

PRZEPIY W CIECZY I GAZÓW W OŚRODKU POROWATYM PODEJŚCIE STATYSTYCZNE

B. Usowicz

Instytut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN, ul. Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27
e-mail: Usowicz@demeter.ipan.lublin.pl

S t r e s z c z e n i e: W pracy przedstawiono model statystyczny pozwalający na oszacowanie przewodności wodnej, przenikalności i dyfuzyjności gazu z podstawowych danych fizycznych ośrodka porowatego i kilku danych kalibracyjnych. Otrzymane wyniki wskazują, że model ten oszacowuje właściwości transportowe ośrodka z zadawalającą dokładnością.

S ł o w a k l u c z o w e: przewodność wodna, przenikalność gazowa, dyfuzyjność gazu, model statystyczny, ośrodek porowaty.

WSTĘP

Każdy ośrodek fizyczny, wewnątrz którego istnieje zróżnicowane pole fizyczne, zawsze dąży do stanu równowagi. Przejawia się to poprzez przepływ masy i energii z miejsc o wyższym potencjale do miejsc o niższym potencjale. Efektem tego przepływu jest wyrównywanie się pola fizycznego w całym ośrodku.

Wymiana masy w ośrodku porowatym zachodzi na drodze dwóch mechanizmów poprzez przepływ i dyfuzję [1-5]. Głównym bodźcem wymuszającym przepływ masy i dyfuzji jest ciśnienie i koncentracja składników materii. Gradient ciśnienia cieczy i gazu decyduje o przepływie masy w ośrodku, natomiast gradient koncentracji gazu czy substancji decyduje o dyfuzji danego medium.

Zdolność ośrodka porowatego do wymiany masy jest jedną z ważniejszych jego cech. Ilościowo zdolność tą można określać w oparciu o podstawowe właściwości transportowe ośrodka, tj. współczynniki przewodnictwa, przenikalności i dyfuzyjności.

W glebie, dostępność wody, powietrza i składników pokarmowych roślinom i żywym organizmom zależy od prędkości przepływu i dyfuzji tych składników w tym ośrodku. Dlatego też, badanie podstawowych właściwości fizycznych ośrodka

porowatego i ilości wymienianej masy jest w centrum zainteresowania wielu dziedzin nauki [3]. Pozwalają one, z jednej strony, lepiej zrozumieć mechanizmy przenoszenia masy, z drugiej zaś, określić optymalne warunki wzrostu i rozwoju roślin, kontrolować je i regulować przepływem masy.

Celem pracy było przedstawienie metody szacowania przewodności wodnej, gazowej i dyfuzyjności gazu w ośrodku porowatym przy wykorzystaniu modelu statystycznego, krzywej retencji wody oraz podstawowych właściwości fizycznych tego ośrodka i kilku danych kalibracyjnych.

PRZEPLYW CIECZY I GAZU W OŚRODKU POROWATYM

Podstawowe prawa opisujące przepływ masy i energii w ośrodku porowatym, są słuszne przy założeniu, że ośrodek ten jest jednorodny i izotropowy. Pod wpływem gradient temperatury $\partial T / \partial l$ przepływa ciepło z miejsca o temperaturze wyższej do miejsca o temperaturze niższej. Całkowity strumień ciepła Q_T przepływający przez powierzchnię A , która jest prostopadła do kierunku przepływu ciepła wyznaczano z prawa Fouriera:

$$Q_T = -\lambda A \frac{\partial T}{\partial l} \quad (1)$$

gdzie: λ nazywane jest przewodnością cieplną.

Podobnie zachowuje się układ, wewnątrz którego występuje gradient ciśnienia - $\partial p / \partial l$, ($p = \psi \rho_w$, ψ - potencjał wody w ośrodku, ρ_w - gęstość wody) czy gradient stężenia substancji $\partial c / \partial l$. Jeśli tylko przepływ cieczy i gazów ma charakter laminarny (bez zawirowań masy) to opisany jest on równaniem Darcy, gdy bodźcem przepływu jest ciśnienie, p , gdy zaś stężenie, c , równaniem Ficka. Całkowity strumień cieczy i gazu Q_ψ przepływający przez powierzchnię A , która jest prostopadła do kierunku przepływu cieczy i gazu wyznaczano z równania:

$$Q_\psi = -KA \frac{\partial \psi}{\partial l} \quad (2)$$

gdzie: K - współczynnik przewodnictwa hydraulicznego lub pneumatycznego.

