Acta Agrophysica, 2002, 78, 51-61

ALGORYTM OBLICZENIOWY WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA POISSONA LEPKOSPRĘŻYSTEGO MATERIAŁU ROŚLINNEGO

K. Gołacki, A. Stankiewicz

Katedra Podstaw Techniki, Akademia Rolnicza, ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin
e-mail: golacki@faunus.ar.lublin.pl, ania@faunus.ar.lublin.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę wyznaczania zmiennego w czasie współczynnika Poissona materiału liniowo lepkosprężystego w oparciu o jednoosiowe funkcje relaksacji naprężeń uzyskane eksperymentalnie. Pokazano, że jeśli funkcje relaksacji aproksymowane są dyskretnymi modelami Maxwella 2-go rzędu to współczynnik Poissona można przedstawić jako kombinację funkcji wykładniczych, składowej stałej oraz składowych całkowych będących sumą pojedynczych, podwójnych oraz potrójnych splotów pierwotnych i zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego rodzaju. Opracowano algorytm obliczeniowy identyfikacji współczynnika Poissona i implementowano go z zastosowaniem standardowych technik obliczeniowych.

Słowa kluczowe: test relaksacji naprężeń, współczynnik Poissona, aproksymacja, algorytm identyfikacji.

WSTĘP

Materiały roślinne będące przedmiotem produkcji rolniczej narażone są na różnego rodzaju obciążenia mechaniczne podczas całego procesu produkcji począwszy od zbioru a skończywszy na operacjach przerobu w zakładach przetwórczych. Szczególnie narażone na uszkodzenia są materiały o znacznej masie i wysokim turgorze w stanie dojrzałości. Dotyczy to zarówno popularnych owoców (jabłka, gruszki) i warzyw korzeniowych (marchew, ziemniaki) jak i roślin przemysłowych takich jak burak cukrowy.

Udary i długotrwałe obciążenia o charakterze statycznym powodują duże straty wartości odżywczych i handlowych a także straty masowe i konieczność selekcji produktów. Wynika stąd konieczność poznania właściwości mechanicznych materiałów roślinnych oraz powiązania ich z parametrami określającymi wymagania przemysłu przetwórczego i preferencje klientów detalicznych. Dogłębne studia nad mechaniką uszkodzeń a także analiza stanów naprężeń i odkształceń w materiałach roślinnych powinny być podstawą do weryfikacji szybkich eksperymentalnych metod nieniszczących umożliwiających ocenę *on-line* tych materiałów.

Z punktu widzenia wielu zastosowań, w szczególności analizy przebiegu i skutków obciążeń mechanicznych, materiały roślinne mogą być traktowane jako liniowo lepkosprężyste [1,2,4]. Jedną z podstawowych stałych materiałowych dających obraz reakcji materiału w kierunku prostopadłym do osi przyłożonego naprężenia jest współczynnik Poissona. Jest on powiązany zarówno z modułem sprężystości objętościowej jak i postaciowej, które dla układów lepkosprężystych decydują o tempie zaniku naprężeń ścinających będących najczęstszą przyczyną uszkodzeń wewnętrznych materiałów roślinnych.

WSPÓŁCZYNNIK POISSONA MATERIAŁU LEPKOSPRĘŻYSTEGO

Trudność wyznaczania współczynnika Poissona wynika z braku metody eksperymentalnej pozwalającej na jego bezpośredni pomiar.
Stosowane dotychczas metody polegają na pomiarach odkształceń wzdłużnych i bocznych próbki ściskanej jednoosiowo lub dwóch niezależnych eksperymentach, w których wyznacza się dwie niezależne wielkości pomocnicze [5-7].

W niniejszej pracy do wyznaczenia współczynnika Poissona zastosowano metodę Hughesa i Segerlinda [8] wymagającą użycia dwu próbek z tego samego materiału. Jedna z nich ściskana jest w warunkach jednoosiowego stanu naprężeń a druga w warunkach jednoosiowego stanu odkształceń. Wychodząc z trzech równań uogólnionego prawa Hooka opisujących odkształcenia próbki cylindrycznej we współrzędnych biegunowych Hughes i Segerlind [8] uzyskali zależność:

$$\frac{e_s}{x_s} = \frac{[1+\nu]\cdot[1-2\nu]}{[1-\nu]}, \tag{1}$$

gdzie: e_s - moduł sprężystości w warunkach jednoosiowego ściskania,
x_s - moduł sprężystości w warunkach jednoosiowego odkształcania,
ν - współczynnik Poissona materiału sprężystego.

