

JAROSŁAW SOCHA

Zastosowanie trygonometrycznego modelu zbieżystości do określania kształtu strzał świerka

The use of a trigonometric taper model for the determination of the shape of spruce stems

ABSTRACT

On the basis of sectional measurements of diameters of trees from 5 sawtimber spruce stands in the Beskid Śląski and Beskid Żywiecki, a non-linear shape model for spruce stems has been developed using a trigonometric model [Bi 2000]. Subsequently, the accuracy of the proposed solution has been evaluated and compared with the accuracy of a linear model [Socha 2000]. The discussed non-linear model for describing the shape of stems is quite satisfactory, however, with regard to the accuracy of the determination of the stem morphological curve and volume this solution is inferior to the linear model.

KEY WORDS

stem shape, shape model, taper model, Norway spruce

Wstęp

Znajomość kształtu drzewa jest podstawą do szacowania miąższości sortymentów na drzewach stojących [Korol, Gadow 2003]. Z kształtem związana jest również dokładność określania miąższości. Kształt strzał drzew można określać między innymi za pomocą tablic zbieżystości, które dla głównych gatunków lasotwórczych Polski zostały opracowane przez Radwańskiego [1955, 1957, 1963, 1974]. Korzystanie z tablic jest pracochłonne i na obecnym etapie rozwoju technik obliczeniowych stało się mało zasadne [Dudzińska 2003]. Coraz częściej kształt drzew leśnych określa się za pomocą wzorów empirycznych nazywanych inaczej modelami zbieżystości lub modelami kształtu. Modele kształtu można podzielić na dwie podstawowe grupy [Korol, Gadow 2003]: modele liniowe i modele nieliniowe. Modele liniowe opisują kształt drzewa za pomocą pewnej liczby grubości z różnych względnych wysokości strzały [Prodan 1965; Sloboda 1984; Socha 2002]. Każda ze średnic wyliczana jest na podstawie oddzielnego równania. Do grupy modeli liniowych zaliczyć można model kształtu strzał opracowany przez Bruchwalda [1980] i zmodyfikowany przez Siekierskiego [1992] oraz Dudzińską [2003]. We wspomnianym modelu kształtu grubości z 15 względnych wysokości strzały określone są na podstawie udziału w miąższości drzewa 15 sekcji, na które podzielono strzałę. Udział ten jest wyliczany według opracowanych wzorów empirycznych. Wadą liniowych modeli kształtu jest fakt, że na ich podstawie możliwe jest bezpośrednie określenie tylko średnic na pewnych stałych wysokościach względnych, natomiast do określania grubości z innych wysokości trzeba stosować interpolację. Najliczniejszą grupę opracowanych w ostatnich dziesięcioleciach modeli kształtu strzał drzew stanowią modele nieliniowe. Rozwiązania tego typu charakteryzują się tym, że za pomocą pojedynczego (rzadziej kilku) równania opisywany jest prze-

JAROSŁAW SOCHA

Zakład Dendrometrii
Wydział Leśny AR
Al. 29-listopada 46
31-425 Kraków
rsocha@cyf-kr.edu.pl

bieg krzywej morfologicznej drzewa [Fang i in. 2000; Flewelling, Raynes 1993; Kilkki, Varmola 1981; Kozak 1988; Wensel, Olson 1995]. Do wad niektórych modeli nieliniowych zaliczyć można zbyt małą elastyczność i słabe dopasowanie funkcji kształtu do rzeczywistego kształtu drzew [Van Laar, Aka 1997] co może skutkować występowaniem na pewnych odcinkach strzały błędów systematycznych. Ich zaletą jest możliwość bezpośredniego określania grubości na dowolnej względnej wysokości strzały.

Celem pracy jest opracowanie nieliniowego modelu kształtu strzał świerka na bazie modelu trygonometrycznego opracowanego przez Bi [2000], sprawdzenie dokładności takiego sposobu określania kształtu oraz porównanie jej z dokładnością opracowanego dla świerka liniowego modelu kształtu [Socha 2002].