Ilość substancji Q_c przemieszczającej się przez powierzchnię A wyliczano z równania:

$$Q_c = -DA \frac{\partial c}{\partial l} \quad (3)$$

gdzie: D współczynnik dyfuzyjności.

Laminarny i stacjonarny przepływ cieczy lub gazu przez prostą kapilarę o przekroju kolistym opisywany jest równanie Hagena-Poiseuillea. Objętość medium, która w czasie t pod działaniem różnicy ciśnień przepływa przez rurkę kapilarną o promieniu r i długości l obliczana jest ze wzoru:

$$\Theta_{\psi} = \frac{\rho g r^2 A}{8\eta} \frac{\Delta\psi}{l} = \frac{KA}{l} \Delta\psi = \frac{1}{R} \Delta\psi \quad (4)$$

gdzie: Q_{ψ} jest szybkością objętościową przepływu, r oznacza promień kapilary, g przyspieszenie ziemskie, η jest lepkością medium, K - przewodnością hydrauliczną lub gazową, $\Delta\psi$ - spadkiem potencjału w poprzek warstwy, A - polem warstwy, l - jej miąższością, R - opornością.

DYFUZYJNOŚĆ GAZU W OŚRODKU POROWATYM

Dyfuzyjność gazu D w próbce o grubości l może być reprezentowana poprzez dyfuzyjność danego gazu w powietrzu D_o , dyfundującego przez kapilarę o równoważnym promieniu r i długości l_r . Ilość dyfundującego gazu przez badany ośrodek wyznaczamy z prawa Ficka mnożąc gęstość strumienia gazu q_c przez powierzchnię przepływu A :

$$Q_c = q_c A = \frac{DA}{l} (c_1 - c_2) = \frac{D_o \pi r^2}{l_r} (c_1 - c_2) = \frac{1}{R} (c_1 - c_2), \quad (5)$$

podobnie w poszczególnych porach o powierzchni A_i i długości l_i ilość dyfundującego gazu wyznaczano z równania:

$$Q_{ci} = q_{ci} A_i = \frac{D_i A_i}{l_i} (c_1 - c_2) = \frac{D_o \pi r_{ij}^2}{l_{ij}} (c_1 - c_2) = \frac{1}{R_{ij}} (c_1 - c_2) \dots \quad (6)$$

gdzie: r_{ij} promień kapilary w punkcie ij , l_{ij} - jej długość, c_1 i c_2 - stężenie gazu.

PODSTAWOWE ZAŁOŻENIE MODELU STATYSTYCZNEGO

Można przyjąć, że ośrodek porowaty odwzorowywany będzie przez układ (sieć) mniej lub bardziej cylindrycznych kanałów powiązanych między sobą. Promień kapilary, r może w jednym przypadku reprezentować elementarną

kapilarę np. powstałą między cząsteczkami gleby, w drugim przypadku średni promień hydrodynamiczny [5].

Spojrzenie na ośrodek porowaty jako sieć połączonych kapilar pozwala na zastosowanie statystycznego podejścia do opisu przepływu cieczy. W skład ośrodka porowatego wchodzi faza stała i to jej konfiguracja decyduje o rozkładzie porów w tym ośrodku, a tym samym warunkuje ona przebieg krzywej retencji wodnej ośrodka.

OPIS STATYSTYCZNEGO MODELU PRZEWODNOŚCI HYDRAULICZNEJ I DYFUZYJNOŚCI GAZU

Statystyczny model skonstruowano tak, że jednostkową objętość gleby w skład, której wchodzi cząstki fazy stałej, ciekłej i gazowej przedstawiono jako układ zbudowany z elementarnych figur geometrycznych, które tworzą warstwy nakładające się na siebie. Przyjęto, że ciecz, która występuje między cząsteczkami i jej przepływ przez układ zobrazowany będzie przez sieć kapilar. Połączenia kapilar w warstwie będą odwzorowywane przez równoległe połączenia oporników hydraulicznych, natomiast między warstwami połączenia kapilar przez szeregowo połączenia oporników [5].