Zakładając lepkosprężystość badanego materiału i bazując na zasadzie analogii pomiędzy zjawiskami sprężystymi i lepkosprężystymi [3] równanie (1) można zastąpić równaniem operatorowym postaci:

$$\frac{s \cdot E(s)}{s \cdot X(s)} = \frac{[1 + s \cdot V(s)] \cdot [1 - 2s \cdot V(s)]}{[1 - s \cdot V(s)]}, \tag{2}$$

gdzie $E(s) = L[e(t)]$ i $X(s) = L[x(t)]$ to, odpowiednio, transformaty Laplace'a jednoosiowych funkcji relaksacji naprężeń próbki swobodnej $e(t)$ oraz próbki ograniczonej $x(t)$, $V(s) = L[v(t)]$ jest transformatą Laplace'a współczynnika Poissona materiału lepkosprężystego.
W oparciu o (2) mamy [4]:

$$V(s) = \frac{1}{4s}\left[\left(\frac{E(s)}{X(s)} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{E(s)}{X(s)} - 1\right)^2 - 8\left(\frac{E(s)}{X(s)} - 1\right)}\right]. \tag{3}$$

Do wyznaczenia oryginału $v(t)$ transformaty Laplace'a $V(s)$ De Baerdemeaker i Segerlind [4] zaproponowali procedurę numeryczną opartą o przybliżenie funkcji $v(t)$ skończonym szeregiem ortogonalnych wielomianów Jacobiego, jednak ze względu na własności tych wielomianów metoda ta pozwala aproksymować oryginał $v(t)$ tylko dla bardzo małych czasów.
W tej pracy prezentujemy algorytm, który umożliwia wyznaczenie oryginału transformaty $V(s)$ (3) dla dowolnej chwili czasu $t \geq 0$.

APROKSYMACJA FUNKCJI RELAKSACJI

Będziemy zakładać, że przeprowadzono eksperyment dyskretny, którego rezultatem jest zbiór pomiarów $e(t_i)$ i $x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ jednoosiowych funkcji relaksacji naprężeń ściskających próbki swobodnej $e(t)$ oraz próbki ograniczonej $x(t)$.
Funkcje relaksacji $e(t)$ oraz $x(t)$ można przybliżyć w sposób zadawalający stosując model Maxwella złożony z dwu równoległych gałęzi, czyli kombinacjami dwu funkcji wykładniczych postaci:

$$\bar{e}(t,a) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} \quad \text{i} \quad \bar{x}(t,b) = B_1 e^{-\beta_1 t} + B_2 e^{-\beta_2 t}, \tag{4}$$

gdzie $\bar{e}(t,a)$ i $\bar{x}(t,b)$ oznaczają wartości funkcji relaksacji wyliczone w oparciu o przyjęte modele natomiast $a=(A_1,A_2,\alpha_1,\alpha_2)$ i $b=(B_1,B_2,\beta_1,\beta_2)$ są wektorami parametrów tych modeli. Notacja $\bar{e}(t,a)$ i $\bar{x}(t,b)$ podkreśla zależność modeli (4) od wektorów a i b. Współczynniki A_1,A_2, B_1 B_2 oraz wykładniki α_1, α_2, β_1 i β_2 dobiera się tak aby przyjęte modele jak najlepiej przybliżały wyniki eksperymentu.