Materiał badawczy i metodyka badań

Materiał badawczy stanowią wyniki pomiaru sekcyjnego 1142 drzew pochodzących z pięciu ponad 100-letnich drzewostanów świerkowych nadleśnictw Wisła i Ujszoły (tab. 1). Poza pierśnicą i wysokością drzew do obliczeń wykorzystano grubości pomierzone na różnych wysokościach strzały. Wysokości te wynosiły kolejno: 0,0; 0,5 m; 1,3 m; 1,5 m i dalej aż do wierzchołka drzewa z odstępem jednego metra. W ten sposób dla każdego drzewa uzyskano około 20-46 par zmiennych wysokość – grubość. Łącznie dla całości materiału badawczego liczba par zmiennych wysokość – grubość wynosiła 40 383.

Model kształtu strzały zbudowano na bazie modelu opracowanego przez Bi [2000], który jest rozwinięciem modelu zbieżystości Kozaka [1988]. Ogólna postać funkcji opisującej kształt strzały drzewa jest następująca:

$$d = B^K \quad [1]$$

gdzie:

d – grubość względna na danej wysokości wyliczona jako iloraz grubości z tej wysokości i pierśnicy,

B – funkcja bazowa,

K – wykładnik kształtu, którego wartość zależy od pierśnicy i wysokości drzewa oraz od względnej wysokości położenia danego przekroju na strzale.

Bi [2000] zaproponował następującą postać funkcji bazowej:

$$B = \frac{\ln \sin \left(\frac{\pi}{2} h \right)}{\ln \sin \left(\frac{\pi}{2} b \right)} \quad [2]$$

Tabela 1.
Charakterystyka powierzchni badawczych
Description of study sites

Nadleśnictwo	Położenie	Powierzchnie próbne			Cechy taksacyjne				Wskaźnik		
		Siedliskowy typ lasu	Nazwa powierzchni	Wzniesienie n.p.m.	Obszar [ha]	Wiek	D [cm]	H [m]		Zasobność [m ³ /ha]	
Ujszoły	Laliki	LMG	L600	600	0,75	111	42,4	35,02	I,0	478	0,60
Wisła	Beskidok	LMG	B650	650	1,61	120	44,4	36,68	Ia,8	586	0,71
Wisła	Olecki	LMG	O800	800	1,19	103	40,8	30,11	I,9	413	0,62
Ujszoły	Petkowska	LG	P830	830	1,08	113	50,1	38,15	Ia,3	590	0,66
Ujszoły	Petkowska	LMG	P1000	1000	1,36	122	48,8	36,13	Ia,9	494	0,62

gdzie:

h – wysokość względna,
 b – względna wysokość pierśnicy: $b = \frac{1,3}{TH}$,
 TH – wysokość strzały.

Opracowana przez Bi [2000] funkcja do określania wykładnika K ma postać:

$$K = a_1 + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} h\right) + a_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} h\right) + \frac{a_4 \sin\left(\frac{\pi}{2} h\right)}{h} + a_5 D_{1,3} + a_6 h \sqrt{D_{1,3}} + a_7 h \sqrt{H} \quad [3]$$

gdzie:

h – względna wysokość grubości pomierzonej na danej wysokości (H) wyliczona z ilorazu odległości od podstawy i wysokości drzewa (TH),
 $D_{1,3}$ – pierśnica w korze.

Po podstawieniu B i K do wzoru [1] ostatecznie ogólna postać modelu jest następująca:

$$d = \left(\frac{\ln \sin\left(\frac{\pi}{2} h\right)}{\ln \sin\left(\frac{\pi}{2} b\right)} \right)^{a_1 + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} h\right) + a_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} h\right) + \frac{a_4 \sin\left(\frac{\pi}{2} h\right)}{h} + a_5 D_{1,3} + a_6 h \sqrt{D_{1,3}} + a_7 h \sqrt{H}} \quad [4]$$

gdzie:

d – oznacza względną grubość na względnej wysokości h wyliczoną jako iloraz grubości z tej wysokości i pierśnicy drzewa,
 a_1, \dots, a_7 – parametry modelu

