

## Rozwiązanie nieliniowego jednowymiarowego zagadnienia konsolidacji gruntów

### Abstract

**A solution of a non-linear one-dimensional soil consolidation.** The paper presents the numerical solution of one-dimensional consolidation of soil with variation in soil properties during consolidation course. Presented approach gives a numerical scheme of boundary problem solution when compressible soil is loaded by changeable and constant stress path.

*Key words: consolidation, differential equation, numerical solution*

### Dwa podstawowe zagadnienia konsolidacji

W pracy [3] rozpatrzono jednowymiarowe zagadnienie konsolidacji ośrodka trójfazowego (gruntu) z uwzględnieniem zmian jego charakterystyk w procesie konsolidacji.

W niniejszej pracy rozpatrzemy dwa typy zagadnień.

**I. Pierwsze zagadnienie** dotyczy konsolidacji gruntu w konsolidometrze pod wpływem obciążenia zewnętrznego z drenażem na górnej i dolnej powierzchni. Obciążenie zwiększane jest liniowo, poczynając od zerowego do pewnej wartości, a następnie jest stałe.

Równanie konsolidacji dla takiego zagadnienia ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = & \frac{1}{\omega \gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1 + \varepsilon}{a \gamma \omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1 + \varepsilon}{\omega} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} (1 + \xi) + \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} - \xi \right] \times \\ & \times \int_0^x \frac{a}{(1 + \varepsilon)^2} \left( \frac{\partial q}{\partial t} - \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$x$  – współrzędna pionowa,

$t$  – czas,

$H = H(x, t)$  – nadwyżka ciśnienia wody w porach gruntu,

$q = q(x, t)$  – obciążenie powierzchni gruntu,

$\varepsilon$  – wskaźnik porowatości gruntu,

$a = a(x, t, H)$  – współczynnik ścisłości,

$k = k(x, t, H)$  – współczynnik filtracji,

$\gamma$  – ciężar objętościowy wody,

$\gamma_m$  – ciężar objętościowy gruntu,

$$\omega = 1 + \frac{\varepsilon(N + \alpha)}{(N + 1) a p} \quad (2)$$

\*Katedra Zastosowań Matematyki SGGW, ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa.

$$\xi = \frac{N \varepsilon}{(N + 1) ap} \quad (3)$$

$$N = \frac{p_0}{p} (N_0 + \alpha) - \alpha \quad (4)$$

gdzie:

$p$  – ciśnienie hydrostatyczne,

$p_0$  – ciśnienie atmosferyczne,

$\alpha$  – współczynnik w prawie Henry'ego charakteryzujący rozpuszczalność powietrza.

W warunkach doświadczenia można przyjąć, że warstwa gruntu w konsolidometrze jest "cienka" ( $q \geq \gamma_m h$ ) i wówczas:

$$p = p_0 + \gamma H \quad (5)$$

$$\sigma = q - \gamma H \quad (6)$$

Funkcje  $k = k(\varepsilon)$  i  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$  aproksymujemy funkcjami:

$$k = A \exp \beta \varepsilon \quad (7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 c \ln (1 + b\sigma) \quad (8)$$

gdzie:  $A, \beta, c, b$  – stałe.

Wówczas:

$$a = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = \frac{cb}{1 + b\sigma} \quad (9)$$

Warunki brzegowe (przy uwzględnieniu drenażu na górnej i dolnej powierzchni) mają postać:

$$H = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0 \quad \text{i} \quad x = h \quad (10)$$

zaś warunek początkowy:

$$H = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0 \quad (11)$$

Oszacowanie trzeciego składnika po prawej stronie równania (1) dowodzi, że nie wnosi on istotnego elementu do rozwiązania, a zatem może być pominięty.