Jako miarę dokładności modeli (4) przyjmiemy klasyczne kwadratowe wskaźniki jakości postaci [9]:

$$Q_e(a)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[e(t_i)-\bar{e}(t_i,a)\right]^2 \quad \text{i} \quad Q_x(b)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[x(t_i)-\bar{x}(t_i,b)\right]^2 .$$

Problem wyznaczenia najlepszych (optymalnych) parametrów a i b sprowadza się do rozwiązania następujących zadań optymalizacji:

$$\min_a Q_e(a) \qquad \text{i} \qquad \min_b Q_x(b). \tag{5}$$

Uwzględniając własności funkcji relaksacji $e(t)$ oraz $x(t)$ łatwo pokazać, że rozwiązania zadań minimalizacji (5) istnieją a parametry modeli optymalnych przyjmują wartości dodatnie. Są to typowe zadania aproksymacji średniokwadratowej, mogą być one rozwiązane z zastosowaniem standardowych gradientowych technik optymalizacji bez ograniczeń [14].

WYZNACZENIE WSPÓŁCZYNNIKA POISSONA $v(t)$

Uwzględniając (3) oraz modele (4) problem identyfikacji współczynnika Poissona sprowadza się więc do wyznaczenia oryginału $\bar{v}(t,c)$ transformaty Laplace'a:

$$\bar{V}(s,c)=\frac{1}{4s}\left[\left(\frac{\bar{E}(s,a)}{\bar{X}(s,b)}-1\right)+\sqrt{\left(\frac{\bar{E}(s,a)}{\bar{X}(s,b)}-1\right)^2-8\left(\frac{\bar{E}(s,a)}{\bar{X}(s,b)}-1\right)}\right],$$

gdzie $\bar{E}(s,a)=L[\bar{e}(t,a)]$, $\bar{X}(s,b)=L[\bar{x}(t,b)]$, $c=(a,b)$ jest wektorem parametrów modeli (4).

Transformatę $\overline{V}(s,c)$ można przedstawić równoważnie jako sumę:

$$\overline{V}(s,c)=\overline{V_1}(s,c)+\overline{V_2}(s,c) \tag{6}$$

wyrażenia wymiernego:

$$\overline{V_1}(s,c)=\frac{1}{4s}[-Z(s,c)] \tag{7}$$

oraz funkcji

$$\overline{V_2}(s,c)=\frac{1}{4s}\sqrt{Z(s,c)^2+8\cdot Z(s,c)}\,, \tag{8}$$

gdzie:

$$Z(s,c)=1-\frac{\overline{E}(s,a)}{\overline{X}(s,b)} \tag{9}$$

Oryginał $\overline{v}_1(t,c)$ funkcji wymiernej $\overline{V_1}(s,c)$ istnieje dla dowolnych dodatnich parametrów modeli (4) i jest kombinacją liniową trzech składowych wykładniczych oraz składowej stałej postaci:

$$\overline{v}_1(t,c)=\begin{cases} D_1 e^{-\alpha_1 t}+D_2 e^{-\alpha_2 t}+D_3 e^{-\gamma t}+D_4 & gdy \quad \overline{\beta}_1\neq\alpha_1\overline{B} \;\; i \;\; \overline{\beta}\neq\alpha_2\overline{B} \\ D_1\, t\, e^{-\alpha_1 t}+D_2 e^{-\alpha_1 t}+D_3 e^{-\alpha_2 t}+D_4 & gdy \quad \overline{\beta}=\alpha_1\overline{B} \\ D_1\, e^{-\alpha_1 t}+D_2\, t\, e^{-\alpha_2 t}+D_3 e^{-\alpha_2 t}+D_4 & gdy \quad \overline{\beta}=\alpha_2\overline{B} \end{cases} \tag{10}$$

gdzie $\overline{\beta}=B_1\beta_2+B_2\beta$, $\overline{B}=B_1+B_2$ a współczynniki D_1,D_2,D_3,D_4 oraz wykładnik γ zależą od wektora parametrów c.
Zarówno licznik jak i mianownik funkcji $Z(s,c)$ (9) są wielomianami zmiennej zespolonej s rzędu 3-go, w konsekwencji wyrażenie $Z(s,c)^2+8\cdot Z(s,c)$ występujące pod pierwiastkiem w transformacie $\overline{V_2}(s,c)$ (8) jest funkcją wymierną, której licznik i mianownik stanowią wielomiany rzędu 6-go. Funkcję $\overline{V_2}(s,c)$ można jednak przekształcić do postaci:

