $r_i$  i  $r_j$  są promieniami cząstek w mieszaninie. Funkcja radialna we wzorze (175) jest szczególnym przypadkiem funkcji radialnej zdefiniowanej we wzorze (39) na stronie 27 i będzie użyta do dalszych obliczeń.

Dokładne wyrażenie (130) na str. 47 wynikające z rozwiązania równania na podstawie wzoru Laplace'a (41) jakie tu uzyskano dla objętości soczewek wodnych wymaga czasochłonnych obliczeń, nie jest zatem wygodne do praktycznych obliczeń. Wyniki obliczeń mikrokrzywych retencji wody dla cząstek o różnych średnicach (Rys. 18 na stronie 61) i wynikające z nich wnioski wykorzystano do zaproponowania praktycznego modelu do wyliczania wilgotności próbek glebowych o znanym uziarnieniu i zagęszczeniu. Istotną informacją jest wniosek wynikający z postaci wzoru (172) na str. 59, że forma wyrażająca objętość soczewki wodnej zależy jedynie od stosunku promieni cząstek stałych, pomiędzy którymi soczewka rezyduje i od odległości między nimi. Zależności objętości wody w soczewkach, pomiędzy cząstkami o różnych średnicach, od podciśnienia przedstawiono na rysunku 18 na stronie 61. Przebieg krzywych objętości w funkcji względnej krzywizny wskazuje na znaczny wzrost objętości wody w soczewce w miarę wzrostu stosunku promieni cząstek je tworzących. Ponadto z przebiegu krzywych na Rys. 25 (str. 65) wynika, że w miarę zmiany odległości pomiędzy cząstkami utrzymującymi soczewkę, objętość jej zmienia się o w przybliżeniu o stałą, niezależną od krzywizny (podciśnienia) wartość. Dodatkowo krzywe dla  $d > r_1 + r_2$  (Rys. 25) kończą się dla określonej wartości krzywizny na skutek niestabilności soczewek wodnych, które po osiągnięciu pewnego podciśnienia pękają.

Opierając się na powyższej dyskusji zaproponowano następującą, uproszczoną formę przebiegu mikrokrzywej retencji wody ( $v_{ij}$  we wzorze (174)) do użycia w modelu praktycznym:

$$v_{ij}(h, r, r_i, r_j) = \frac{4}{3} \pi r_{min}^3 \sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}} \left\{ \frac{1}{1 + |hr_{min}|} - \kappa \frac{r - r_i - r_j}{r_i + r_j} \right\} \quad (176)$$

gdzie:  $v_{ij}(h, r, r_i, r_j)$  zaproponowana, praktyczna forma mikrokrzywej retencji pomiędzy cząstkami o promieniach  $r_i$  oraz  $r_j$  położonymi w odległości  $r$  jedna od drugiej. Wartość podciśnienia  $\Delta p$  odpowiadającego krzywiznie  $h$  wyliczana jest zgodnie ze wzorem (165). Wielkości  $r_{min}$  oraz  $r_{max}$  są odpowiednio mniejszym i większym z promieni cząstek  $r_i$  i  $r_j$ . Jedyne parametry modelu jaki musi być określony numerycznie to parametr  $\kappa$  reprezentujący szybkość zmian objętości soczewki wodnej w miarę zmiany odległości cząstek stałych, pomiędzy którymi soczewka rezyduje. Wartość jego określono na podstawie zgodności krzywych wyliczonych ze zmierzonymi wartościami wilgotności. Ilość wody związana na pojedynczych cząstkach (pierwsza suma we wzorze (176)) musi być określona za pomocą niezależnych metod, jako że w rzeczywistości słabo zależy od uziarnienia próbki a silnie od jej składu mineralogicznego, a w szczególności od zawartości minerałów ilastych takich jak montmorylonit czy illit. Tutaj użyto metody wyliczania ilości wody zaadsorbowanej zgodnie z [86] opartej na współzależności wilgotności dla  $pF=4,2$ ,  $\theta_r$  z powierzchnią właściwą gleby  $S$  mierzoną za pomocą metody opartej na adsorpcji pary wodnej:

$$\theta_r = (0.00175S - 0.0174)\rho_b \quad (177)$$

Wykorzystanie formy  $v_{ij}$  ze wzoru (176) oraz radialnej funkcji rozkładu  $g_{ij}$  z równania (175) w równaniu (174) prowadzi do wyrażenia do wyliczania wilgotności pochodzącej od wody w soczewkach:

$$\Theta_s = 8/3\pi^2 \rho^2 \sum_{i,j=1}^K x_i x_j r_{min}^3 \sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}} \int_{r_i+r_j}^{r_{stab}(\kappa)} \left\{ \frac{1}{1 + |hr_{min}|} - \kappa \frac{r - r_i - r_j}{r_i + r_j} \right\} r^2 dr \quad (178)$$

gdzie wartość górnej granicy całkowania  $r_{stab}(\kappa)$  wyliczono jako odległość, przy której objętość soczewki we wzorze (176) przyjmuje wartość zero, czyli:

$$r_{stab}(\kappa) = (r_i + r_j) \left\{ 1 + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{1 + |hr_{min}|} \right\} \quad (179)$$

Wykorzystanie powyższej wartości umożliwi skalkowanie równania (178) dając w wyniku wyrażenie:

$$\Theta_s(h) = \frac{8\pi^2 \rho^2}{3} \sum_{i,j=1}^K x_i x_j r_{min}^3 \sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}} \left\{ \left( \frac{1}{1 + |hr_{min}|} + \kappa \right) \frac{r^3}{3} \Big|_{r_i+r_j}^{r_{stab}(\kappa)} - \frac{\kappa}{r_i + r_j} \frac{r^4}{4} \Big|_{r_i+r_j}^{r_{stab}(\kappa)} \right\} \quad (180)$$

Gleba w naturalnych warunkach nie osiąga pełnego nasycenia wodą prawie nigdy z powodu uwięzienia powietrza w większych porach. Ponadto obecność porów dużych powoduje szybki spadek wilgotności dla niewielkich podciśnień w pobliżu nasycenia. W praktyce dla większości próbek glebowych tu analizowanych spadek ten obserwowano już pomiędzy  $pF=0$  i  $pF=1$ . Na tej podstawie wyliczone wartości wilgotności przeskalowano o stały czynnik, tak by uzyskać zgodność wilgotności zmierzonej i wyliczonej w pobliżu nasycenia (tutaj użyto wilgotności zmierzonej  $\Theta^Z$  dla  $pF=1$ , ale wydaje się że wilgotność dla innego podciśnienia jest do zaakceptowania).

Ostatecznie do wyliczania wilgotności próbek glebowych zaproponowano wzór:

$$\Theta^O(h) = \theta_r + \frac{\Theta_s(h) - \Theta_s(h_{max})}{\Theta_s(h_{min}) - \Theta_s(h_{max})} \Theta^Z(h_{min}) \quad (181)$$

gdzie wartości krzywizny  $h_{min}$  i  $h_{max}$  wyznaczono odpowiednio dla potencjałów  $pF=1$  oraz  $pF=4,2$ .

Na podstawie tak uproszczonego, praktycznego modelu wykonano, obliczenia krzywych retencji wody używając uziarnienia, zagęszczenia oraz powierzchni właściwej jako danych wejściowych i porównano je z rzeczywistymi wartościami otrzymanymi metodą stacjonarną [86] dla zróżnicowanego materiału glebowego.

Przewidywania praktycznego modelu soczewek wodnych (wzór (180)) zachowują swój charakter, jak stwierdzono podczas obliczeń numerycznych, nawet poza założonym zakresem stosowalności ( $pF$  powyżej 3,0). Korzystając z tego, w sytuacji braku danych o powierzchni właściwej próbek glebowych można oprzeć się jedynie na wyliczeniach wilgotności z ilości wody zawartej w soczewkach binarnych. W tym celu zaproponowano następującą, prostszą niż wzór (181), formułę:

$$\Theta^O(h) = \frac{\Theta_s(h)}{\Theta_s(h_{min})} \Theta^Z(h_{min}) \quad (182)$$

która nie wymaga znajomości wilgotności związanej z wodą zaadsorbowaną  $\theta_r$ , nie wykorzystuje zatem danych o powierzchni właściwej zgodnie ze wzorem (177), kosztem pewnej utraty dokładności przewidywań.

Zgodność wilgotności wyliczonych  $\Theta^O$  za pomocą zaproponowanego modelu z wilgotnościami zmierzonymi  $\Theta^Z$  oceniono przy pomocy średniego błędu kwadratowego  $\sigma$  zdefiniowanego jako:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Theta_i^Z - \Theta_i^O)^2} \quad (183)$$

gdzie  $N$  jest całkowitą liczbą punktów pomiarowych  $\Theta_i^Z$  i wyliczonych  $\Theta_i^O$ . Obliczono również współczynnik korelacji  $R$  pomiędzy zmierzonymi i wyliczonymi

wartościami wilgotności jako:

$$R = \frac{N \sum_{i=1}^N \theta_i^z \theta_i^o - \sum_{i=1}^N \theta_i^z \sum_{i=1}^N \theta_i^o}{\sqrt{\left[ N \sum_{i=1}^N (\theta_i^z)^2 - (\sum_{i=1}^N \theta_i^z)^2 \right] \left[ N \sum_{i=1}^N (\theta_i^o)^2 - (\sum_{i=1}^N \theta_i^o)^2 \right]}} \quad (184)$$

## 9. DANE POMIAROWE DO WERYFIKACJI MODELU

Zestaw danych pomiarowych zawierających krzywe retencji wody próbek glebowych (tabela 4) zaczerpnięto z pracy [86]. Dane te uprzednio były analizowane m. in. pod kątem możliwości teoretycznego wyznaczania wartości wilgotności, ze znanych łatwo mierzalnych parametrów gleby, dla danych wartości pF przy użyciu metod statystycznych.

Materiał glebowy pobrano z 39 warstw 14 profili glebowych. Następujące jednostki systematyczne reprezentowane były w próbkach: bielcowe, brunatne, czarnoziemy, czarne ziemie i rędziny wytworzone ze zróżnicowanych granulometrycznie utworów – od piasków po gliny ciężkie. Próbkę pobierano z trzech głębokości: 0–30cm, 30–60cm i 60–90cm.

Po przesianiu w laboratorium powietrznie suchego materiału przez sito o średnicy oczek 1mm przeprowadzono następujące oznaczenia:

- oznaczono uziarnienie metodą Casagrande'a w modyfikacji Prószyńskiego,
- oznaczono zawartość próchnicy metodą Tiurina,
- oznaczono powierzchnię właściwą metodą adsorpcji pary wodnej zgodnie z metodą używaną w [11, 12] .

Charakterystykę materiału glebowego przedstawiono w tabeli 4.

Z materiału glebowego przygotowywano próbki o zróżnicowanym zagęszczeniu w standardowych cylindrach o pojemności  $100\text{cm}^3$  i wykonano oznaczenia wilgotności dla różnych pF. Łącznie wykonano oznaczenia na 390 próbkach. W procesie osuszania oznaczono wilgotności dla następujących wartości pF: 0, 1, 1,5, 1,6, 2, 2,2, 2,3, 2,7, 3,7, 4,2.

Użyto specjalnie zaprojektowanych płyt gipsowych oraz systemu regulacji podciśnienia [86]. Pomiaru dla pF 3,7 i 4,2 wykonano przy użyciu komór wysokociśnieniowych na próbkach o wysokości 1cm, wyłącznie dla jednego zagęszczenia.