**II. Drugie zagadnienie** dotyczy konsolidacji warstwy gruntu w warunkach ujemnych wartości ciśnienia wody w porach i znajdującej się na nieprzepuszczalnym podłożu. Przyrost miąższości warstwy gruntu przebiega według zależności liniowej, a następnie zatrzymuje się. Równanie przepływu w tym przypadku ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = & \frac{\gamma_m}{\gamma \omega} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1 + \varepsilon}{a \gamma \omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{1 + \varepsilon}{\omega} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} (1 + \xi) + \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} - \xi \right] \times \\ & \times \int_0^x \frac{a}{(1 + \varepsilon)^2} \left( \gamma_m \frac{\partial h}{\partial t} - \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:

$$p = p_0 + \gamma H - \gamma x \quad (13)$$

$$\sigma = \gamma_m h - \gamma H - (\gamma_m - \gamma)x$$

Warunki brzegowe mają postać:

$$H = h(t) \quad \text{dla} \quad x = h(t) \quad (14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0$$

Przyrost ciśnienia porowego w gruncie prowadzi do pełnego nasycenia wodą poprzez zanik powietrza znajdującego się w porach gruntu, wówczas  $N = 0$ .

Ze wzoru (2) wynika, że przy  $N \rightarrow 0$

$$\omega \rightarrow 1 + \frac{\varepsilon\alpha}{ap}$$

zatem  $\omega \neq 1$ , gdy tymczasem przy pełnym nasyceniu wodą gruntu powinno być  $\omega = 1$ . Tak więc w równaniu konsolidacji trójfazowego gruntu występuje nieciągłość współczynników.

Należałoby sprawdzić, w jakim stopniu zgodne jest zadanie konsolidacji cienkiej warstwy trójfazowego gruntu z analogicznym zagadnieniem dla modelowanego gruntu całkowicie nasyconego.

Wprowadzamy bezwymiarowe współczynniki:

$$\alpha_H = \frac{H}{H_M}; \quad \alpha_x = \alpha_h = \frac{h}{h_M};$$

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_M}; \quad \alpha_q = \frac{q}{q_M}; \quad \alpha_t = \frac{t}{t_M};$$

(15)

$$\alpha_\gamma = \frac{\gamma}{\gamma_M}; \quad \alpha_\omega = \frac{\omega}{\omega_M}; \quad \alpha_k = \frac{k}{k_M};$$

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_M}; \quad \alpha_a = \frac{a}{a_M}$$

gdzie indeks  $M$  oznacza funkcje opisujące model.

W pracy [1] wykazano, że:

$$\alpha_k = \alpha_a = \alpha_\varepsilon = \alpha_\sigma = 1 \quad (16)$$

Po wprowadzeniu współczynników bezwymiarowych do równania równowagi i równania konsolidacji otrzymujemy równania:

$$\sigma_M = \alpha_q q_M - \alpha_\gamma \alpha_n \gamma_M H_M \quad (17)$$

$$\frac{\partial H_M}{\partial t_M} = \frac{\alpha_q}{\alpha_\gamma \alpha_H \alpha_\omega} \frac{\partial q_M}{\partial t_M} +$$

$$+ \frac{a_t (1 + \varepsilon_M)}{\alpha_x^2 \alpha_\gamma \alpha_\omega \gamma_M a_M \omega_M} \frac{\partial}{\partial x_M} \left( k_M \frac{\partial H_M}{\partial x_M} \right) \quad (18)$$

Z równań tych wynika, że  $\alpha_\omega = 1$  i dla  $\gamma = \gamma_M$  mamy:

$$H = H_M, \quad q = q_M,$$

$$\frac{t}{x^2} = \left( \frac{t}{x^2} \right)_M \quad (19)$$

Ostatnie równania pozwalają wykonywać na komputerze obliczenia konsolidacji tylko dla cienkiej jednej warstwy gruntu.