$$\overline{V_2}(s,c)=\frac{1}{4s}Z(s,c)\cdot W(s,c), \tag{11}$$

gdzie:

$$W(s,c)=\sqrt{Y(s,c)} \tag{12}$$

natomiast

$$Y(s,c)=1+\frac{8}{Z(s,c)}=\frac{9\overline{X}(s,b)-\overline{E}(s,a)}{\overline{X}(s,b)-\overline{E}(s,a)} \tag{13}$$

jest wyrażeniem wymiernym, którego licznik i mianownik są wielomianami rzędu trzeciego o współczynnikach zależnych od wektorów parametrów a i b.
Postać oryginału Laplace'a funkcji $W(s,c)=\sqrt{Y(s,c)}$ zależy od własności funkcji $Y(s,c)$. Wyrażenie wymierne $Y(s,c)$ można przestawić w postaci:

$$Y(s,c)=M\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}. \tag{14}$$

Zera z_1, z_2, z_3 oraz bieguny s_1, s_2, s_3 funkcji $Y(s,c)$ zależą od wektora parametrów c, ich położenie na płaszczyźnie zespolonej decyduje o postaci oryginału $w(t,c)=L^{-1}\left(\sqrt{Y(s,c)}\right)$.
Możliwe są cztery komplementarne przypadki:

(A1) z_1, z_2, z_3 oraz s_1, s_2, s_3 są rzeczywiste

(A2) z_1, z_2, z_3 oraz s_1 są rzeczywiste, s_2, s_3 są zespolone

(A3) z_1 jest rzeczywiste, z_2, z_3 są zespolone, s_1, s_2, s_3 są rzeczywiste

(A4) z_1 i s_1 są rzeczywiste, z_2, z_3 oraz s_2, s_3 są zespolone.

Oryginał Laplace'a funkcji $W(s,c)$ podaje następujące twierdzenie; dla uproszczenia notacji pominiemy zależność definiowanych poniżej funkcji od wektora parametrów c. Zdefiniujemy:

$$f_i(t)=p_i\cdot e^{q_i\cdot t}\cdot[I_0(p_i\cdot t)+I_1(p_i\cdot t)],\quad p_i=\frac{s_i-z_i}{2},\quad q_i=\frac{s_i+z_i}{2},\ i=1,\ 2,\ 3,$$

$I_n(x)$ to zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju n-tego rzędu [12]:

$$I_n(x)=i^{-n}\cdot J_n(i\cdot x),\quad n=0,1,2,\cdots,$$

gdzie $J_n(x)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju n-tego rzędu:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+n}\cdot\Gamma(k+1)\cdot\Gamma(k+n+1)}\cdot x^{2k+n},\quad n=0,1,2,\cdots$$

natomiast $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ oznacza funkcję Γ Eulera [12].

Twierdzenie [11] Oryginał transformaty Laplace'a funkcji $W(s,c)=\sqrt{Y(s,c)}$ (12), $Y(s,c)$ jest wyrażeniem wymiernym (14), przyjmuje ogólną postać:

$$w(t,c)=\sqrt{M}\left[f_1(t)+g_i(t)+\int_0^t f_1(\tau)\cdot g_i(t-\tau)\,d\tau+\delta(t)\right], \tag{15}$$

gdzie $\delta(t)$ oznacza dystrybucję Diraca, funkcje $g_i(t)$, $i=1,2,3,4$, odpowiadające przypadkom (A1) - (A4), są następujące:

(A1) $$g_1(t)=f_2(t)+f_3(t)+\int_0^t f_2(\tau)\cdot f_3(t-\tau)\,d\tau$$

(A2) $$g_2(t)=h_1(t)+h_2(t)+\int_0^t h_1(\tau)\cdot h_2(t-\tau)\,d\tau$$

(A3) $$g_3(t)=(q_1-r_4)\cdot h_3(t)+q_1\cdot h_4(t)+\frac{r_3^2}{2}\left[\int_0^t h_3(\tau)\cdot h_5(t-\tau)\,d\tau\right]$$