Tab. 4. Zestaw danych próbek glebowych użytych do obliczeń zaczerpnięty z publikacji [86]

No	J.sys.	Gr. gran.	Uziarnienie % dla średnic [mm]							% Pr.	Pow. wl.	$\rho_b$
			<0,002	0,002- -0,006	0,006- -0,02	0,02- -0,05	0,05- -0,1	0,1- -0,5	0,5- -1,0			
1	Biel.	pgl	12	1	1	3	2	48	33	1,07	14,6	1,80
2	Biel.	ps	4	0	5	3	2	54	32	0,16	13,3	1,65
3	Biel.	pgm	4	0	12	5	5	53	21	0,12	8,1	1,67
4	Biel.	pli	12	9	25	46	7	1	0	2,11	65,5	1,43
5	Biel.	glp	12	6	12	22	8	32	8	0,10	27,0	1,68
6	Biel.	glp	16	2	12	28	10	26	6	0,02	34,7	1,55
7	Biel.	glp	11	2	15	25	7	31	9	1,68	25,3	1,48
8	Biel.	gsp	16	10	13	24	8	23	6	0,29	35,1	1,48
9	Biel.	pli	11	6	26	36	13	6	2	0,20	27,7	1,27
10	Biel.	glp	8	4	14	25	12	31	6	2,43	34,3	1,39
11	Biel.	glp	12	4	11	20	11	33	9	0,04	19,3	1,78
12	Biel.	glp	8	5	9	19	12	38	9	1,08	21,4	1,70
13	Biel.	pgl	4	2	5	9	10	47	23	1,03	16,7	1,61
14	Biel.	ps	3	1	6	11	9	60	10	0,23	13,3	1,80
15	Biel.	glp	8	9	12	26	14	23	8	0,08	24,0	1,64
16	B.W.	pli	14	7	27	39	8	3	2	1,88	48,4	1,45
17	B.W.	ip	23	12	23	30	4	6	2	0,42	73,7	1,45
18	B.W.	pli	14	7	26	33	12	7	1	0,00	41,0	1,28
19	B.W.	ip	38	7	19	25	7	3	1	2,30	113,1	1,26
20	B.W.	pgl	8	3	4	3	2	52	28	1,71	15,4	1,80
21	B.W.	pgm	9	1	10	11	8	46	15	0,34	12,4	1,80
22	B.W.	pgm	8	5	4	10	5	60	8	0,13	18,8	1,88
23	B.Wl.	pli	10	6	28	43	9	3	1	2,11	44,1	1,34
24	B.Wl.	plg	10	6	19	50	13	2	0	0,84	34,3	1,37
25	B.Wl.	pli	10	7	20	47	11	4	1	0,46	45,8	1,51
26	C.z.w.	gp	12	3	10	16	7	33	19	2,03	30,8	1,46
27	C.z.w.	glp	17	2	10	21	7	34	9	1,99	24,0	1,66
28	C.z.w.	pgl	7	1	5	5	6	48	28	2,52	15,0	1,78
29	C.z.w.	pli	13	6	21	37	17	4	2	3,30	53,0	1,38
30	C.z.w.	pgl	5	2	4	8	4	60	17	2,75	21,4	1,65
31	C.z.w.	ps	4	2	3	6	8	66	11	0,38	17,6	1,57
32	C.z.w.	ps	3	0	5	5	3	66	18	2,32	36,4	1,47
33	C.z.w.	pl	2	0	2	3	4	72	17	0,19	9,4	1,58
34	Cz.	pli	13	9	24	45	7	2	0	3,36	76,2	1,29
35	Cz.	pli	11	8	24	47	8	2	0	2,08	71,5	1,30
36	Cz.	pli	11	11	20	43	10	3	2	1,90	66,5	1,35
37	Ręd.	pli	10	4	28	44	10	3	1	1,50	42,8	1,33
38	Ręd.	pli	18	9	16	44	8	3	2	0,38	73,7	1,33
39	Ręd.	gcp	34	8	20	19	6	9	4	0,21	143,5	1,07

W tabeli 4 użyto następujących skrótów:

J. sys. - jednostka systematyczna, Gr. gran. - grupa granulometryczna, Uziarnienie - procentowa zawartość masy poszczególnych frakcji w glebie, Pow. wl. - powierzchnia właściwa, % Pr. - procentowa zawartość próchnicy,  $\rho_b$  - zagęszczenie w  $g/cm^3$ ,

Biel. - bielkowa, B. W. - brunatna wylugowana, B. Wl. - brunatna właściwa, C.z.w. - czarna ziemia właściwa, Cz. - czarnoziem, Ręd. - rędzina,

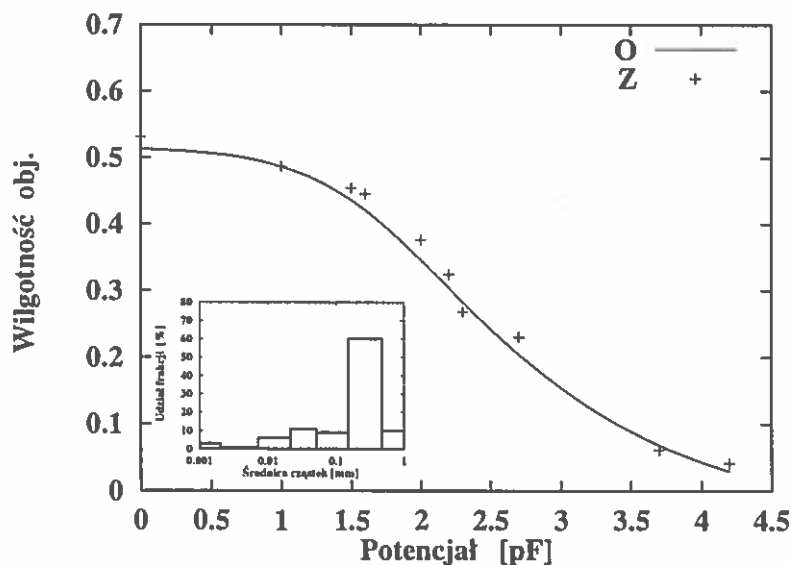
pl - piasek luźny, ps - piasek słabo gliniasty, pgl - piasek gliniasty lekki, pgm - piasek gliniasty mocny, gp - glina piaszczysta, glp - glina lekka pylasta, gsp - glina średnia pylasta, gcp - glina ciężka pylasta, plg - pyl gliniasty, pli - pyl ilasty, ip - il pylasty.

## 10. PORÓWNANIE WYNIKÓW OBLICZEŃ Z DANYMI POMIAROWYMI

W niniejszym rozdziale przedstawiono porównanie zmierzonych wartości wilgotności z wyliczonymi krzywymi retencji wodnej dla próbek gleb ze zbioru danych zaczerpniętego z [86]. Obliczenia wykonane zostały zgodnie z zaproponowanym modelem praktycznym (wzór (181)). Parametr modelu  $\kappa$  dobrano tak by uzyskać najlepszą zgodność modelu z danymi doświadczalnymi mierzoną standardowym odchyleniem  $\sigma$ . Dobrana wartość parametru wynosi  $\kappa = 18.7$ .

Dyskusję przeprowadzono ustawiając wyniki w kolejności wyznaczonej spadkiem ilości frakcji grubych w przykładowych glebach począwszy od piasków słabo gliniastych, nie biorąc pod uwagę innych ich charakterystyk takich jak powierzchnia właściwa czy zawartość próchnicy.

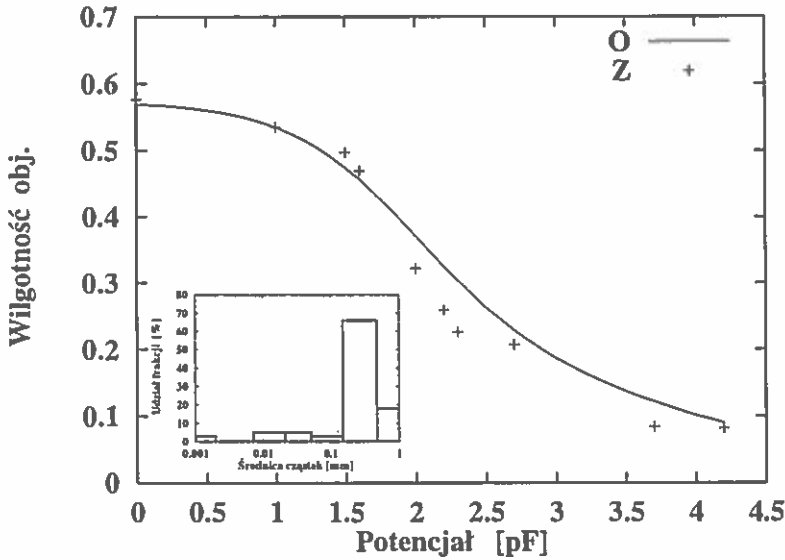
Na rysunkach 26–27 przedstawiono wyliczone i zmierzone krzywe retencji wody dla jednych z najbliższych utworów w zestawie danych. Krzywe retencji charakteryzują się szybkim spadkiem. Dla próbek przedstawionych na rysunkach 26 oraz 27 uzyskano zadowalającą zgodność wartości obliczonych ze zmierzonymi.



Rys. 26. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 14 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek słabo gliniasty (ps), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

Wyniki obliczeń próbek glebowych sklasyfikowanych jako piasek gliniasty lekki przedstawiono na rys. 28–30.

Zmierzone i wyliczone wartości wilgotności wykazują dobrą zgodność. Zmie-



Rys. 27. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 32 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek słabo gliniasty (ps), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbek przedstawiono na wykresie

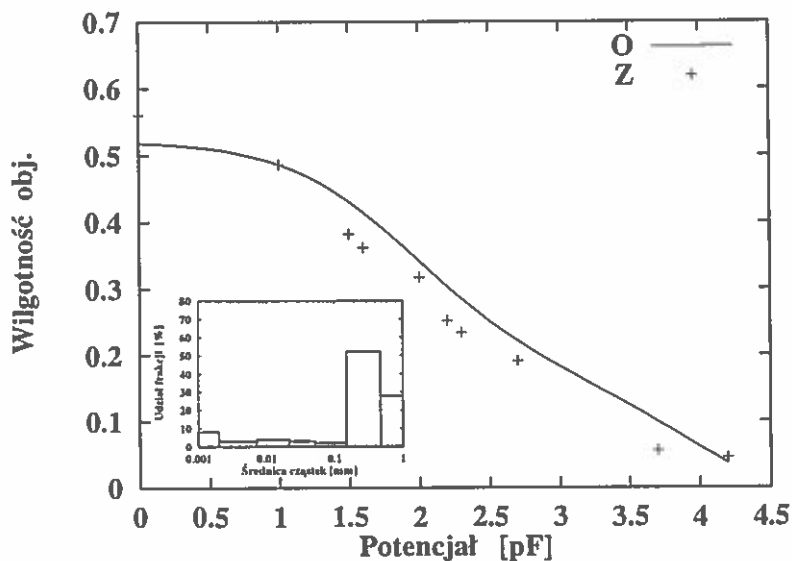
rzne krzywe retencji charakteryzują się wyższymi wilgotnościami dla potencjałów w zakresie  $pF=1,5$  do  $pF=2,7$  niż te na rysunkach 26–27 dla próbek gleb lżejszych. Obliczone krzywe poprawnie oddają wolniejszy spadek wilgotności w miarę wzrostu podciśnienia (wzrostu pF). Jest to spowodowane obecnością drobniejszych frakcji w omawianych próbkach.

Na rysunkach 31 oraz 32 przedstawiono wyniki obliczeń oraz dane pomiarowe dla próbek gleb sklasyfikowanych jako piasek gliniasty mocny (pgm). Pomimo różnic w uziarnieniu jakie obserwuje się szczególnie w zawartości frakcji najgrubszych (0,1–0,5mm i 0,5–1,0mm) obie obliczone krzywe wykazują zbliżony charakter przy dobrej zgodności z wartościami wyliczonymi.