Zmienne wyjaśniające takie jak: pierśnica ($D_{1,3}$), wysokość (TH) oraz pary grubość – wysokość z różnych wysokości strzały posłużyły do oszacowania wartości parametrów modelu (a_1 - a_7). Parametry określono po linearyzacji funkcji kształtu [1], którą uzyskano przez jej zlogarytmowanie:

$$\ln(d) = K \ln(B) \quad [5]$$

Drugim etapem badań było określenie dokładności modelu i porównanie jej z dokładnością opracowanego wcześniej liniowego modelu zbieżności świerka [Socha 2002]. Model ten oparty jest na równaniach służących do określania grubości względnych (d_{wj}) na 20 względnych wysokościach strzały (h_{wj}). Względne grubości wyliczone są zgodnie z wzorem:

$$d_{wj} = \frac{d_j}{D_{1,3}} \quad [6]$$

gdzie:

d_{wj} – względna grubość
 d_j – grubość w korze na względnej wysokości h_j ($h_j=0,0125; 0,05; 0,10; 0,15; \dots ; 0,95$)

Zależność pomiędzy grubościami z poszczególnych wysokości względnych a zmiennymi wyjaśniającymi wyrażono za pomocą równania:

$$d_{wj} = \beta_{0j} + \beta_{1j} \cdot D_{1,3} + \beta_{2j} \cdot TH \quad [7]$$

6 Jarosław Socha

gdzie:

d_{avj} – grubość względna na wysokości h_j ($j=0,0125h, 0,05h; 0,10h; 0,15h; \dots; 0,95h$),

$D_{1,3}$ – pierśnica drzewa w korze,

TH – wysokość strzały.

Wyniki badań

Na podstawie zmiennych wyjaśniających, którymi w równaniu [4] są pierśnica, wysokość, względna wysokość pierśnicy oraz pary zmiennych wysokość – grubość, numerycznie oszacowano wartości parametrów trygonometrycznego modelu kształtu a_1 - a_7 (tab. 2). Istotność poszczególnych parametrów zbadano za pomocą testu t-Studenta. Wszystkie oszacowane parametry równania, poza parametrem a_6 okazały się istotne na poziomie $\alpha=0,01$. Współczynnik korelacji krzywoliniowej dla równania [4] wyniósł 0,991. Jakość dopasowania modelu do danych empirycznych oceniono również na podstawie skorygowanego współczynnika determinacji, którego wartość wynosi 0,982. Oznacza to, że analizowany model w 98,2% wyjaśnia zmienność grubości na różnych wysokościach względnych strzał.

Za podstawowe kryterium oceny modelu kształtu drzewa przyjęto jego dokładność. Rozpatrywano ją w odniesieniu do dokładności określania krzywej morfologicznej oraz w odniesieniu do dokładności określania miąższości strzały oraz 20 części (sekcji), na które podzielono każdą strzałę. Ocena dokładności określania krzywej morfologicznej wykonano na podstawie wielkości błędów określania grubości na wybranych wysokościach strzały. W tym celu dla każdego drzewa na podstawie opracowanego modelu wyliczono grubości na 20 wysokościach względnych strzały (0,0125, 0,05, 0,10, 0,15, itd. aż do wysokości 0,95) oraz porównano je z wartościami rzeczywistymi, które określono na podstawie danych pochodzących z pomiarów drzew. Wielkość błędów scharakteryzowano na podstawie średniej wartości błędu określania grubości oraz odchylenia standardowego błędów (ryc. 1). Błędy średnie określania grubości za pomocą modelu trygonometrycznego na poszczególnych wysokościach względnych na ogół nie przekraczają jednego cm. Wyjątkiem jest podstawa drzewa. Odchylenia standardowe błędów wahają się natomiast w przedziale od około 0,75 cm w części wierzchołkowej drzewa do około 1,95 w części odziomkowej. Stwierdzono pewien związek wielkości błędów określania grubości ze względną wysokością. U podstawy strzały, w zakresie wysokości od ok.0,35 do około 0,55 i przy wierzchołku strzały model trygonometryczny powoduje występowanie przewagi błędów dodatnich, natomiast dla zakresu od około 0,1 do 0,25 oraz od 0,70 do 0,80 wysokości drzewa