(A4) $$g_4(t)=(r_4-r_2)\cdot h_6(t)-r_1\cdot h_7(t)+\frac{r_3^2}{2}\left[\int_0^t h_6(\tau)\cdot h_5(t-\tau)\,d\tau\right],$$

gdzie:

$$h_1(t)=u_1\cdot e^{u_2\cdot t}\cdot\left[I_0(u_1\cdot t)+I_1(u_1\cdot t)\right]$$

$$h_2(t)=e^{r_2\cdot t}\cdot\left[(r_2-z_3)\cdot J_0(r_1\cdot t)-r_1\cdot J_1(r_1\cdot t)\right]$$

$$h_{i+3}(t)=e^{u_4\cdot t}\cdot I_i(u_3\cdot t),\quad i=0,1$$

$$h_5(t)=e^{r_4\cdot t}\cdot\left[J_0(r_3\cdot t)+J_2(r_4\cdot t)\right]$$

$$h_{i+6}(t)=e^{r_2\cdot t}\cdot J_i(r_1\cdot t),\quad i=0,1$$

$$u_1=\frac{z_3-z_2}{2},\quad u_2=\frac{z_3+z_2}{2},\quad u_3=\frac{s_3-s_2}{2},\quad u_4=\frac{s_3+s_2}{2}$$

$$r_1=\left|Im(s_2)\right|,\quad r_2=Re(s_2),\quad r_3=\left|Im(z_2)\right|,\quad r_4=Re(z_2).\quad \blacksquare$$

Dowód twierdzenia bazuje na odpowiednim rozwinięciu funkcji $Y(s,c)$ (14) w szeregi potęgowe Newtona [10], wykorzystuje własności funkcji Bessela, funkcji Γ Eulera i całkowego przekształcenia Laplace'a [13].

Z dowodu twierdzenia wynika, że oryginał $w(t,c)=L^{-1}\left(\sqrt{Y(s,c)}\right)$ (15) istnieje dla dowolnego wektora parametrów c.
W oparciu o (11), (7) oraz (15) wykorzystując twierdzenie Borela o transformacie splotu funkcji oraz selektywność delty Diraca $\delta(t)$ [13] mamy:

$$\bar{v}_2(t,c)=-\int_0^t \bar{v}_1(\tau,c)\cdot w(t-\tau,c)d\tau=-\sqrt{M}\int_0^t \bar{v}_1(\tau,c)\cdot w_m(t-\tau,c)d\tau-\sqrt{M}\cdot\bar{v}_1(t,c),$$

gdzie:

$$w_m(t,c)=\sqrt{M}\left[f_1(t)+g_i(t)+\int_0^t f_1(\tau)\cdot g_i(t-\tau)\,d\tau\right]. \tag{16}$$

Stąd, wobec (6), oryginał transformaty współczynnika Poissona dany jest wzorem:

$$\bar{v}(t,c)=\left(1-\sqrt{M}\right)\bar{v}_1(t,c)-\sqrt{M}\int_0^t \bar{v}_1(\tau,c)\cdot w_m(t-\tau,c)d\tau\,. \tag{17}$$

Stałe A_1, A_2, B_1 B_2 oraz α_1, α_2, β_1 i β_2, od których zależy zarówno postać oryginału $\bar{v}(t,c)$ jak i jego wartości, zostały dobrane tak aby przybliżone modele Maxwella (4) jak najlepiej aproksymowały pochodzące z eksperymentu wartości funkcji relaksacji $e(t)$ oraz $x(t)$, podobnie model (2) opisujący zjawiska relaksacji w zachodzące w badanym materiale roślinnym stanowi jedynie przybliżenie zjawisk rzeczywistych. Oznacza to, że $\bar{v}(t,c)$ (17), mimo, że istnieje dla dowolnych wartości parametrów A_1, A_2, B_1 B_2 oraz α_1, α_2, β_1, β_2 może nie gwarantować dobrego przybliżenia współczynnika Poissona. Przykładowo będzie tak wówczas, gdy oryginał $\bar{v}(t,c)\to-\infty$ dla $t\to\infty$. Korzystając z tzw. twierdzeń granicznych transformacji Laplace'a [13] można wyprowadzić następujące warunki konieczne na to aby oryginał $\bar{v}(t,c)$ mógł stanowić dobre przybliżenie współczynnika $v(t)$ charakteryzującego rzeczywisty proces.