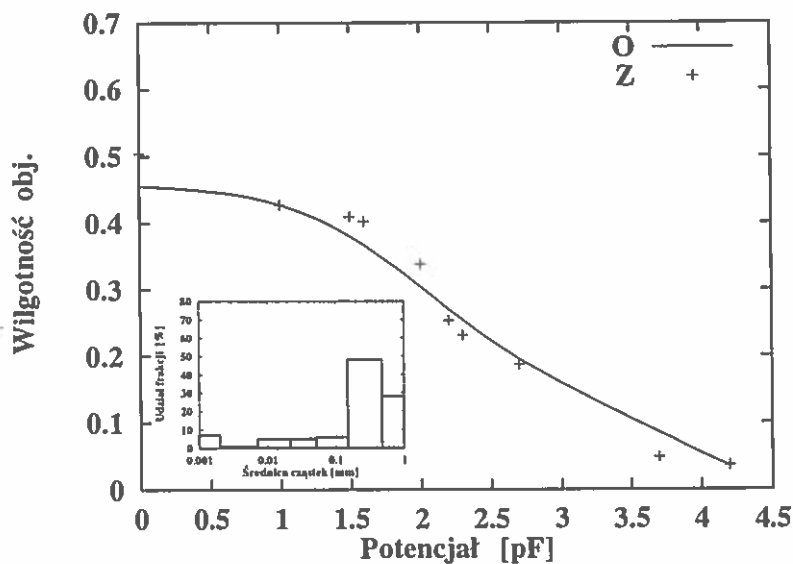
Na rysunku 33 przedstawiono wyniki dla próbki scharakteryzowanej jako glina piaszczysta, a na rysunkach 34–35 próbki scharakteryzowane jako glina lekka pylasta. Wyliczone wartości wilgotności charakteryzują się dobrą zgodnością z doświadczalnymi dla wszystkich trzech próbek. Krzywe retencji wykazują mniejszy spadek w zakresie podciśnień od  $pF=1,5$  do  $pF=2,7$  niż te przedstawione na poprzednich rysunkach dla próbek lżejszych gleb.

Wyliczone i zmierzone charakterystyki próbek gleb zaklasyfikowanych do grupy glina lekka pylasta jakie umieszczono w tabeli 4 charakteryzują się bez wyjątku dobrą zgodnością ze sobą. Przykładowe rysunki 34–35 zdają sprawę z przebiegu krzywych retencji, pominięto zatem wyniki dla pozostałych próbek z tej grupy granulometrycznej.

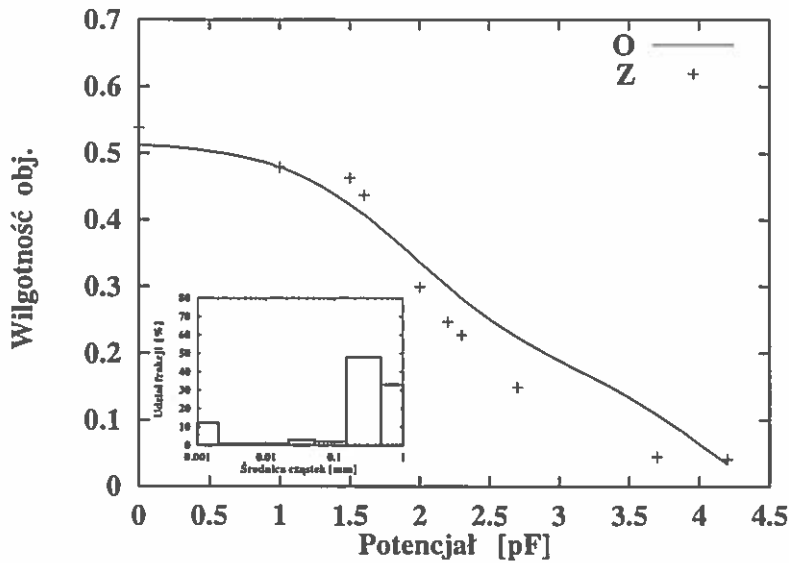




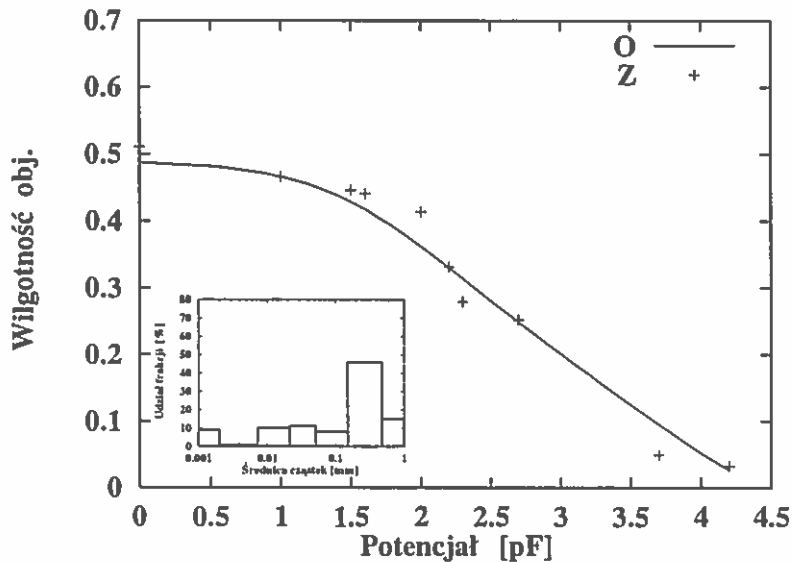
Rys. 28. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 20 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek gliniasty lekki (pgl), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



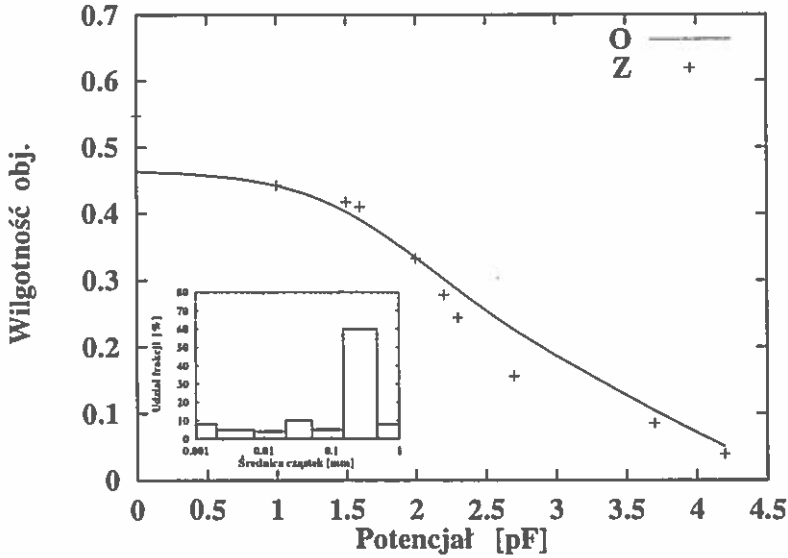
Rys. 29. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 28 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek gliniasty lekki (pgl), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



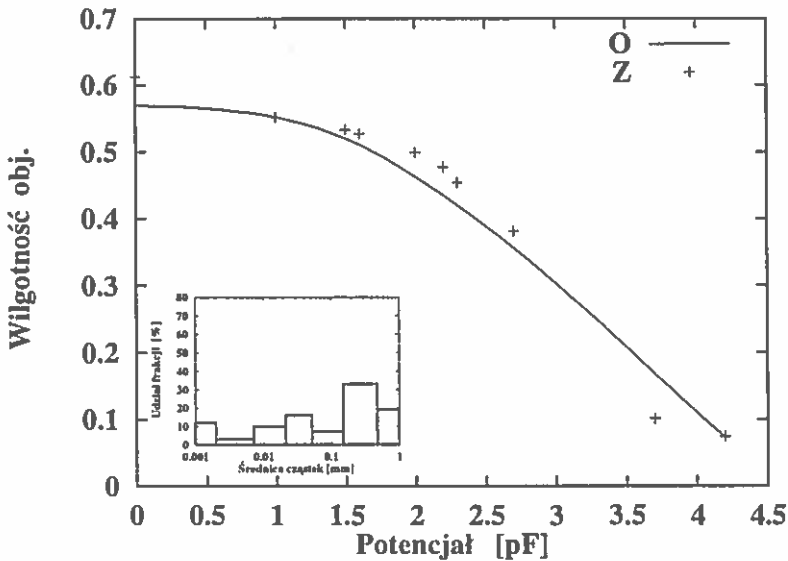
Rys. 30. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 1 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek gliniasty lekki (pgl), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



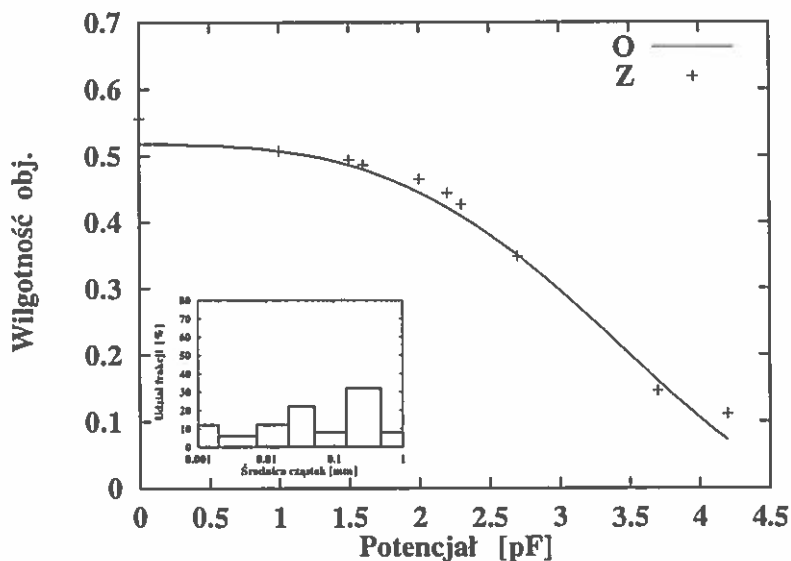
Rys. 31. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 21 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek gliniasty mocny (pgm), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



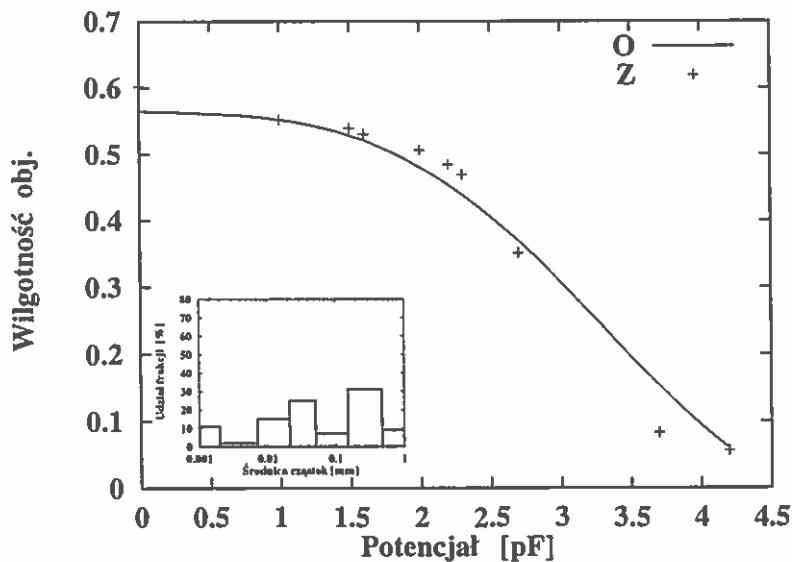
Rys. 32. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 22 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek gliniasty mocny (pgm), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



Rys. 33. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 26 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako glina piaszczysta (gp), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

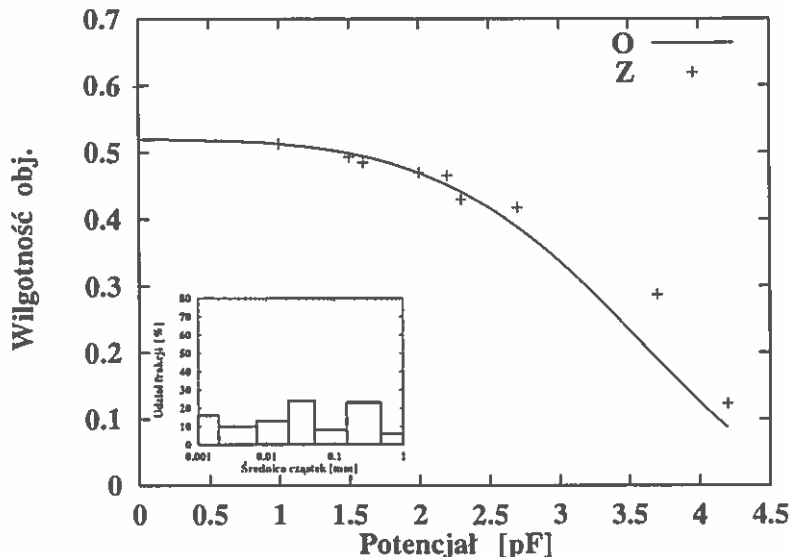


Rys. 34. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 5 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako glina lekka pylasta (glp), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