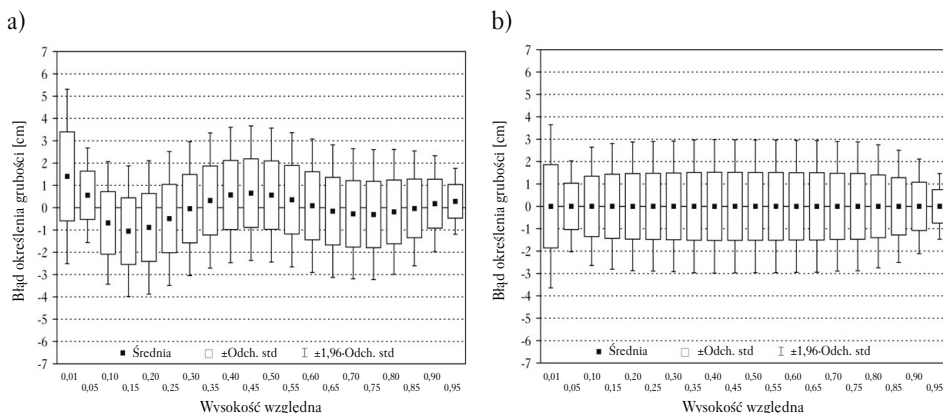
Tabela 2.

Oszacowane parametry trygonometrycznego modelu kształtu strzał świerka i ocena ich istotności
Estimated trigonometric parameters of the shape model for spruce stems and assessment of their significance

	Wartość parametru	Błąd standardowy	Wartość t statystyki	Poziom prawdopodobieństwa	Przedział ufności	
					-95%	95%
a1	2,5397	0,1163	21,8467	0,0000*	2,3118	2,7677
a2	-0,7875	0,0585	-13,4707	0,0000*	-0,9021	-0,6729
a3	-0,1113	0,0103	-10,8105	0,0000*	-0,1314	-0,0911
a4	-1,3421	0,0622	-21,5912	0,0000*	-1,4640	-1,2202
a5	0,0021	0,0003	7,5708	0,0000*	0,0015	0,0026
a6	-0,0061	0,0045	-1,3569	0,1749	-0,0148	0,0027
a7	-0,0186	0,0024	-7,7643	0,0000*	-0,0233	-0,0139

* wartość parametru istotna dla $\alpha=0,01$;

* parameter significant for $\alpha=0,01$



Ryc. 1.

Wartość średnia i odchylenie standardowe błędów absolutnych określania grubości na względnych wysokościach strzały dla modelu trygonometrycznego a) i modelu liniowego b)

Mean value and standard deviation of absolute errors for the determination of diameters along relative stem heights in the trigonometric model a) and linear model b)

występuje przewaga błędów ujemnych określania grubości. Przy zastosowaniu do określania grubości na poszczególnych wysokościach względnych, liniowego modelu kształtu średnie błędy określania grubości są zbliżone do zera (ryc. 1). W przypadku dokładności określania miąższości poszczególnych sekcji, podobnie jak w przypadku dokładności określania grubości stwierdzono, że zastosowanie modelu trygonometrycznego spowodowało występowanie na pewnych odcinkach strzały przewagi błędów dodatnich (u podstawy strzały, w zakresie wysokości od ok. 0,35 do około 0,55 i przy wierzchołku) (ryc. 2, ryc. 3). Na innych wysokościach średnie błędy absolutne i procentowe wtórne określania miąższości są natomiast mniejsze od zera (dla zakresu od około 0,1 do 0,25 oraz od 0,70 do 0,80 wysokości drzewa). W przypadku modelu liniowego średnie błędy absolutne określania miąższości były na poszczególnych wysokościach strzały zbliżone do zera. Jedynie średnia wartość błędu procentowego wtórnego określania miąższości dwóch ostatnich sekcji była wyraźnie większa od zera (ryc. 3.).