Średnie przewodnictwo hydrauliczne sieci kapilar obrazujących ośrodek porowaty szacowano z równania:

$$K = \frac{p\gamma}{8\eta} \sqrt[4]{\frac{1}{u \sum_{j=1}^L \frac{P(x_{1j}, \dots, x_{kj})}{x_{1j} \frac{r_1^4}{l_1} + \dots + x_{kj} \frac{r_k^4}{l_k}}} \quad (7)$$

gdzie: L jest liczbą wszystkich możliwych kombinacji ułożenia kapilar, x_1, x_2, \dots, x_k - liczba kapilar powstałych między cząstkami ośrodka o promieniach kapilar r_1, r_2, \dots, r_k i długościach l_1, l_2, \dots, l_k , u liczba stopni swobody (liczba równoległych połączeń oporników hydraulicznych), przy czym: $\sum_{i=1}^k x_{ij} = u, j=1, 2, \dots, L$. Spełniony

musi być też warunek: $\sum_{j=1}^L P(X = x_j) = 1$.

Prawdopodobieństwo $P(x_{ij})$ wyliczane było z rozkładu wielomianowego:

$$P(x_{1j}, \dots, x_{kj}) = \frac{u!}{x_{1j}! \dots x_{kj}!} f_1^{x_{1j}} \dots f_k^{x_{kj}} \quad (8)$$

gdzie: $P(x_{ij})$ - podaje prawdopodobieństwo tego, że u niezależnych próbach uzyskamy dokładnie x_{ij} wyników typu j , jeśli prawdopodobieństwo wyniku i w pojedynczej próbie wynosi f_i , $i = 1, 2, \dots, k$. W naszym przypadku f_1, f_2, \dots, f_k są to zawartości wody i powietrza w jednostce objętości i są one traktowane jako prawdopodobieństwa uzyskania wyniku typu i w pojedynczej próbie.

Ogólne równanie względnej dyfuzyjności gazu dla takiego układu kapilar można zapisać jako:

$$\frac{D}{D_o} = \frac{\pi}{u \sum_{j=1}^L \frac{P(x_{1j}, \dots, x_{kj})}{x_{1j} \frac{r_1^2}{l_1} + \dots + x_{kj} \frac{r_k^2}{l_k}}} \quad (9)$$

Przyjęto pewne uproszczenia odnośnie ośrodka porowatego. Opisywano go sześcioma różnymi kapilarami o jednakowych długościach. Wyznaczenia promieni kapilar dokonywano w oparciu o krzywe retencji wody w ośrodku, natomiast ich długości oraz stopnie swobody modelu u dokonano na drodze obliczeń, w taki sposób, aby uzyskać najlepszą zgodność między wartościami obliczonymi i zmierzonymi (wartościami kalibracyjnymi).

Prawdopodobieństwo wylosowania w pojedynczej próbie określonej kapilary w badanej próbce ośrodka czy gleby f_i , $i = 1, \dots, k$, wyznaczano również w oparciu o krzywe retencji wody w glebie. Przyjęto, że krzywe retencji wody dzieli się na k niekoniecznie równych części. Dla każdej takiej części wyznaczano średni promień kapilary (lub potencjał wody) i odpowiadające im zawartości wody, które przyjęto jako prawdopodobieństwa uzyskania wyniku typu i w pojedynczej próbie.