Rys. 35. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 7 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako glina lekka pylasta (glp), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

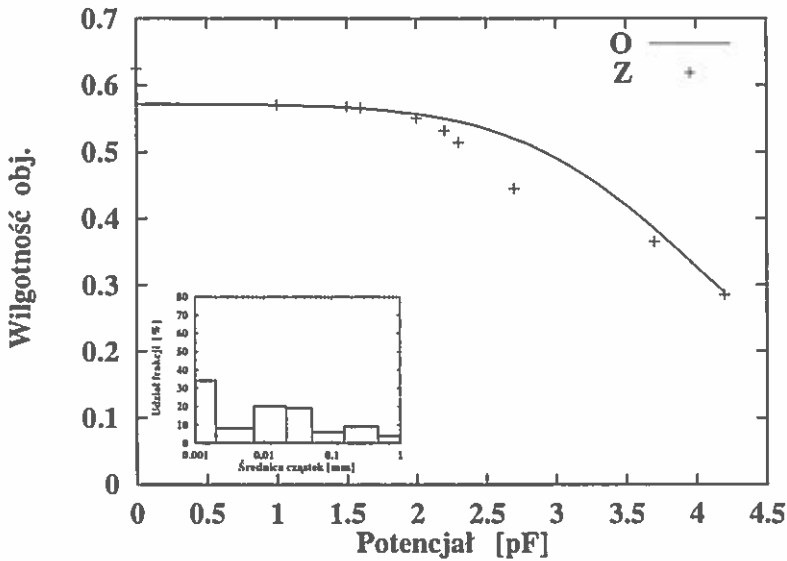
Na rysunkach 36 i 37 przedstawiono wyniki modelowania oraz pomiarów dla próbek zaklasyfikowanych jako glina średnia pylasta (gsp) oraz glina ciężka pylasta (gcp). Druga próbka charakteryzuje się znacznie większą zawartością cząstek o średnicy  $< 0,002\text{mm}$  co zmienia jej właściwości retencyjne. Przede wszystkim krzywa z Rys. 37 charakteryzuje się generalnie wyższymi wartościami wilgotności niż krzywa z Rys. 36. Powoduje to, że pomimo mniej więcej jednakowego nachylenia obu krzywych, wilgotność dla potencjału  $pF=4,2$  jest wyraźnie większa dla próbki gliny ciężkiej pylastej (Rys. 37) niż dla próbki gliny średniej pylastej (Rys. 36). Wartości wyliczone podążają za zmianą jednakże nie dorównują jej, pomimo dobrej zgodności w pozostałym zakresie.



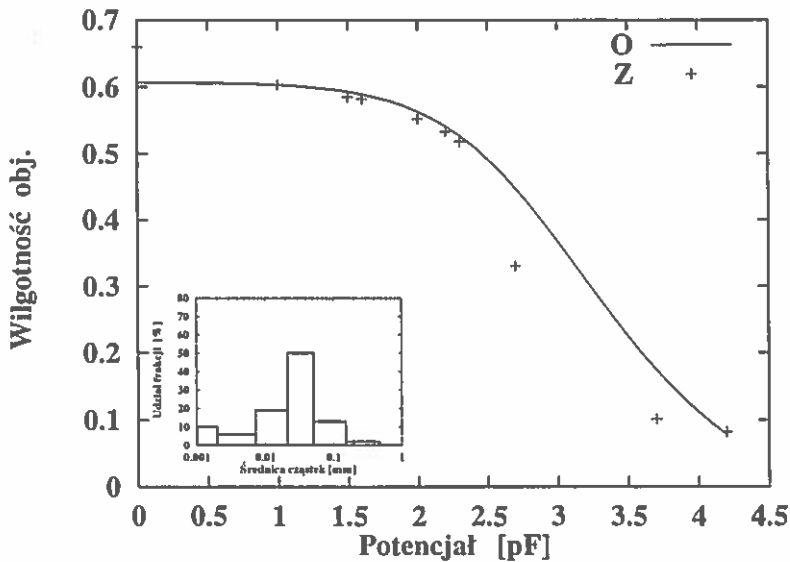
Rys. 36. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej  $pF$  dla gleby nr 8 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako glina średnia pylasta (gsp), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

Krzywe retencji wody utworów pyłowych, pyłu gliniastego (plg) reprezentowanego przez próbkę gleby nr 24 w tabeli 4 oraz pyłu ilastego (pli) reprezentowanego przez próbki: 4, 9, 16, 18, 25, 29, 34–38, są poprawnie modelowane przez zaproponowany model. Przykładowo przedstawiono porównanie zmierzonych wilgotności z wyliczonymi na rysunkach: Rys. 38 – pyłu gliniastego, oraz Rys. 39 pyłu ilastego. Pomimo różnic w uziarnieniu, zarówno wartości wilgotności zmierzone doświadczalnie jak i wyliczone zgodnie z zaproponowanym modelem nie różnią się zbyt wiele. Dobra zgodność modelu z danymi eksperymentalnymi jest charakterystyczna dla wszystkich próbek zaklasyfikowanych jako pył ilasty w tabeli 4 na stronie 70.

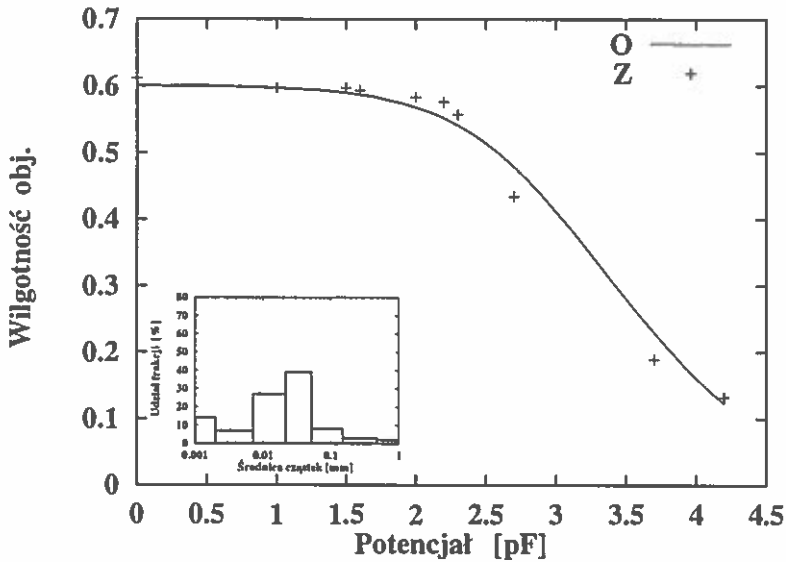
Przykładowe wyniki dla próbek zaklasyfikowanych do grupy granulometrycznej il pylasty (ip) przedstawiono na rysunkach 40 oraz 41. Obydwie próbki charakte-



Rys. 37. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 39 w tabeli 4 sklasyfikowanej jako glina ciężka pylasta (gcp), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



Rys. 38. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 24 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako pył gliniasty (plg), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

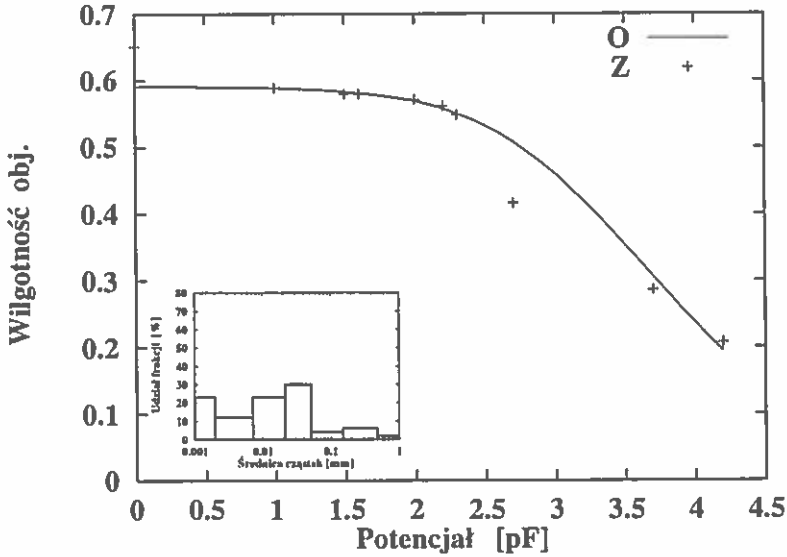


Rys. 39. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 16 w tabeli 4 sklasyfikowanej jako pył ilasty (pli), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

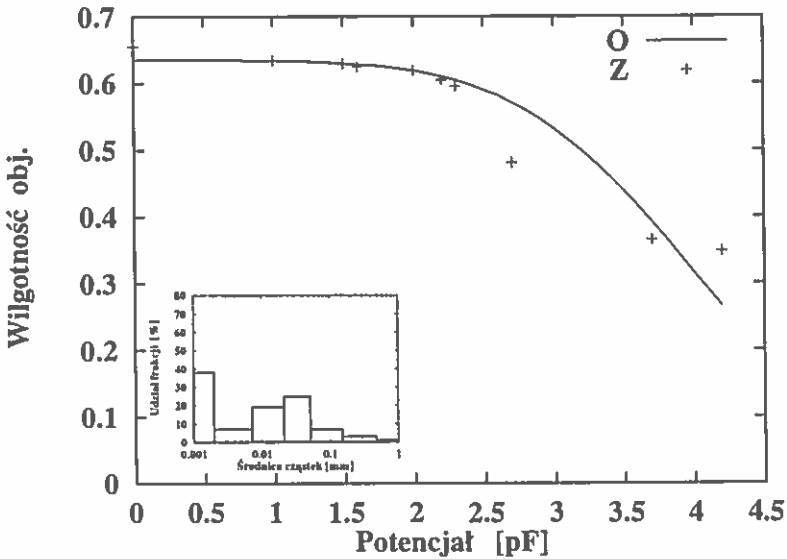
ryzują się znaczną zawartością cząstek o średnicy poniżej 0,002mm (23% i 38%). Obydwie próbki charakteryzują się podobnym przebiegiem krzywych retencji. Podstawowa różnica polega na tym, że krzywa retencji próbki o większej zawartości najdrobniejszej frakcji (Rys. 41) przebiega powyżej krzywej próbki o mniejszej zawartości najdrobniejszej frakcji (Rys. 40). Wyliczone krzywe dobrze zgadzają się z wartościami zmierzonymi za wyjątkiem punktu dla potencjału  $pF=4,2$ . Obie charakterystyki cechuje poziomy przebieg prawie aż do potencjału  $pF=2,0$ , po przekroczeniu którego następuje spadek wilgotności. Własność ta spowodowana jest wysoką zawartością drobnych frakcji w próbkach.

Najgorszą zgodność wyliczonych wilgotności ze zmierzonymi zaobserwowano dla próbek o numerach 33 i 31 przedstawionych na Rys. 42 i 43. Interesująca jest rozbieżność w zachowaniu zmierzonych charakterystyk gleb z rysunków 43 i 26. Pomimo nieznacznych różnic w uziarnieniu pomiędzy obu próbkami, zmierzone charakterystyki różnią się wyraźnie w zakresie potencjałów od  $pF=1,5$  do  $pF=2,7$ . Sugeruje to występowanie innego czynnika niż uziarnienie i zagęszczenie, który różnicuje zachowanie się obu próbek. Krzywe wyliczone nie podążają za tym zróżnicowaniem jako że model wykorzystuje jedynie informację o uziarnieniu próbek.