W przypadku całej strzały błędy absolutne miąższości określonej na podstawie modelu trygonometrycznego wynosiły od $-0,91 \text{ m}^3$ do $0,82 \text{ m}^3$ (tab. 3). Dla modelu liniowego zakres błędów absolutnych był nieznacznie mniejszy i wynosił od $-0,88 \text{ m}^3$ do $0,76 \text{ m}^3$. Średnia wartość błędu absolutnego analizowanych rozwiązań wynosi $0,01 \text{ m}^3$. Również średnie błędy procentowe i absolutne określania miąższości strzały były zbliżone do zera (tab. 3). W przypadku modelu trygonometrycznego stwierdzono większy rozstęp błędów, większe jest też odchylenie

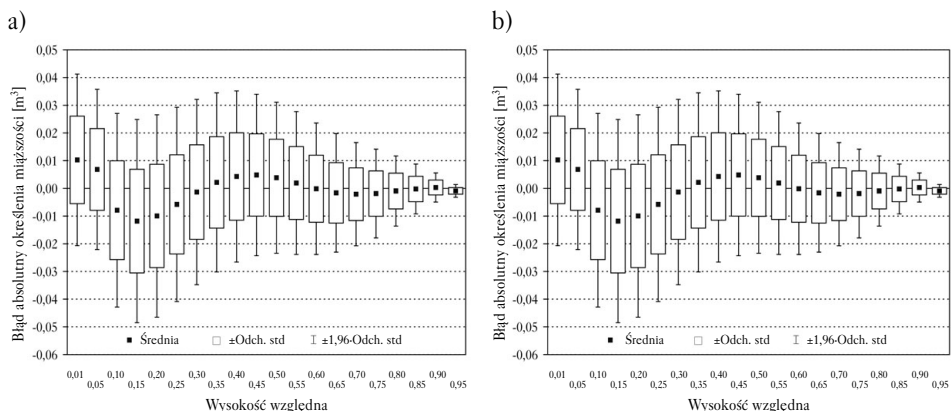
Tabela 3.

Charakterystyka dokładności określenia miąższości całej strzały

Description of the accuracy for the determination of the whole stem volume

Charakterystyka błędu	Błąd absolutny [m^3]		Błąd procentowy wtórny [%]	
	Model trygonometryczny	Model liniowy	Model trygonometryczny	Model liniowy
Średnia	-0,01	-0,01	0,32	0,27
Skrajny błąd ujemny	-0,91	-0,88	-18,4	-16,9
Skrajny błąd dodatni	0,82	0,76	25,6	25,1
Odchylenie standardowe	0,2	0,2	7,2	7

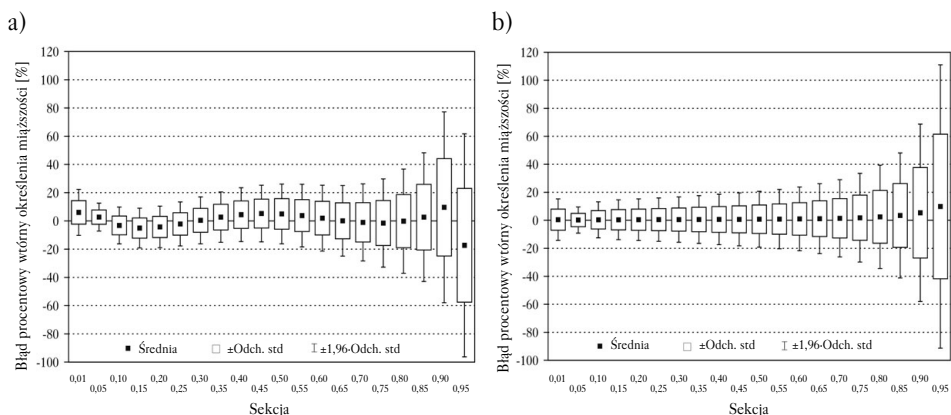
8 Jarosław Socha



Ryc. 2.

Błędy absolutne określenia miąższości wyliczonych dla 20 sekcji według modelu trygonometrycznego a) i modelu liniowego b)

Absolute errors for the determination of the volume calculated for 20 sections in accordance with the trigonometric model a) and linear model b)



Ryc. 3.