Stwierdzenie. Jeśli oryginał $\bar{v}(t,c)$ (17) spełnia nierówności:

$$0<\lim_{t\to 0^+}\bar{v}(t,c)<\infty \quad \text{i} \quad 0<\lim_{t\to\infty}\bar{v}(t,c)<\infty \tag{18}$$

to

$$A_1<B_1,\quad A_2<B_2,\quad \alpha_1<\beta_1 \tag{19}$$

$$(A_1\alpha_2+A_2\alpha_1)\beta_1\beta_2<(B_1\beta_2+B_2\beta_1)\alpha_1\alpha_2 \tag{20}$$

Nierówność (19) wynika z fizycznej natury sygnałów $e(t)$ oraz $x(t)$ i jest warunkiem koniecznym pierwszej z nierówności (18); warunek (20) wynika z tego, że granica funkcji $\overline{v}(t,c)$ przy $t \to \infty$ istnieje i jest skończona.
Aby wyznaczyć optymalne parametry a i b spełniające warunki (19), (20) dogodnie jest zastąpić dwa niezależne zadania minimalizacji (5) zadaniem optymalizacji:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{(a,b)} \left[Q(a,b) = Q_e(a) + Q_x(b)\right] \\ \textit{przy ograniczeniach} \\ A_1 < B_1, \quad A_2 < B_2, \quad \alpha_1 < \beta_1 \\ (A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1)\beta_1\beta_2 < (B_1\beta_2 + B_2\beta_1)\alpha_1 \\ a = (A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2), \quad b = (B_1, B_2, \beta_1, \beta_2) \end{array}\right\} \tag{21}$$

Podobnie jak (5) jest to typowe zadania minimalizacji z addytywną różniczkowalną funkcją celu i ograniczeniami nierównościowymi, które może być rozwiązane z zastosowaniem standardowych technik optymalizacji z ograniczeniami [14].

ALGORYTM

Współczynnik Poissona $v(t)$ można wyznaczyć w oparciu o podwójny test relaksacji naprężeń stosując następującą procedurę:

Krok 1. Wyznacz eksperymentalnie jednoosiowe funkcje relaksacji naprężeń ściskających próbki swobodnej $e(t)$ i ograniczonej $x(t)$, czyli zmierz wartości $e(t_i)$ oraz $x(t_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, N$.
Krok 2. Wyznacz wektory parametrów optymalnych $a = (A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2)$ i $b = (B_1, B_2, \beta_1, \beta_2)$ w modelach Maxwella (4) stosując do rozwiązania zadań minimalizacji (5) wybraną standardową procedurę optymalizacji bez ograniczeń.

Krok 3. Sprawdź czy spełnione są warunki konieczne (19), (20) na to aby funkcja $\overline{v}(t,c)$ (17) była przybliżeniem rzeczywistego współczynnik Poissona $v(t)$. Jeśli tak to przejdź do kroku 5. W przeciwnym przypadku przejdź do kroku 4.

Krok 4. Wyznacz wektory parametrów optymalnych a i b spełniających warunki (19), (20), czyli rozwiąż problem optymalizacji (21) stosując wybraną procedurę optymalizacji z ograniczeniami.

Krok 5. Wyznacz oryginał $\overline{v}_1(t,c)$ funkcji wymiernej $\overline{V}_1(s,c)$ w oparciu o (10).
Krok 6. Wyznacz zera z_1, z_2, z_3 i bieguny s_1, s_2, s_3 wyrażenia wymiernego $Y(s,c)$ (13) a następnie wyznacz oryginał $\overline{v}(t,c)$ w oparciu o (17) i (16).

UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania lepkosprężystego współczynnika Poissona materiału roślinnego w oparciu o tzw. podwójny test relaksacji. Pokazano, że współczynnik Poissona można opisać kombinacją funkcji wykładniczych $\overline{v}_1(t,c)$ oraz splotowych składowych całkowych $\overline{v}_2(t,c)$. Przeprowadzone badania numeryczne wskazują, że składnik $\overline{v}_2(t,c)$ stanowi ok. 38-40% wartości współczynnika Poissona $\overline{v}(t,c)$.
Oczywiście jakość przybliżenia rzeczywistego współczynnika Poissona $v(t)$ funkcją $\overline{v}(t,c)$ zależy od dokładności modelu (3) oraz dokładności przybliżenia funkcji relaksacji modelami Maxwella (4), a także od dokładności z jaką obliczane są numerycznie całki (16) oraz (17).
Zaproponowany algorytm wyznaczania współczynnika Poissona można uogólnić dla funkcji relaksacji $e(t)$ i $x(t)$ aproksymowanych kombinacjami k funkcji wykładniczych postaci:

$$\overline{e}(t)=\sum_{i=1}^{k} A_i e^{-\alpha_i t} \quad \text{oraz} \quad \overline{x}(t)=\sum_{i=1}^{k} B_i e^{-\beta_i t}. \tag{22}$$

W tym przypadku składowa $\overline{v}_2(t,c)$ będzie kombinacją wielokrotnych splotów funkcji Bessela.

PIŚMIENNICTWO

1. **Chen P., Chen S.**: Stress relaxation functions of apple under high loading rates. Transaction of the ASAE, 29, 1754-1759, 1986.
2. **Chen P.**: Creep response of generalised Maxwell model. Int. Agrophysics, 8, 555-558, 1994.
3. **Christensen R. M.**: Theory of viscoelasticity. An introduction. Academic Press, New York, 1971.
4. **De Baerdemeaker J. G., Segerlind L. J.**: Determination of the viscoelastic properties of the apple flesh. Transaction of the ASAE, 19, 346-353, 1976.
5. **Gołacki K., Obroślak R.**: Poisson's ratio and water potential of carrot root. Proc. of ISAMA 97, 233-238, Taipei, Taiwan, 1997.
6. **Gyasi S., Fridley R. B., Chen P.**: Elastic and viscoelastic Poisson's ratio determination for selected citrus fruits. Transaction of the ASAE, 24, 747-750, 1981.
7. **Hammerle J. R., McClure W. F.**: The Determination of Poisson's Ratio by Compression Tests of Cylindrical Specimens. Journal of Texture Studies, 2, 31-49, 1971.
8. **Hughes H., Segerlind L. J.**: A rapid mechanical method for determining Poisson's ratio of biological materials. ASAE Paper No. 72-310, ASAE, St. Joseph, MI 49085, 1972.

9. **Ljung L.**: System identification – Theory for the User. Prentice Hall, New York, 1999.
10. **Saks S., Zygmund A.**: Funkcje analityczne. PWN, Warszawa, 1959.
11. **Stankiewicz A.**: Algorytm wyznaczania oryginału Laplace'a $\nu(t)$ transformaty współczynnika Poissona. Praca niepublikowana. Instytut Podstaw Techniki, AR, Lublin, 2000.
12. **Piłat B., Wasilewski M.J.**: Tablice całek. WNT, Warszawa, 1983.
13. **Wagner K. W.**: Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a. PWN, Warszawa, 1960.
14. **Zangwill W. I.**: Programowanie nieliniowe. WNT, Warszawa, 1974.

COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR DETERMINING THE VISCOELASTIC POISSON'S RATIO OF PLANT MATERIALS

K. Gołacki, A. Stankiewicz

Department of Technical Science, Agricultural Academy, ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin
e-mail: golacki@faunus.ar.lublin.pl, ania@faunus.ar.lublin.pl

Summary. A complete procedure for determining the time-varying Poisson's ratio of biological materials based on double relaxation test is proposed. It is proved that if discrete Maxwell models of 2-nd order are used to approximate the relaxation functions the Poisson's ratio can be given as a linear combination of exponential functions, constant element and multiple convolution integrals of Bessel functions. A computational algorithm for Poisson's ratio identification is developed and implemented by using the standard numerical optimization techniques.

Keywords: relaxation test, Poisson's ratio, model approximation, identification algorithm.