Na rysunkach 44–49 przedstawiono porównanie zmierzonych wartości wilgotności w funkcji podciśnienia z wyliczonymi krzywymi zgodnie z zaproponowanym modelem. Rysunki te zawierają dane próbek glebowych należących do jednakowych grup granulometrycznych.

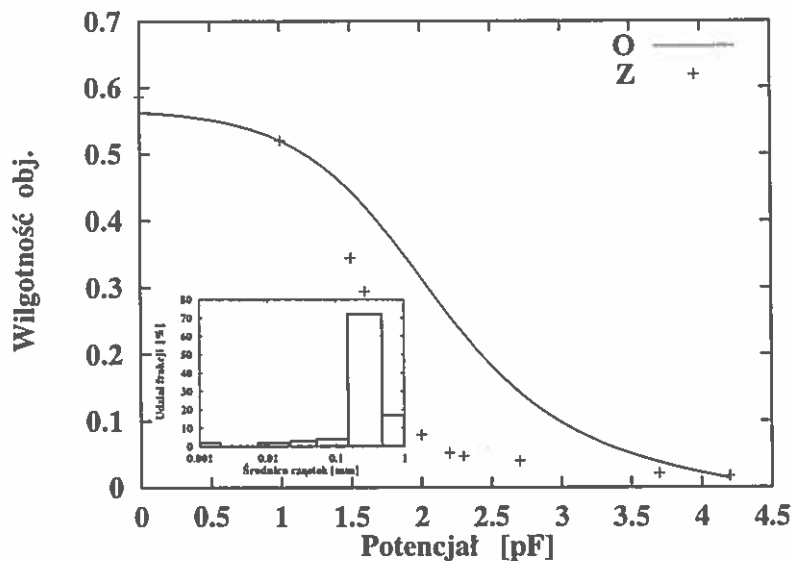


Rys. 40. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 17 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako il pylasty (ip), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

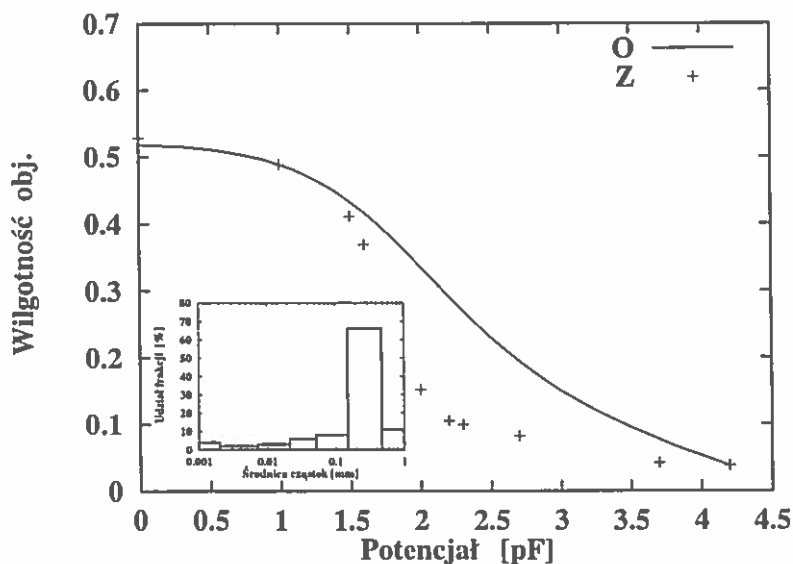


Rys. 41. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 19 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako il pylasty (ip), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie

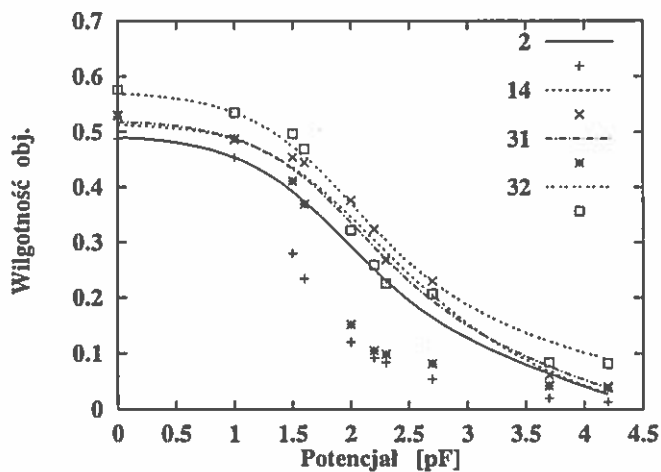




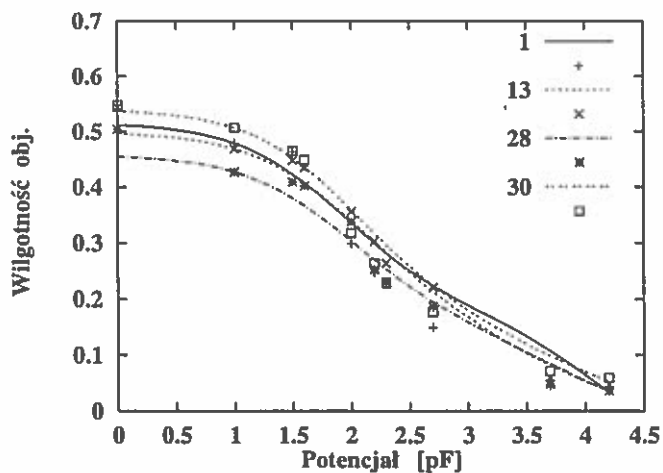
Rys. 42. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 33 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek luźny (pl), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



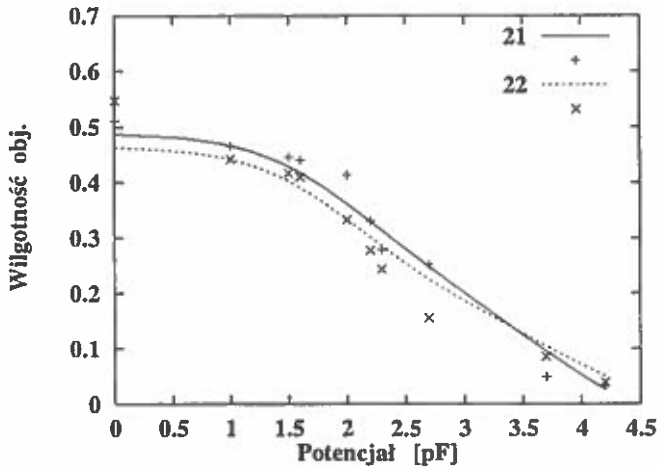
Rys. 43. Porównanie zmierzonej (punkty) i wyliczonej (linia) krzywej pF dla gleby nr 31 w tabeli 4, sklasyfikowanej jako piasek słabo gliniasty (ps), uziarnienie (rozkład granulometryczny) próbki przedstawiono na wykresie



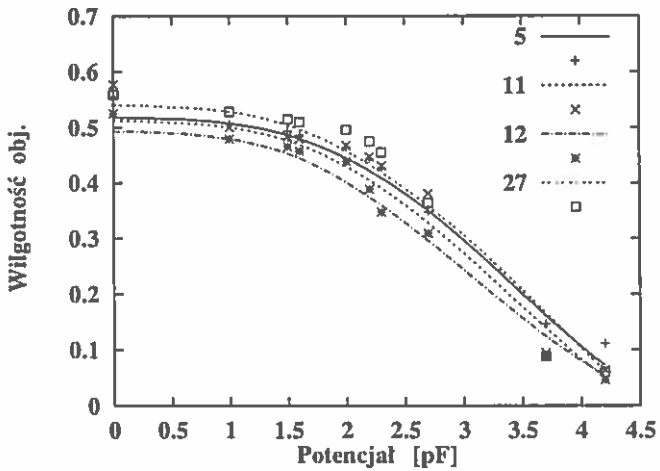
Rys. 44. Zmierzone i wyliczone krzywe retencji wody próbek gleb nr 2, 14, 31 i 32 należących do grupy granulometrycznej piasek słabo gliniasty



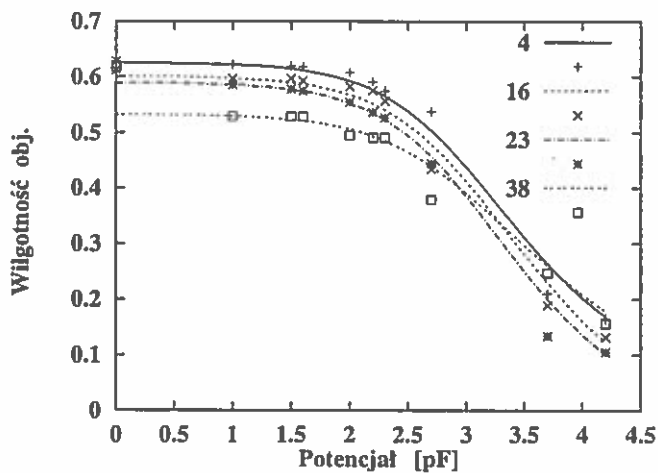
Rys. 45. Zmierzone i wyliczone krzywe retencji wody dla próbek gleb nr 1, 13, 28 i 30 należących do grupy granulometrycznej piasek gliniasty lekki



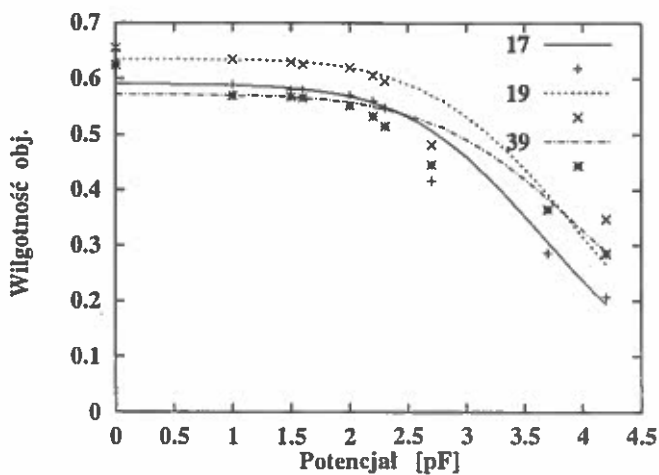
Rys. 46. Zmierzone i wyliczone krzywe retencji wody dla próbek gleb nr 21 i 22 należących do grupy granulometrycznej piasek gliniasty mocny



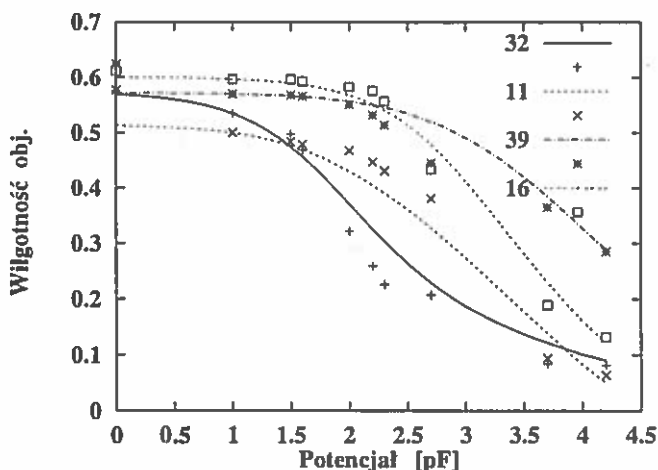
Rys. 47. Zmierzone i wyliczone krzywe retencji wody dla próbek gleb nr 5, 11, 12 i 27 należących do grupy granulometrycznej glina piaszczysta



Rys. 48. Zmierzone i wyliczone krzywe retencji wody dla próbek gleb nr 4, 16, 23 i 38 należących do grupy granulometrycznej pył ilasty



Rys. 49. Zmierzone i wyliczone krzywe retencji wody dla próbek gleb nr 17, 19 należących do grupy granulometrycznej il pylasty oraz nr 39 należącej do grupy granulometrycznej glina ciężka pylasta