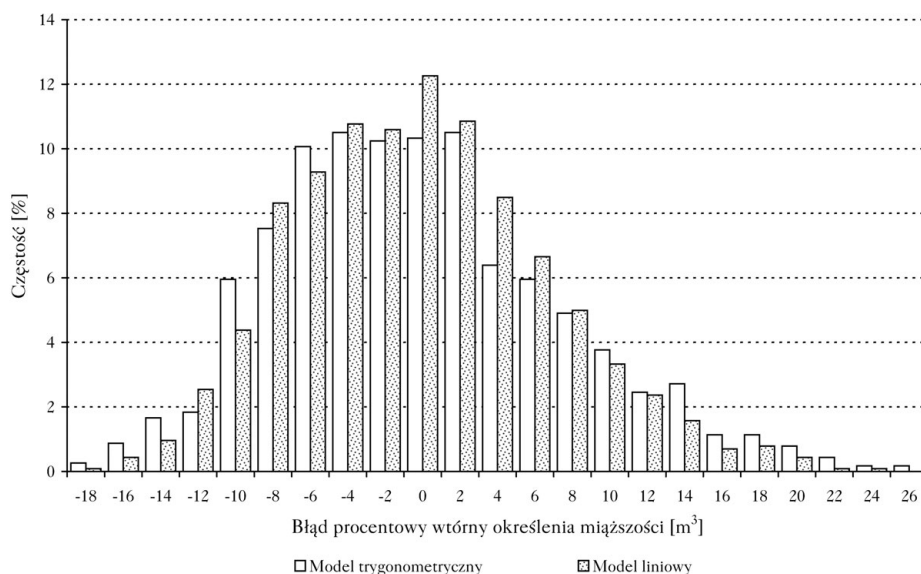
Błędy procentowe wtórne określenia miąższości 20 sekcji według modelu trygonometrycznego a) i modelu liniowego b)

Secondary percentage errors for the determination of the volume calculated for 20 sections in accordance with the trigonometric model a) and linear model b)

standardowe błędów procentowych określenia miąższości. Ponadto w porównaniu z modelem liniowym rozwiązanie to charakteryzuje się większą asymetrią rozkładu błędów procentowych określenia miąższości strzały (ryc. 4).

Podsumowanie wyników i wnioski

✦ Trygonometryczny model kształtu charakteryzuje się dość dużą dokładnością opisu krzywej morfologicznej strzały. Udział wariancji wyjaśnionej wynosi bowiem ponad 98%. Na pewnych odcinkach strzały model ten powoduje jednak występowanie systematycznych błędów określenia grubości. Prowadzi to w konsekwencji do błędów systematycznych określenia miąższości tych jej części.



Ryc. 4.

Rozkład błędów procentowych wtórnych określenia miąższości pojedynczego drzewa według modelu trygonometrycznego i modelu liniowego

Secondary percentage error distribution for the determination of the volume of a single tree in accordance with the trigonometric model and linear model

- ✦ Błędy średnie określania miąższości całej strzały są dla analizowanych rozwiązań zbliżone do zera. Rozkład procentowych błędów miąższości charakteryzuje się jednak skośnością dodatnią.
- ✦ Analizy wskazują na możliwość stosowania trygonometrycznego modelu kształtu do opisu krzywej morfologicznej strzał świerka. W tym celu potrzebna byłaby jednak taka modyfikacja tego rozwiązania, która wyeliminowałaby występowanie na pewnych odcinkach strzały błędów systematycznych.
- ✦ W porównaniu z modelem trygonometrycznym liniowy model kształtu wykazuje większą dokładność określania przebiegu krzywej morfologicznej oraz miąższości zarówno całej strzały jak i jej części. Ponadto jego stosowanie nie jest obciążone błędami systematycznymi określania grubości i miąższości na żadnym odcinku strzały.