Zgodność modelowanych i zmierzonych danych określano za pomocą średniego błędu kwadratowego (σ_b) i maksymalnego błędu względnego (η_b):

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_{mi} - f_{ci})^2}{k}} \quad (10)$$

gdzie: f_{mi} - wartość zmierzona, f_{ci} - wartość obliczona, $k = n - 1$ jeśli $n < 30$ i $k = n$ jeśli $n > 30$, n - liczba danych. Maksymalny błąd względny wyliczano z równania:

$$\eta_b = \max_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \left| \frac{f_{mi} - f_{ci}}{f_{mi}} \right| 100\% \right\} \quad (11)$$

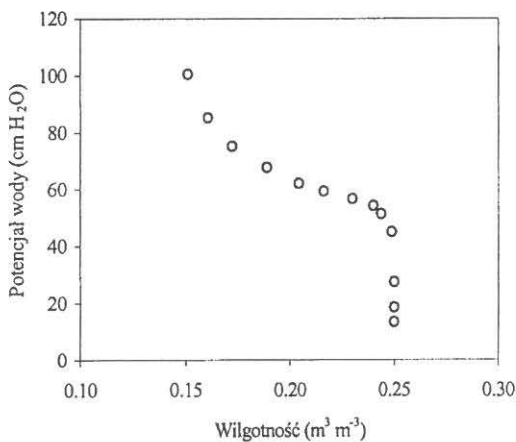
WYNIKI

Dokonano oszacowania przewodności hydraulicznej, przenikalności i dyfuzyjności gazu przy użyciu modelu statystycznego [6]. Dane pomiarowe użyte do obliczeń i porównań z wynikami otrzymanymi z modelu statystycznego pochodziły z literatury [1,2]. Z krzywej retencji wody w ośrodku porowatym Rys. 1, wyznaczono pięć średnich promieni kapilar oraz odpowiadające im zawartości wody. Promień szóstej kapilary odpowiadającej za przepływ na drodze pary wodnej oszacowano eksperymentalnie. Dane te wprowadzono do modelu statystycznego oraz zestawiono w Tabeli 1.

Tabela 1. Parametry modelu przewodności wody

Table 1. Water conductivity model parameters

Indeks, $i =$	1	2	3	4	5	6
$r_i, (\mu\text{m})$	62.3	26.6	22.1	17.5	14.9	0.6
$\theta_i (\text{m}^3 \text{m}^{-3})$	0.0063	0.0395	0.0318	0.0215	0.151	



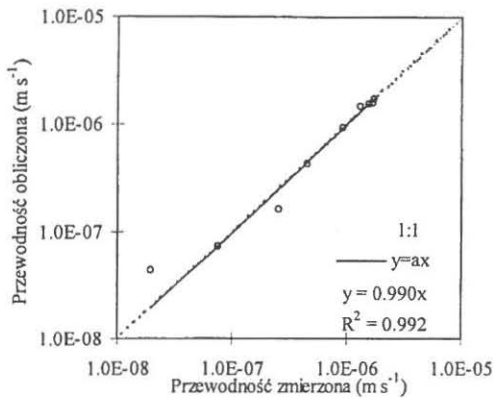
Rys. 1. Krzywa retencji wody piaskowca Hygiene. Dane pomiarowe ° pochodzą z pracy [2].

Fig. 1. Soil water potential of Hygiene rock as a function of water content.

Następnie, korzystając z wartości przewodności hydraulicznej ośrodka w strefie pełnego nasycenia dobrano długości kapilar jak i stopień swobody u . Wynosiły one odpowiednio: stopień swobody równy był $u = 7$, długość kapilar była jednakowa i wynosiła $l = 136783 \text{ m}$.

Obliczone i zmierzone wartości przewodności hydraulicznej piaskowca Hygiene przedstawiono na Rys. 2. Obliczona przewodność hydrauliczna dla większości danych była w dobrej zgodności z danymi pomiarowymi. Znaczące różnicę w przewodności zaobserwowano przy niskim uwilgotnieniu piaskowca. Ta

różnica była prawdopodobnie wynikiem przeszacowania promienia kapilary odpowiadającej za przepływ wody na drodze pary wodnej w modelu statystycznym. Proces przepływu wody w stanie niskiego uwilgotnienia ośrodka jest o wiele bardziej skomplikowany niż w stanie średniego i dużego uwilgotnienia, i nie jest on



Rys. 2. Porównanie przewodności hydraulicznej obliczonej i zmierzonej piaskowca Hygiene. Na rysunku podano równanie regresji liniowej i współczynnik determinacji R^2 . Dane pomiarowe pochodzą z pracy [2]