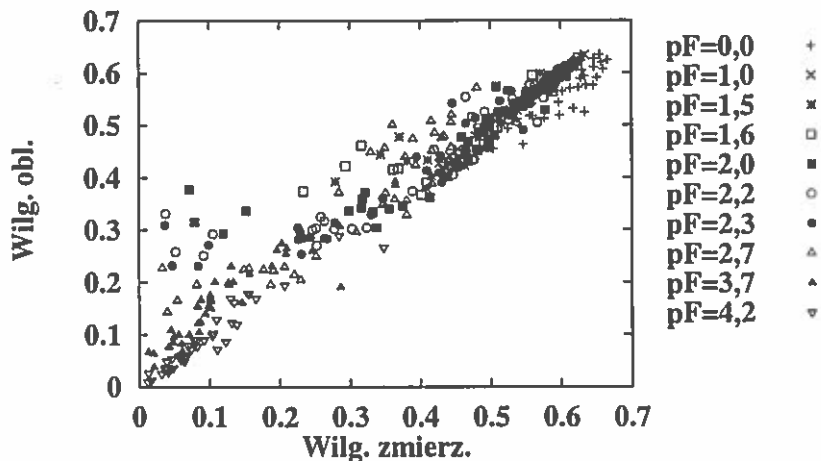


Rys. 50. Zmierzone i wyliczone krzywe pF dla gleb należących do różnych grup granulometrycznych

Na rysunku 50 przedstawiono zestaw krzywych i punkty pomiarowe próbek glebowych należących do różnych grup granulometrycznych. Próbka nr 32 – piasek słabo gliniasty, nr 11 – glina lekka piaszczysta (glp), nr 39 – glina ciężka pylasta, nr 16 – pył ilasty (pli). Wyliczone krzywe retencji w miarę zmiany uziarnienia próbek glebowych zmieniają swój charakter ze stromej szybko malejącej krzywej retencji piasku nr 32 poprzez pośrednią krzywą próbki nr 11 (głina lekka piaszczysta) do krzywych próbek gleb ciężkich, które utrzymują wodę prawie bez zmian od nasycenia aż do potencjału  $pF=2,7$  i powyżej (próbki gleb nr 39 i 16 – gliny ciężkiej pylastej i pyłu ilastego).

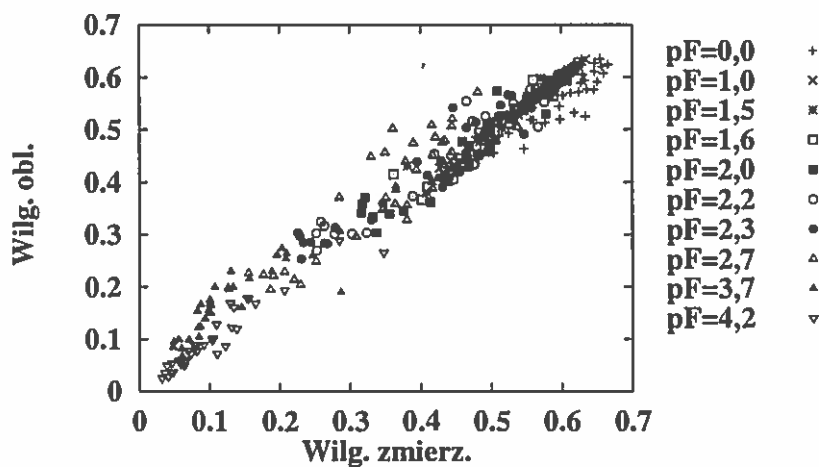
Na rysunkach 51 i 52 przedstawiono porównanie zmierzonych i wyliczonych wartości wilgotności objętościowej niezależnie od potencjału. Rysunek 51 przedstawia wyniki wszystkich bez wyjątku danych ze zbioru danych w tablicy 4 na str. 70. Uzyskano niski błąd przewidywania (średni błąd kwadratowy  $\sigma$ ) wynoszący ok. 5,5% wilgotności objętościowej przy wysokim współczynniku korelacji  $R = 0,9981$ . Ponieważ wyliczenia dla czterech próbek wyraźnie odbiegają dokładnością od pozostałych odrzucono je i wykonano obliczenia ponownie dla 35 próbek. Wyniki przedstawiono na Rys. 52. Osiągnięty średni błąd kwadratowy jeszcze bardziej zmalał i wynosi  $\sigma = 0,0359$  a więc poniżej 4% wilgotności objętościowej. Przyczynę niedokładności upatruje się w czynniku nie objętym danymi wykorzystanymi w modelu.

Na rysunku 53 przedstawiono porównanie zmierzonych i wyliczonych wartości wilgotności objętościowej niezależnie od potencjału. Do obliczeń wykorzystano uproszczoną metodę, w której zbędna jest informacja o powierzchni właściwej ba-

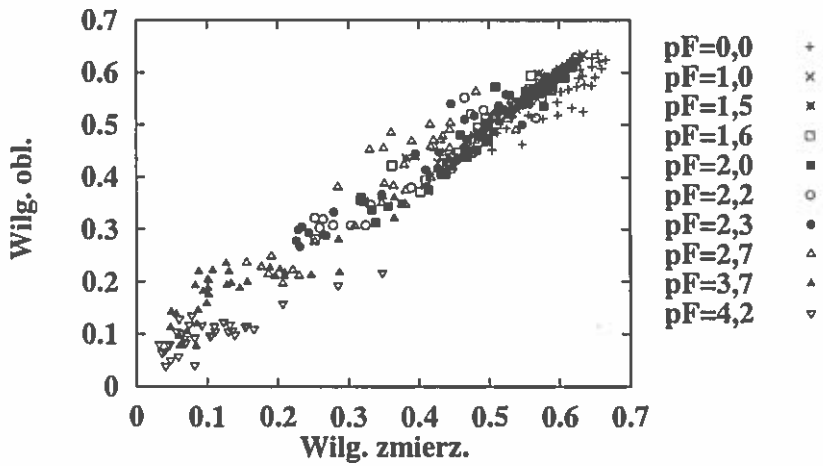


Rys. 51. Porównanie wartości wilgotności obliczonych, zgodnie z modelem (wzór (181)), z wartościami zmierzonymi 39 próbek glebowych, dla wszystkich zmierzonych wartości potencjału (390 punktów). Współczynnik korelacji wyliczony dla punktów na rysunku  $R=0,9981$ , średni błąd kwadratowy  $\sigma=0,055$ .

danej próbki (wzór (182)). Pomimo dodatkowego uproszczenia modelu w stosunku do modelu opisanego wzorem (181), uzyskano niski błąd przewidywania (średni błąd kwadratowy  $\sigma$ ) wynoszący ok. 3.9% wilgotności objętościowej przy wysokim współczynniku korelacji  $R = 0.9966$ .



Rys. 52. Porównanie wartości wilgotności obliczonych, zgodnie z modelem (wzór (181)), z wartościami zmierzonymi 35 próbek glebowych, po odrzuceniu czterech próbek o numerach 2, 3, 31 i 33, których modelowane krzywe wyraźnie odbiegają od zmierzonych, dla wszystkich zmierzonych wartości potencjału (350 punktów). Współczynnik korelacji wyliczony dla punktów na rysunku  $R=0,9981$ , średni błąd kwadratowy  $\sigma=0,0359$  tj. 3,59% wilgotności objętościowej



Rys. 53. Porównanie wartości wilgotności obliczonych, zgodnie z modelem uproszczonym, bez wykorzystania powierzchni właściwej próbek glebowych (wzór (182)), z wartościami zmierzonymi 35 próbek glebowych, po odrzuceniu czterech próbek o numerach 2, 3, 31 i 33, których modelowane krzywe wyraźnie odbiegają od zmierzonych, dla wszystkich zmierzonych wartości potencjału (350 punktów). Współczynnik korelacji wyliczony dla punktów na rysunku  $R=0,9966$ , średni błąd kwadratowy  $\sigma=0,0391$ .



## 11. PODSUMOWANIE

Poznanie i opis teoretyczny struktury fazy stałej w glebie jest kluczem do zrozumienia wzajemnych oddziaływań poszczególnych składników gleby: cząstek stałych, wody glebowej, oraz powietrza glebowego i ich roli w kształtowaniu produktywności gleby.

W pracy zaproponowano model do opisu struktury nieuporządkowanego ośrodka ziarnistego, jakim jest gleba, i wyliczania objętościowych wartości średnich wielkości fizycznych na podstawie teorii ośrodków nieuporządkowanych, z ich opisu w mikroskali.

Zaproponowanie fizycznego modelu opisu fazy stałej gleby oraz zjawiska kapilarnego wiązania wody związane było z uproszczeniem badanego obiektu i jego idealizacją. Gleba, która jest obiektem zmiennym i biologicznie aktywnym potraktowana została w sposób uproszczony jako mieszanina twardych zwilżalnych przez wodę cząstek o kształcie kulistym i różnych średnicach.

Uproszczenia te umożliwiły zastosowanie modeli fizycznych do opisu stanu ośrodka glebowego, wyciągnięcie wniosków o własnościach mikroskopowych gleby i wyliczenie wartości oczekiwanych (średnich) wilgotności odpowiadających konkretnym wartościom energii wiązania wody.

Zaproponowany model, z założenia, może być stosowany w ograniczonym zakresie energii wiązania wody. Ze względu na traktowanie poszczególnych soczewek wodnych jako osobnych tworów należy liczyć się z gorszą zgodnością modelu z danymi pomiarowymi w pobliżu nasycenia, gdzie w warunkach rzeczywistych następuje zlewianie się soczewek w większe skupiska wody. Z drugiej strony zakresu energii wiązania – dla wysokich podciśnień – zalamuje się obraz fizyczny oparty na ocenie energii wiązania wody za pomocą podciśnienia równoważnego. W takiej sytuacji model soczewek wodnych przestaje obowiązywać z powodu uwzględnienia w nim jedynie sił napięcia powierzchniowego wody przy pominięciu adsorpcyjnego wiązania wody z fazą stałą. Częściowo uwzględniono te efekty wprowadzając wodę związaną przez pojedyncze cząstki. Ma to szczególne znaczenie dla pF powyżej 3,0. Pomiędzy wymienionymi ograniczeniami znajduje się zakres energii wiązania określający wodę dostępną dla roślin. Model został zaprojektowany tak by w tym zakresie umożliwić wyliczanie krzywych retencji wody w materiale glebowym.

W zaproponowanym modelu wyróżnić można dwie części ze względu na odmienne traktowanie ośrodka glebowego.

Pierwsza część modelu wykorzystuje podejście statystyczne aby wychodząc z opisu struktury (rozłożenia przestrzennego) fazy stałej w mikroskali przejść do modelu uśrednionych właściwości próbek w skali makro. Przejście to związane jest ze zmianą sposobu patrzenia na ośrodek ziarnisty ze statystycznego w mikroskali na deterministyczny w skali makro, oraz z ziarnistego w skali mikro do jednorodnego w skali makro.

Zastosowanie teorii funkcji radialnych umożliwia podkreślenie i zrozumienie niektórych ważnych aspektów zjawisk obserwowanych doświadczalnie. Mowa tu na przykład o wyróżnionych co najmniej dwu sposobach wiązania wody: na poje-

dynczych cząstkach woda zaadsorbowana jest na zwilżonych powierzchniach ziaren stałych i na parach cząstek woda zmagazynowana jest w soczewkach wodnych. Zastosowanie formalizmu radialnych funkcji rozkładu w naturalny sposób ukazuje rzeczywisty mechanizm wiązania wody w ośrodku ziarnistym w zakresie pośrednich podciśnień.

Druga część modelu opiera się na deterministycznym, mikroskopowym obrazie soczewek wody pomiędzy ziarnami fazy stałej w glebie. Rozwiązanie równania opisującego równowagowy kształt powierzchni wody prowadzi do opisu soczewek wodnych jakie tworzą się pomiędzy kulistymi cząstkami stałymi. Wyliczenie kształtu, objętości, powierzchni oraz siły z jaką soczewka przyciąga cząstki stałe umożliwia zbudowanie modelu wiązania wody w mikroskali. Wyniki w formie mikrokrzywych retencji wody stanowią podstawę do późniejszego wyliczenia krzywych retencji wody makroskopowych próbek gleb.