Literatura

- Bi H. 2000. Trigonometric Variable-Form Taper Equations for Australian Eucalyptus. For. Sci. 46 (3). 397-409.
- Bruchwald A. 1980. Wykorzystanie badań nad pełnością strzał do budowy tablic zbieżności dla drzewostanów sosnowych. FFP Seria A, 24: 101-109.
- Dudzińska M. 2003. Model udziałów miąższości poszczególnych części strzały dla buka górskiego i nizinnego. Sylwan 4: 28-37.
- Fang Z., Borders B. E., Bailey R. L. 2000. Compatible Volume-Taper Models for Loblolly and Slash Pine Based on a System with Segmented-Stem Form Factors. For. Sci. 46(1): 1-12.
- Flewelling J. W., Raynes L. M. 1993. Variable-shape stem-profile predictions for western hemlock. Part I. Predictions from DBH and total height. Can. J. For. Res. 23: 520-536.
- Kilki P., Varmola M. 1981. Taper curve models for Scots Pine and thier applications. Acta Forestalia Fennica vol. 174: 6-61.
- Korol M, Gadow K. v. 2003. Ein Einheitschaftmodell für die Baumart Fichte. Forstwissenschaftliches Centralblatt Vol.122, Issue 3: 175-183.

- Kozak A. 1988. A variable-exponent taper equation. *Can. J. For. Res.* 18: 1363-1368.
- Kozak A., Smith J. G. H. 1993. Standards for evaluating taper estimating systems. *The Forestry Chronicle*. Vol. 69. 4: 438-444.
- Ormerod D. W. 1986. The diameter-point method for tree taper description. *Can. J. For. Res.* 16: 484-490.
- Prodan M. 1965. *Holzmesslehre*. Sauerländer's Verlag.
- Radwański B. 1955. Tablice miąższości i zbieżności dłużyc, kłód i wyrzynków strzały dla sosny. RNL, t. X, Warszawa.
- Radwański B. 1957. Tablice miąższości i zbieżności dłużyc, kłód i wyrzynków strzały dla świerka. RNL, t. XVII. Warszawa.
- Radwański B. 1963. Tablice miąższości i zbieżności dłużyc, kłód i wyrzynków strzały dla jodły. *Prace IBL* 251.
- Radwański B. 1974. Tablice miąższości i zbieżności części strzały dla olszy. *Prace IBL* 469.
- Siekierski K. 1992. Model zbieżności strzał sosen. *Sylvan*, 10, 43-51.
- Sloboda B. 1984. Bestandesindividuelles biometrisches Schaftformmodell zur Darstellung und zum Vergleich von Formigkeit und Sortimentsausbeute sowie Inventur. *Tagungsbericht d. Sektion Ertragskunde, Neustadt*.
- Socha J. 2002. A taper model for Norway spruce. *Electronic Journal of Polish Agricultural Universities. Forestry*, Volume 5, Issue 2.
- Van Laar A., Aka A. 1997. *Forest Mensuration*. Gttingen, Cuvillier
- Wensel L. C., Olson C. M. 1995. Tree Taper Major Commercial California Conifers. *Hilgardia, A Journal of Agricultural Science Published By the California Agricultural Experiment Station*. Vol. 62, No 3: 1-16.

SUMMARY

The use of a trigonometric taper model for the determination of the shape of spruce stems

The paper presents research results of sectional measurements of diameters of trees from 5 saw-timber spruce stands in the Beskid Śląski and Beskid Żywiecki.

The objective of the studies is to develop a non-linear stem shape model for spruce using a trigonometric model [Bi 2000], to evaluate the proposed solution and compare it with the linear model [Socha 2002].

On the basis of the diameters at breast height, heights and pairs diameter-height from different stem heights, the values of parameters of a trigonometric stem shape model were calculated and compared with the values of a linear shape model developed on the same material.

Taking into consideration the fitting to empirical data, the accuracy of the discussed non-linear model for describing the shape of stems is quite satisfactory. The non-linear correlation coefficient was 0.991 which means that this solution accounts for 98% of variations in the stem morphological curve. However, in terms of the accuracy of determining the morphological curve and volume of a stem or part of it, the non-linear model is less accurate than the linear shape model.