Fig. 2. Comparison of calculated and measured hydraulic conductivity of Hygiene rock. Parameters of linear regression and coefficients of determination, R^2 are also shown

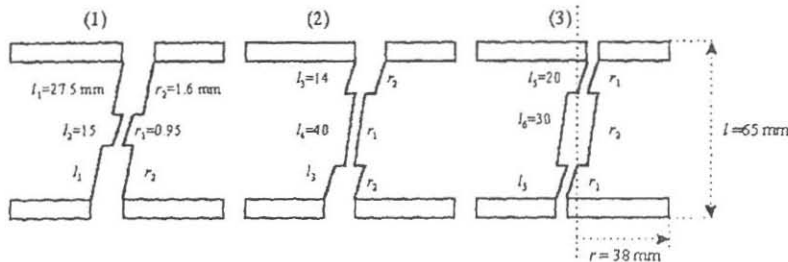
ność gazu D/D_0 dla rzeczywistych układów kapilar, które tworzyły ośrodek porowaty o określonych parametrach geometrycznych (Rys. 3). Porównano otrzymane wyniki z wynikami pochodzącymi z pomiarów i z modelu Balla [1]. Przeprowadzono również analizę regresji a wyniki przedstawiono na Rys 4.

Wartości przenikalności helu obliczone z modelu statystycznego i otrzymane z pomiarów są w dobrej zgodności, $R^2 > 0.99$ (Rys. 4) [5]. Współczynniki kierunkowe

jeszcze dostatecznie poznany. Dlatego też wymaga on dalszych badań, głównie w celu poznanie i wyodrębnienia głównych czynników determinujących ten przepływ.

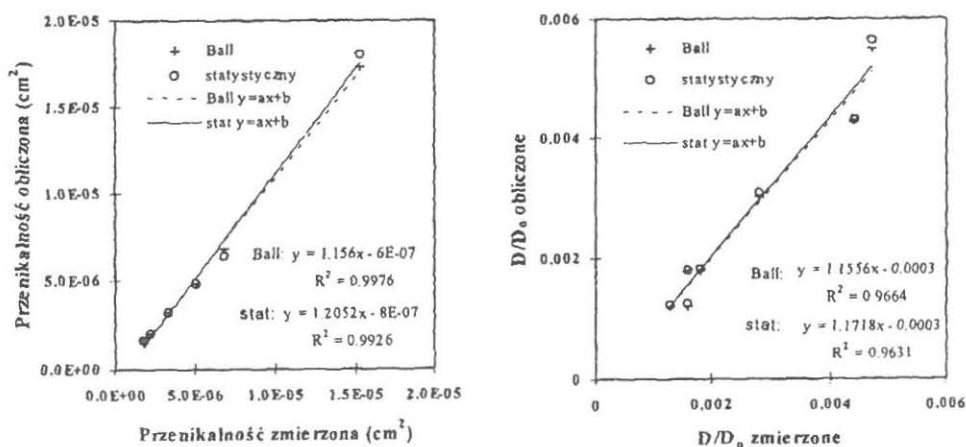
Wysoka wartość współczynnika determinacji $R^2 = 0.992$, oraz średni błąd kwadratowy i maksymalny błąd względny $\sigma_b = 6.43 \cdot 10^{-7}$, $\eta_b = 126\%$ wskazują na dość dobrą zgodność wyników otrzymanych z modelu statystycznego ze zmierzonymi. Ta ostatnia wartość odnosiła się do przewodności wodnej piaskowca obliczonej przy najniższej wartości wilgotności, dla pozostałych wilgotności były one niższe od 35% ($\eta_b < 35\%$).

Obliczono z modelu statystycznego przenikalność gazową helu $K' = \eta K / \rho g$ (cm^2) oraz względną dyfuzyj-



Rys. 3. Układy kapilar połączonych szeregowo [1]

Fig. 3. Scheme of serial connection of capillaries



Rys. 4. Porównanie przenikalności i dyfuzyjności względnej obliczonej z modelu Balla (Ball) i statystycznego (stat) z danymi pomiarowymi oraz odpowiadające im równania regresji i współczynniki determinacji R^2 . Dane pomiarowe pochodzą z pracy [1].