Model wiązania wody w mikroskali kładzie szczególny nacisk na wiązanie wody w soczewkach utworzonych pomiędzy dwoma cząstkami stałymi. W warunkach nienasylenia, gdy cząstki stałe są zwilżane, następuje spadek ciśnienia wody na skutek minimalizacji powierzchni granicznej wody i powietrza a maksymalizacji powierzchni granicznej wody i fazy stałej. W takich warunkach dużą część powierzchni ograniczającej wodę stanowi blonka wodna na granicy powietrze – woda utrzymywana w równowadze, pomimo panującej różnicy ciśnień, poprzez siły napięcia powierzchniowego. Wydaje się, że dwucząstkowe soczewki wodne w dobrym przybliżeniu oddają pojęcia "pory" lub "kapilary glebowe" jakie zwykle używane są do opisu właściwości gleby. Pomocnicze pojęcie średnic równoważnych może być wprowadzone na podstawie średnic cząstek stałych, z nimi związana jest objętość wody magazynowanej w soczewkach. Obliczenia przeprowadzone dla różnych średnic cząstek stałych wykazują, że małe cząstki zdolne są zgromadzić dużą objętość wody w soczewkach utworzonych z cząstkami o większej średnicy. Zjawisko to jest obserwowane w w rzeczywistości jako znaczne polepszenie własności retencyjnych gleb lekkich na skutek zastosowania dodatku materiału drobnoziarnistego.

Wykorzystanie wniosków wynikających z opisanej teorii soczewek wodnych do uśredniania objętościowego umożliwia konstrukcję uproszczonego modelu wiązania wody i wyliczenie krzywych retencji wody z uziarnienia i zagęszczenia gleby. Model taki korzystać może z łatwo dostępnych danych glebowych.

W zaproponowanym modelu wykorzystano mikroskopowy – statystyczny opis fazy stałej i mikroskopowy – deterministyczny opis wiązania wody do wyliczania właściwości próbek o makroskopowych wymiarach.

Właściwości wodne próbek gleby wynikają, w świetle zaproponowanego modelu, z mechanizmu wiązania wody w skali wyznaczonej rozmiarami pojedynczych ziaren stałych, który w przybliżeniu opisany jest modelem soczewek wodnych utworzonych pomiędzy cząstkami stałymi o idealnym, kulistym kształcie.

Radialne funkcje rozkładu użyte do obliczeń są tworam teoretycznymi wylicznymi dla mieszanin cząstek kulistych. Dobrą zgodność modelu z danymi pomiarowymi można przypuszczalnie przypisać poprawnemu, fizycznemu modelowi struk-

tury fazy stałej gleby i wiązania w niej wody. Dalszy rozwój modelu może wymagać zapewnienia zmierzonych radialnych funkcji rozkładu jako danych wejściowych.

## 12. WNIOSKI

Z przeprowadzonych badań i obliczeń można wysnuć następujące wnioski:

1. Zaproponowany model wykorzystuje dane o uziarnieniu gleby, jej zagęszczeniu i powierzchni właściwej oraz wartość wilgotności w pobliżu nasycenia do wyliczenia krzywej retencji wody. Ze względu na dostępność tych danych czyni to model szczególnie użytecznym.
2. Przykładowe obliczenia oparte na danych pomiarowych wykazują dobrą zgodność modelu do wyliczenia krzywych retencji wody. Średni błąd kwadratowy wyliczony dla badanych 35 próbek glebowych o różnym uziarnieniu wynosi  $\sigma=0,0359$  przy współczynniku korelacji wartości wilgotności wyliczonych i zmierzonych równym  $=0,9981$ .
3. Dobra zgodność przewidywań modelu z danymi doświadczalnymi dla próbek o zróżnicowanym uziarnieniu sugeruje, że założenia modelu, jego konstrukcja i dane wejściowe dobrane zostały poprawnie.
4. Obliczanie wartości średnich wielkości fizycznych przy zastosowaniu modelu opartego na teorii ośrodków nieuporządkowanych podkreśla znaczenie zjawisk związanych z pojedynczymi cząstkami, ich parami, trójkami itd..., umożliwiając zrozumienie *struktury nieporządku* i analizę zjawisk przebiegających w mikroskali w ośrodku glebowym.
5. Zaproponowany model konfiguracji fazy stałej ośrodka glebowego oparty na formalizmie radialnych funkcji rozkładu umożliwia wyliczenie niektórych charakterystyk hydrofizycznych tego ośrodka.
6. Zaproponowana metoda uśredniania wykorzystuje wnioski z modelu wiązania wody w soczewkach w mikroskali do wyliczenia wartości oczekiwanych wilgotności dla próbek makroskopowych.
7. Model soczewek wodnych oparty na rozwiązaniu równania Laplace'a umożliwia wyliczenia mikrokrzywych retencji wody dla różnych średnic cząstek stałych, co umożliwia ocenę retencji wody powodowaną obecnością różnych frakcji granulometrycznych w glebie. A w szczególności:
  - Pokazuje dlaczego frakcje drobne są tak ważne dla zjawiska retencjonowania wody w glebie. Woda zgromadzona na styku małych cząstek z dużymi może mieć objętość przekraczającą objętość małej cząstki, przy energii wiązania charakterystycznej dla małej cząstki. Na styku dwu jednakowych cząstek efekt zwiększenia objętości nie występuje.

- Wskazuje, że histereza obserwowana w rzeczywistych glebach może mieć swoją przyczynę w niestabilności soczewek rozpiętych na odległych cząstkach. W miarę wzrostu podciśnienia wody glebowej największe soczewki stają się niestabilne, pękają, a woda z nich zasila okoliczne, mniejsze soczewki. Wynika to z niestabilności rozwiązań równania Laplace'a w tych warunkach.
  - Rozwiązanie równania opartego na wzorze Laplace'a pozwala wyznaczyć siłę przyciągania z jaką soczewka oddziałuje na cząstki stale ją tworzące. Siła ta może być użyta do modelowania właściwości mechanicznych gleb w zależności od wilgotności lub potencjału wody glebowej.
8. Model struktury fazy stałej gleb oparty na formalizmie radialnych funkcji rozkładu w naturalny sposób podkreśla ważność kontaktów pomiędzy cząstkami jako miejsc gdzie gromadzi się retencjonowana woda.
  9. Ograniczenie szeregu do statystycznego wyliczenia wartości średnich wielkości fizycznych poprzez uwzględnienie najwyżej procesów i zjawisk dwucząstkowych jest, jak się wydaje, dopuszczalnym przybliżeniem do wyliczenia krzywych retencji wody w glebie.
  10. Opracowana teoria, zrealizowana numerycznie na przykładzie krzywych retencji wody w próbkach glebowych jest obiecującym narzędziem do kontynuacji prac i rozszerzenia do opisu innych parametrów fizycznych ośrodka glebowego.

### 13. LITERATURA

- [1] Ahuja, L. R., Naney, J., and Williams, R. *Estimating soil water characteristics from simpler properties or limited data. Soil Sci. Soc. Am. J.*, 49:1100–1105, 1985.
- [2] Arya, L. M. and Dierolf, T. S. *Predicting soil moisture characteristics from particle-size distributions: An improved method to calculate pore radii from particle radii.* In *Indirect methods for estimationg the hydraulic properties of unsaturated soils*, pages 115–1244. 1989.
- [3] Baker, S. *Pore size distribution- a factor to be considered. J. Hydrol.*, 41:279–290, 1979.
- [4] Barker, G. and Mehta, A. *Vibrated powders: Structure, correlations, and dynamics. Physical Review A*, 45(6):3435–3446, March 1992.
- [5] Bathke, G. R., Amoozegar, A., and Cassel, D. K. *Description of soil pore size distribution with mean weighted pore diameter and coefficient of uniformity. Soil Science*, 152(2):82–86, August 1991.
- [6] Bloemen, G. *Calculation of hydraulic conductivities of soils from texture and organic matter content. Z. Pflanzenernaehr. Bodenkd*, 143:581–605, 1980.
- [7] Carsel, R. F. and Parrish, R. S. *Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. Water Resources Research*, 24(5):755–769, May 1988.
- [8] Chen, C. T. *Analitic sutherland model radial distribution function. The Journal of Chemical Physics*, 54(4):1515–1517, February 1971.
- [9] Childs, E. C. *Concepts of soil water phenomena. Soil Science*, 113(4):246–253, 1972.
- [10] Czachor, H. *Geometria fazy stałej i przestrzeni porów w rolniczych ośrodkach granularnych na przykładzie gleby mineralnej. Acta Agrophysica*, 7, 1977.
- [11] Dechnik, I. and Stawiński, J. *Determination of the total surface area of soils on the basis of one measurement. Polish Journal of Soil Science*, III(2):15, 1970.
- [12] Dechnik, I. and Stawiński, J. *Powierzchnia właściwa w badaniach fizykochemicznych i fizycznych właściwości gleb. Problemy Agrofizyki*, 6, 1973.
- [13] Dobrzański, B. and Zawadzki, S. *Gleboznawstwo.* PWN, Warszawa, first edition, 1981. Praca zbiorowa.

- [14] Dullien, F. A. L. *Characterization of porous media - pore level. Transport in porous media*, 6(5-6):581-606, Oct., Dec. 1991.
- [15] Edwards, S. and Oakeshott, R. *Theory of powders. Physica A*, 157:1080-1090, 1989.
- [16] Everett, D. H. *A general approach to hysteresis: 3. Trans. Faraday Soc.*, (50), 1954.
- [17] Fichtenholz, G. M. *Rachunek różniczkowy i całkowity*, volume 2, pages 72-79. PWN, Warszawa, 1976.
- [18] Geiger, A. *Correlations and Connectivity*, chapter Molecular dynamics simulation of water, pages 198-213. Kluwer Academic Publisher, 1990.
- [19] Genuchten van, M. T. *A closed-form equation predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Am. J.*, 44:892-898, 1980.
- [20] Genuchten van, M. T., Leij, F. J., and Lund, L. J. *Indirect methods for estimating the hydraulic properties of unsaturated soils. Proceedings of the International Workshop on Indirect methods of Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soils. U.S. Salinity Lab., U.S. Salinity Lab. USDA ARS 4500 Glenwood Drive, CA 92501*, 1989.
- [21] Gibbs, J. W. *The collected works of Josiah Willard Gibbs*, volume 1. Yale University Press, London, 1948.
- [22] Goodwin, S., J.D., B., and Heritage, J. *Calculation of the hard sphere radial distribution function. Molecular Physics*, 75(4):917-923, 1992.
- [23] Gray, W. G. and Hassanizadeh, S. M. *Paradoxes and realities in unsaturated flow theory. Water Res. Research*, 27(8):1847-1854, August 1991.
- [24] Gregson, K., Hector, D., and McGowan, M. *A one-parameter model for the soil water characteristic. Journal of Soil Sci.*, 38:483-486, 1987.
- [25] Grismer, M. E. *Pore-size distributions and infiltration. Soil Sci.*, 141(4):249-260, April 1986.
- [26] Groenevelt, P. and Bolt, G. H. *Water retention in soil. Soil Science*, 113(4):238-245, 1972.
- [27] Hassanizadeh, S. M. and Gray, W. G. *Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media. Water Res. Research*, 29(10):3389-3405, October 1993.
- [28] Haverkamp, R. and Parlange, J. *Predicting the water-retention curve from particle-size distribution: 1. sandy soils without organic matter. Soil Sci.*, 142(6):325-339, December 1986.