### Rozwiązanie zagadnienia pierwszego

Równanie (1) można przedstawić w następującej postaci kanonicznej:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} + \left[ d(x, t, H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] +$$

$$+ \varphi \left( x, t, H \frac{\partial H}{\partial x} \right) \quad (20)$$

gdzie:

$$d(x, t, H) = \frac{k(1 + \varepsilon)}{\gamma a \omega}$$

$$\varphi \left( x, t, H, \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{1}{\omega \gamma} \frac{\partial q}{\partial t} -$$

$$- \left\{ \frac{k(c - \varepsilon - 1)}{c \omega} + \right.$$

$$+ \frac{k \varepsilon (1 + \varepsilon) (N + \alpha)}{a^2 \omega^2 p^2 (1 + N)} \times$$

$$\left. \times \left[ \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - ap \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{\varepsilon} \right) + 1 \right] \right\} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2$$

Przyjmujemy następujące warunki:  
warunek początkowy

$$H(x, t) = 0 \quad \text{dla } t = 0 \quad (22)$$

warunki brzegowe

$$H(x, t) = 0 \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } x = h \quad (23)$$

W pracy [3] została omówiona metoda zamiany równania różniczkowego (20) z warunkami (22) i (23) odpowiednim równaniem różnicowym:

$$y_{\bar{t}} = (by_{\bar{x}})_x + \psi[x, t, y, \lambda(y)] \quad (24)$$

z warunkami:

$$y = 0 \quad \text{dla } t = 0$$

$$y = 0 \quad \text{dla } x = 0 \text{ i } x = h \quad (25)$$

W pracy [3] podano również schemat rozwiązania zagadnienia (24) – (25).

Wykorzystując ten schemat w niniejszej pracy wykonano obliczenia numery-

czne, przyjmując następujące wielkości parametrów (dane eksperymentalne otrzymano z Instytutu Hydromelioracyjnego w Moskwie):

$$A = 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ cm/s};$$

$$b = 65 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{g};$$

$$c = 62 \cdot 10^{-3}; \quad \beta = 12;$$

$$\gamma_m = 2,16 \text{ g/cm}^3; \quad \gamma = 1,0 \text{ g/cm}^3;$$

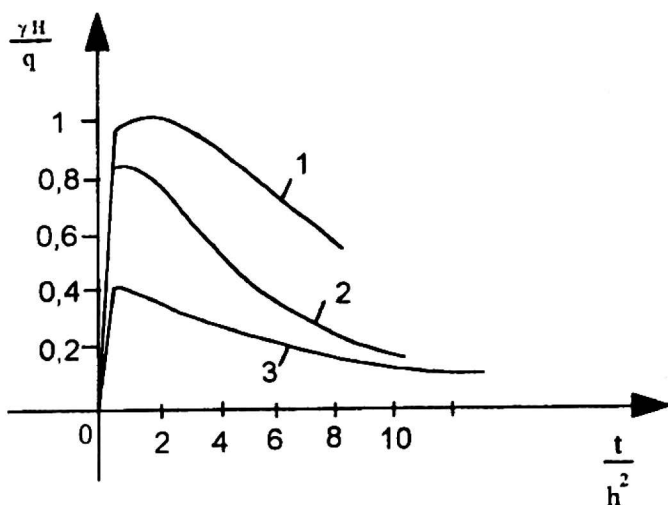
$$\varepsilon = 0,62; \quad P_0 = 1000 \text{ g/cm}^2.$$

Rysunki 1, 2 i 3 przedstawiają wyniki obliczeń konsolidacji gruntu przy jednakowych obciążeniach i różnym stopniu nasycenia gruntu wodą. Na osi rzędnych podano bezwymiarowe wielkości stosunku  $\gamma H$  (gdzie  $H$  – ciśnienie przy  $x = \frac{h}{2}$ )