Fig. 4. Comparison of permeability and relative diffusivity of gas obtained from calculation model of Ball (Ball) and statistical model (stat) with measured data. Parameters of linear regression and coefficients of determination R^2 are also shown.

równań regresji w obydwu przypadkach były nieco większe od jedności, przy niewielkim ujemnym wyrazie wolnym, co wskazuje, że model ten zawyża nieco wartości przenikalności helu. Średni błąd kwadratowy i maksymalny błąd względny dla modelu Balla wynosiły: $\sigma_b = 8.27 \cdot 10^{-7}$, $\eta_b = 13.1\%$, a dla modelu statystycznego: $\sigma_b = 1.14 \cdot 10^{-6}$, $\eta_b = 17.9\%$.

Obliczone wartości względnej dyfuzyjności helu w sztucznym ośrodku porowatym oraz wyznaczone parametry równania regresji podano na Rys. 4. W tym przypadku również wyniki obliczeń potwierdzają dobrą zgodność z danymi pomiarowymi, $R^2 > 0.96$. Współczynniki kierunkowe równań regresji, modelu statystycznego i modelu Balla [1] są podobne i nieco większe od jedności, co znaczy, że modele ten nieco zawyżają wyniki. Średni błąd kwadratowy i maksymalny błąd względny dla modelu Balla wynosiły: $\sigma_b = 0.00039$, $\eta_b = 25\%$, a dla modelu statystycznego: $\sigma_b = 0.00043$, $\eta_b = 21.7\%$.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiona statystyczny model przewodności hydraulicznej (pneumatycznej) i dyfuzyjności. Statystyczny model pozwolił opisać powiązania składników ośrodka porowatego z jego bezpośrednio mierzalnymi wielkościami

fizycznymi, tj. określić hydrauliczne, pneumatyczne i dyfuzyjne właściwości ośrodka z krzywej retencji wody w ośrodku porowatym, parametrów geometrycznych sztucznych układów kapilar i kilku danych kalibracyjnych.

Przeprowadzone obliczenia w oparciu o statystyczny model i porównanie wyników obliczeń z danymi pomiarowymi oraz analizy statystyczne dały podstawę do stwierdzenia, że model ten pozwala przewidywać właściwości przenoszenia masy w ośrodku z zadawalającą dokładnością. Potwierdza on poprawność przyjętych założeń i zastosowanych uproszczeń podczas budowy modelu, wskazuje również, że parametry tego modelu zostały dobrane prawidłowo.

PIŚMIENNICTWO

1. **Ball B.C.:** Modelling of soil pores as tubes using gas permeabilities, gas diffusivities and water release. *J. Soil Sci.*, 32, 465-481, 1981.
2. **Brooks R.H., Corey A.T.:** Hydraulic properties of porous media. *Hydrology papers*. Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 3, 1-27, 1964.
3. **Kutilek M., Nielsen D.R.:** *Soil Hydrology*. Cremlingen-Destedt: Catena Verl., 1994.
4. Nitao J.J., Bear J.: Potentials and their role in transport in porous medium. *Water Resour. Res.*, 32, 225-250, 1996.
5. **Usowicz B.:** Statystyczno-fizyczne modele przepływu masy i energii w ośrodku porowatym. *Acta Agrophysica*, 29, 1-112, 2000.
6. **Usowicz B.:** Soil Electric, Hydraulic, Pneumatic, Thermal and Diffusivity Properties Software Package 1.0. Copyright Institute of Agrophysics PAS, Lublin, 2000.

FLOW OF LIQUID AND GASES IN POROUS MEDIUM - STATISTICAL APPROACH

B. Usowicz

Institute of Agrophysics PAS, Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27, Poland

S u m m a r y. In this paper a method of determination of hydraulic conductivity, permeability and diffusivity of gas in porous medium is presented. The obtained results confirmed that this method predict the transport properties of porous medium with the satisfactory accuracy.

K e y w o r d s: hydraulic conductivity, permeability and diffusivity of gas, statistical model, porous medium.