- [29] Ihm, G. and Mason, E. A. *Statistical-mechanical analytical equation of state for fluid mixtures. Molecular Physics*, 71(1):109-121, 1990.
- [30] Ihm, G. and Song, Y. and Mason, E. A. *Equation of state for mixtures of non-polar molecular fluids. Molecular Physics*, 75(4):897-915, 1992.
- [31] ISSS. *Physics terminology. International Society of Soil Science, Soil Physics Terminology. Bull.*, 48:16-22, 1975.
- [32] Iwata, S. *On the definition of soil water potentials as proposed by the I.S.S.S. in 1963. Soil Science*, 114(2):88-92, 1972.
- [33] Iwata, S. *Thermodynamics of soil water: I. The energy concept of soil water. Soil Science*, 113(3):162-166, 1972.
- [34] Iwata, S. *Thermodynamics of soil water: II. The internal energy and entropy of soil water. Soil Science*, 113(5):313-316, 1972.
- [35] Iwata, S. *Thermodynamics of soil water: III. The distribution of cations in a solution in contact with a charged surface of clay.. Soil Science*, 117(2):87-93, 1974.
- [36] Kampen van, N. G. *How do stochastic processes enter into physics. Cosmex-89*, pages 239-248, 1990.
- [37] Kampen van, N. G. *Stochastic Processes in physics and chemistry. North Holland Personal Library*, 1990.
- [38] Kaniewska, J. and Walczak, R. *A numerical interpretation of the analysis of the hysteresis phenomenon in the drying and wetting processes of soil. Pol. J. Soil. Sci.*, 7(1), 1974.
- [39] Konstankiewicz, K., Pukos, A., and Walczak, R. *Domenowa teoria histerezy dla termodynamicznych procesów w glebie. Problemy Agrofizyki*, (13), 1974.
- [40] Lebowitz, J. L. *Exact solution of generalized Percus-Yevick equation for a mixture of hard spheres. Physical Review*, 133(4A):A895-A899, February 1964.
- [41] Li, J.-D., Li, Y.-G., Lu, J.-F., and Teng, T. *A new analytic formula for molecular radial distribution function in fluid and fluid mixtures. Fluid Phase Equilibria*, 55:75-85, 1990.
- [42] Li, M.-H. and Yung-Liang, W. *Application of approximations to mixture radial distribution functions to the development of mixing rules. Fluid Phase Equilibria*, 72:89-109, 1992.
- [43] Lipiec, J. *Możliwości oceny przewodnictwa wodnego gleb na podstawie ich niektórych właściwości. Problemy Agrofizyki*, 40:5-62, 1983.

- [44] Lipiec, J. and Tarkiewicz, S. *The effect of moisture on the crushing strength of aggregates of loamy soil of various density levels. Polish Journal of Soil Science*, XIX(1-2), 1986.
- [45] Lipiec, J. and Usowicz, B. *Spatial variability of penetration resistance of soil at different compaction level. Fragmenta Agronomica*, B(2), 1997.
- [46] Malicki, M. *A reflectometric (TDR) meter of moisture content in soils and other capillary – porous materials. Z.P.P.N.R.*, 388:107–114, 1990.
- [47] Mansoori, G. A., F., C. N., Starling, K. E., and Leland, T. W. J. *Equilibrium thermodynamic properties of the mixture of hard spheres. The Journal of Chemical Physics*, 54(4):1523–1525, February 1971.
- [48] Matteoli, E. and Ali, M. G. *A simple expression for radial distribution functions of pure fluids and mixtures. J. Chem. Phys.*, 103(11):4672–4677, Sept. 1995.
- [49] Mehta, A. *Correlations and Connectivity*, chapter The physics of powders, pages 88–107. Cluwer Academic Publishers, Netherlands, 1990.
- [50] Mehta, A. *Real sandpiles: dilatancy, hysteresis and cooperative dynamics. Physica A*, 186:121–153, 1992.
- [51] Mehta, A. and Barker, G. *Vibrated powders: A microscopic approach. Physical Review Letters*, 67(3):394–397, July 1991.
- [52] Mehta, A., Barker, G., Luck, J., and Needs, R. *The dynamics of sandpiles: The competing roles of grains and clusters. Physica A*, 224:48–67, 1996.
- [53] Mehta, A. and Edwards, S. *Statistical mechanics of powder mixtures. Physica A*, 157:1091–1100, 1989.
- [54] Murdoch, A. I. and Kowalski, S. J. *On fluid–fluid coupling within porous media: A mixture theoretic approach based upon molecular considerations. Transport in Porous Media*, 8:47–70, 1992.
- [55] Nakao, T., Fujita, M., Nishimura, T., and Kudo, M. *Retained water in soil based on probabilistic pore structure. Environment International*, 21(5):711–716, 1995.
- [56] Noll, W. *Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. Arch. Rational Mech. Anal.*, 27:1–32, 1967.
- [57] Ogawa, T. *Topological disorder in condensed matter*, chapter Problems in ..., pages 60–77. Springer series in solid state. Springer Verlag, 1985.
- [58] Paloheimo, J. E. *On a theory of search.. Biometrika*, 58(1):61–75, 1971.



- [59] Percus, J. K. and Yevick, G. J. *Analysis of classical statistical mechanics by means of collective coordinates. Physical Review*, 110(1):1–13, April 1958.
- [60] Plagge, R., Roth, C. H., Renger, M., Stoffregen, H., Malicki, M. A., Sobczuk, H., Walczak, R., and Slawinski, C. *Determination of unsaturated hydraulic conductivity using steady state profile method and unsteady state instantaneous profile method. In Mat. Workshop on Advanced Methods for determine hydraulic properties of soils*, pages 69–72. 10-13 June 1996.
- [61] Przystalski, S. *Fizyka z elementami biofizyki i agrofizyki*. Wydawnictwo Akademii Rolniczej, Wroclaw, 1993.
- [62] Pukos, A. *Odształcenia gleby w zależności od rozkładów wielkości porów i cząstek fazy stałej. Problemy Agrofizyki*, (61), 1990.
- [63] Ragab, R. and J.Feyen. *Effect of the method for determining pore size distribution on prediction of the hydraulic conductivity function and of infiltration. Soil Sci.*, 134(2):141–145, August 1982.
- [64] Rio, d. J. A., de Haro, M. L., and Vazques, F. *The non-equilibrium thermodynamics of the soil water system: a variational approach. J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 17(1):67–76, 1992.
- [65] Ripley, B. D. *Modelling spatial patterns. Journal of the Royal Statistical Society*, 39(2):172–216, 1977.
- [66] Rounsevell, M. D. A., Loveland, P. J., Mayr, T. R., Armstrong, A. C., De La Rosa, D., Legros, J. P., Simota, C., and Sobczuk, H. A. *ACCESS: A spatially distributed soil water and crop development model for climate change research*, volume 45, pages 85–92. 1996.
- [67] Russo, D. and Bresler, E. *Soil hydraulic properties as stochastic processes: I. An analysis of field spatial variability. Soil. Sci. Soc. Am. J.*, 45:682–687, 1981.
- [68] Schuh, W. and Bauder, J. *Effect of soil properties on hydraulic conductivity-moisture relationships. Soil Sci. Am. J.*, 50:848–855, 1986.
- [69] Sobczuk, H., Wysokiński, K. I., and Pilat, M. *Electrical conductivity of thin alloy films. Acta Physica Polonica*, A59(6):805–813, 1981.
- [70] Sobczuk, H. A. *Comment on water potential definition. Zesz. Probl. Post. Nauk Roln.*, 436:143–148, 1996.
- [71] Sobczuk, H. A., Plagge, R., Walczak, R., and Roth, C. *Laboratory equipment and calculation procedure to rapidly determine hysteresis of some soil hydrophysical properties under nonsteady flow conditions. Z. Pflanzenernahr. Bodenk.*, 155:155–163, 1992.

- [72] Song, Y. *Statistical-mechanical theory for mixtures. Journal of Chemical Physics*, 92(4):2683–2684, February 1990.
- [73] Sposito, G. *Thermodynamics of swelling clay-water systems. Soil Science*, 4:243–249, 1972.
- [74] Stakman, W. P. *The relation between particle size, pore size and hydraulic conductivity of sand separates. In Proceedings of the Wageningen Symposium – June 1966 – Water in the unsaturated zone*, pages 373–384. International Association of Scientific Hydrology, P.O. Box 35, Wageningen, The Netherlands, 1966.
- [75] Stell, G. *Statistical mechanics applied to random-media problems. Lectures in applied mathematics: Mathematics of Random Media*, 27:109–137, 1991.
- [76] Sugiyama, K., Ryu, H., and Waseda, Y. *Local ordering structure of meta-kaolinite and meta-dickite by the X-ray radial distribution function analysis. Journal of Material Science*, 28:2783–2788, 1993.
- [77] Sychev, V. *Complex thermodynamic systems. Consultants Bureau*, 1973.
- [78] Sychev, V. V. and Shier, J. S. *Complex thermodynamic systems*, chapter 6, pages 145–170. *Studies in Soviet science. Consultants Bureau, New York-London*, 1973.
- [79] Szatylowicz, J., Brandyk, T., Hevelke, P., and T., G. *Description of the shrinkage characteristic in alluvial clay soils. Zesz. Probl. Post. Nauk Roln*, 436:149–156, 1996.
- [80] Talsma, T. *Prediction of hydraulic conductivity from soil water retention data. Soil Sci.*, 140(3):184–188, 1985.
- [81] Thiele, E. *Equation of state for hard spheres. Chemical Physics*, 39(2):474–479, July 1963.
- [82] Torquato, S. *Microstructure and effective properties of random media. Lectures in Applied mathematics: Mathematics of random media*, 27:323–358, 1991.
- [83] Toth, G. and Pusztai, L. *Comparative studies of the underlying local order corresponding to different radial distribution functions of disordered materials. Chemical Physics*, 160:405–413, 1992.
- [84] Turski, R., Słowińska-Jurkiewicz, A., and Hetman, J. *Zarys Gleboznawstwa. Wydawnictwo Akademii Rolniczej, Lublin*, 1996.
- [85] Wagenet, R. and Addiscott, T. *Estimating the variability of unsaturated soil hydraulic conductivity using simple equations. Soil Sci. Soc. Am. J.*, 51:42–47, 1987.

- [86] Walczak, R. *Modelowe badania zależności retencji wodnej od parameterów fazy stałej gleby. Problemy Agrofizyki*, 41:5–69, 1984.
- [87] Walczak, R. T. *Model investigations of water binding energy in soils of different compaction. ZPPNR*, 197:11–43, 1977.
- [88] Walczak, R. T., Slawinski, C., Malicki, M., and Sobczuk, H. *Measurement of water characteristics in soils using TDR technique: water characteristics of loess soil under different treatment. International Agrophysics*, 7:175–182, 1993.
- [89] Walczak, R. T., Slawiński, C., Sobczuk, H. A., and Gliński, J. *Euro ACCESS: Agroclimatic change in European Soil Suitability.*, chapter 5: Modelling soil crack development in EuroACCESS-II, pages 51–60. ISBN 1-871651-17-4. Cranfield University, UK, Commission of the European Communities Directorate General XII Science, Research and Development, first edition, 1996.
- [90] Wysokiński, K. I., Sobczuk, H., and Pilat, M. *Electronic structure of thin alloy films. Physica Status Solidi (b)*, 101:657–663, 1980.
- [91] Yuste, B., S., and Santos, A. *Radial distribution function for hard spheres. Physical Review A*, 43(10):5418–5423, May 1991.
- [92] Ziman, J. M. *Models of disorder*. Cambridge Univ. Press, London, 1979.

## The physical status of the soil described as disordered medium: water retention characteristics

### SUMMARY

The description of soil solid phase structure is a key factor to understand mutual interactions of soil components: solid particles, soil solute and soil air. The model for description of the soil disordered solid phase based on the statistical theory of disordered media has been proposed.

The model can be used for water retention curves modeling from known grain size distribution and bulk density data of the soil. It can be also developed further to predict some mechanical properties of the soil especially those which are water content dependent.

The model bases on a statistical description of the disordered, granular medium using radial distribution functions. The method of calculation of the mean value of the water has been proposed for calculation of volumetric water content of the soil sample from the water binding model in lenses between pairs of spherical particles. Both models combined and simplified are used in practical model for calculation of the water content of soil from its grain size distribution and bulk density.

Numerical verification of proposed models was conducted with number of soils. It was observed a good agreement of calculated and measured values for prevailing number of soil samples. The standard deviation observed for 39 different soil samples is below of 6% of volumetric moisture. Calculated curves preserve similarity to measured values over the broad range of grain size distribution variability.

Keywords: soil water retention model, soil structure description, micro scale water binding in soil