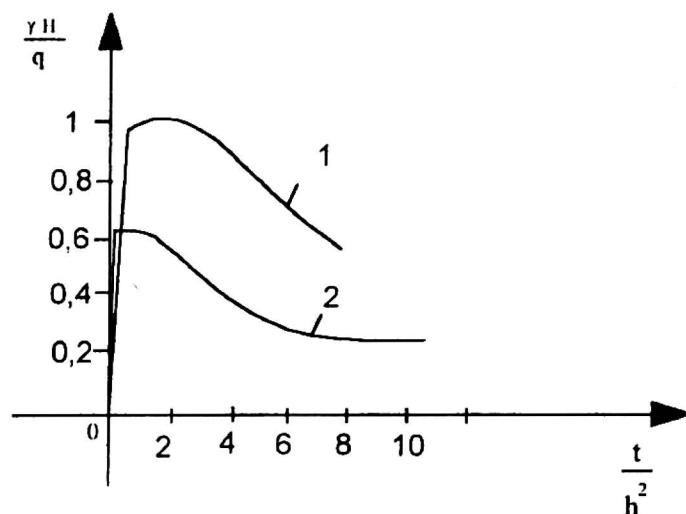
do maksymalnej wielkości przyłożonego obciążenia. Na osi odciętych podano stosunek czasu do kwadratu grubości warstwy [z zależności (19) wynika, że stosunek ten jest stały dla różnych wartości  $h$ ].

Wszystkie obliczenia przeprowadzono dla obciążeń, które początkowo liniowo wzrastają, a następnie są stałe. Czas liniowego wzrostu obciążenia jest na tyle mały w stosunku do trwania obciążenia, że można przyjąć, iż pełne obciążenie następuje już w momencie początkowym.

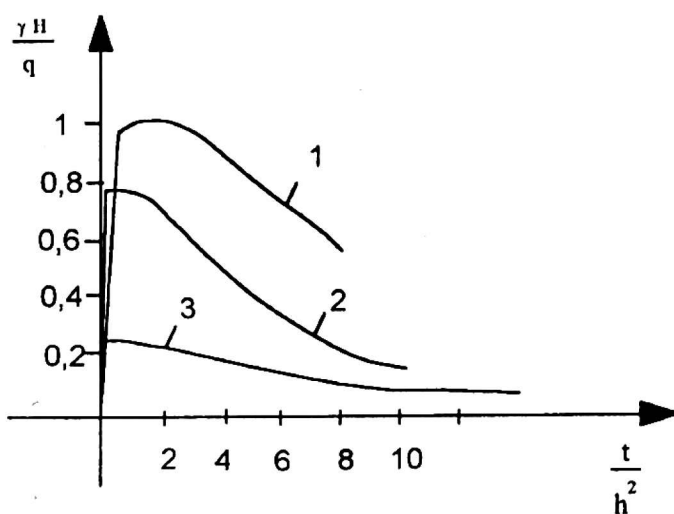
W trakcie obciążenia wilgotność gruntu praktycznie nie zależy od stopnia ściśliwości, tak więc zmniejszenie objętości gruntu odbywa się kosztem zmniejszenia przestrzeni zajętej przez powietrze. Zmniejszenie porowatości powoduje więc wzrost ciśnienia powietrza. Część powietrza ulega rozpuszczeniu w wodzie wypełniającej pory gruntu. Gdy jednak objętość powietrza jest stosunkowo duża,



Rys. 1. Zależność ciśnienia od czasu dla obciążenia  $60 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\gamma = 1,69 \text{ g/cm}^2$  (\*)



Rys. 3. Zależność ciśnienia od czasu dla obciążenia  $20 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\gamma = 1,69 \text{ g/cm}^2$  (\*)



Rys. 2. Zależność ciśnienia od czasu dla obciążenia  $40 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\gamma = 1,69 \text{ g/cm}^2$  (\*)

to tylko niewielka część ulega temu procesowi i wówczas można przyjąć, że podwyższenie ciśnienia porowego następuje według prawa Boyle'a-Mariotta.

Przy dalszym wzroście ciśnienia, gdy powietrze zostaje sprężone do niewielkiej objętości, rola powietrza rozpuszczonego staje się większa. Dalsze ściskanie gruntu

powoduje podwyższenie ciśnienia wody w porach, które w końcu osiąga wartość graniczną ( $P_g$ ) odpowiadającą sytuacji pełnego rozpuszczenia powietrza. Ciśnienie  $P_g$  można obliczyć z zależności (4), kładąc  $N = 0$  i wówczas:

$$P_g = P_0 \left( 1 + \frac{N_0}{\alpha} \right)$$

Grunt wówczas staje się całkowicie nasycony wodą i jego konsolidację opisuje równanie (1), w którym należy przyjąć  $\omega = 1$ . Prędkość spadku ciśnienia w porach wzrasta wraz ze wzrostem współczynnika przy drugim składniku po prawej stronie równania (1). Gdy  $\omega = 1$ , prędkość ta równa jest prędkości dla całkowicie nasyconego gruntu. Pojawienie się powietrza w porach gruntu powoduje wzrost  $\omega$  i prędkość rozpraszania ciśnienia porowego maleje.

(\*)  
 1)  $G_0 = 1,00$ ;  $\omega = 22,6$ ;  $N_0 = 0$ .  
 2)  $G_0 = 0,80$ ;  $\omega = 18,1$ ;  $N_0 = 0,25$ .  
 3)  $G_0 = 0,68$ ;  $\omega = 15,5$ ;  $N_0 = 0$ .

Wpływ względnej zawartości powietrza  $N_0$  na charakter zmian ciśnienia w porach można przeanalizować na rysunku 1, 2 i 3.

Na rysunku 1 krzywa 1 odnosi się do gruntu nasyconego, krzywa 2 ilustruje zmiany ciśnienia w gruncie przy początkowej względnej zawartości powietrza  $N_0 = 0,25$ . Gdy obciążenie gruntu jest duże, to okazuje się, że w początkowym momencie powietrze jest całkowicie rozpuszczone i krzywe 1 i 2 przebiegają "prawie" równolegle. W miarę upływu czasu ciśnienie maleje i w porach znów pojawia się powietrze ( $N > 0$ ,  $\omega > 1$ ), krzywa 2 staje się bardziej płaska niż krzywa 1. Krzywa 3 na rysunku 1 odpowiada bardzo dużej początkowej zawartości powietrza ( $N_0 = 0,46$ ).

Ze wzoru (20) wynika, że dla pełnego rozpuszczenia takiej ilości powietrza konieczne jest ciśnienie  $P_g = 24$  atm. Jak widać na rysunku 1, ciśnienie takie istnieje

tylko w końcowym momencie wzrostu obciążenia. Potem krzywa 3 jest bardziej płaska niż krzywe 1 i 2. Analogiczny przebieg zjawiska przedstawiają krzywe na rysunku 2 i 3.

Rozwiązanie zadań dla "rozcigananej" warstwy gruntu będą przedstawione w oddzielnej pracy.

## Literatura

- [1] BISHOP A.W., KENNARD M.F., VAUGHAN P.R. 1964: *Developments in the measurement and interpretation of pore pressure in earth dams*. Eighth international congress on large dams, Edinburg, V, II, question N<sup>o</sup> 29.
- [2] FLORIN W.A. 1961: *Osnovy mechaniki gruntów*. Gosstrojizdat, t. 2.
- [3] KAZIEKO H., KAZIEKO L. 1994: *O nieliniowym zagadnieniu konsolidacji ośrodka trójfazowego*. Przegl. Nauk. Wydz. MiIŚ, SGGW, z. 6.
- [4] KAZIEKO H., KAZIEKO L. 1995: *O rozwiązaniu nieliniowych zagadnień konsolidacji gruntów*. Przegl. Nauk. Wydz. MiIŚ, SGGW, z. 7.