

Leszek Bolibok¹

Metoda Monte Carlo w badaniu istotności wyników funkcji Ripleya, czyli jak się ustrzec fałszywego stwierdzenia nielosowości struktury przestrzennej drzewostanu

The use of Monte Carlo method in significance tests of Ripley's function outcome or how to avoid false discovery of nonrandom spatial structure of tree stand

Abstrakt. Hypothesis that investigated pattern of tree distribution described by estimator of Ripley's $K(t)$ is not random is often tested by means of Monte Carlo method. The method involves generation of rather big number of random tree stands with stand area and number of trees identical as in investigated tree stand. For each random stand estimator of Ripley's function is calculated. The main goal of this procedure is to define extent of estimator variability in the case of random placement of trees in investigated stand. For each spatial scale t the lowest and the highest values of estimator are recorded. Using extreme values of estimator one can draw two lines (lower and upper) determining maximum estimator variability across spatial scales. They are called envelopes. Unfortunately sometimes these lines are interpreted as "confidence bands" which is obvious mistake. The case that estimator calculated for investigated tree stand crosses the upper or lower envelop is wrongly interpreted as a proof for non-randomness of investigated pattern. This assumption may be partially justified when only one previously determined spatial scale (eg. 4 m) is considered. In case that many spatial scales are investigated simultaneously (eg. from 0 to 10 m) this assumption can lead very easily to false discovery of non-randomness of investigated pattern. The interpretation of investigated pattern based only on visual comparison of estimator with envelopes can be used only in explanatory analysis. Instead the formal rank test based on carefully selected statistic should be carried out.

Key words: tree spatial point pattern, spatial analysis, Ripley's $K(t)$ function, non random pattern.

1. Wstęp

Struktura przestrzenna drzewostanu jest bardzo złożonym zjawiskiem, trudnym do zwięzłego opisanego. Początkowo wskaźniki opisujące strukturę przestrzenną populacji roślinnych były tak stworzone, aby dostarczyć odpowiedzi na pytanie: „czy osobniki w drzewostanie są rozmieszczone losowo czy nie losowo (skupiskowo bądź równomiernie)”. Na takie pytanie może udzielić odpowiedzi wskaźnik Clarka-Evansa (1954). Trudno jednak na źle postawione pytanie uzyskać wartościową odpowiedź. W przypadku, gdy badany drzewostan składa się z równomiernie rozmieszczonych skupisk drzew (np. kęp olszy odroślowej na równomiernie

rozmieszczonych na podmokłym terenie kopcach) wskaźnik Clarka-Evansa prawdopodobnie przyjmie wartość wskazującą na skupiskowość rozmieszczenia drzew, a fakt równomierności rozmieszczenia kęp zostanie zignorowany. Lepiej sformułowane pytanie powinno brzmieć: „jak kształtuje się sposób rozmieszczenia drzew w badanym drzewostanie w różnych skalach przestrzennych?”. Wskaźnik Clarka-Evansa udziela niepełnej i nieprecyzyjnej odpowiedzi na takie pytanie: wprowadzie stwierdza on skupiskowość rozmieszczenia drzew, ale nie wiadomo dokładnie, w jakiej skali przestrzennej ona występuje (najczęściej zbliżonej do średniej odległości pomiędzy badanymi obiektami).

¹ Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Leśny, Katedra Hodowli Lasu, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa, Tel. +48 225938106, e-mail leszek.bolibok@wl.sggw.pl

Funkcja $K(t)$ Ripleya (1977) jest jednym z bardziej popularnych narzędzi badania struktury przestrzennej drzewostanu. Często podkreślaną zaletą funkcji Ripleya jest możliwość analizowania struktury przestrzennej drzewostanu w wielu skalach przestrzennych jednocześnie. Wykorzystanie tej zalety wymaga jednak skrupulatnego podejścia do testowania statystycznej istotności otrzymanych wyników. Pochopne wyciąganie wniosków dotyczących struktury przestrzennej badanego drzewostanu jedynie na podstawie przebiegu estymatora funkcji Ripleya względem tzw. graficznej reprezentacji przedziałów ufności może prowadzić do fałszywych odkryć. Celem tego artykułu jest omówienie metody Monte Carlo w testowaniu wyników funkcji Ripleya ze szczególnym uwzględnieniem testowania hipotezy o nielosowym rozmieszczeniu drzew w przyjętym zakresie skal przestrzennych.

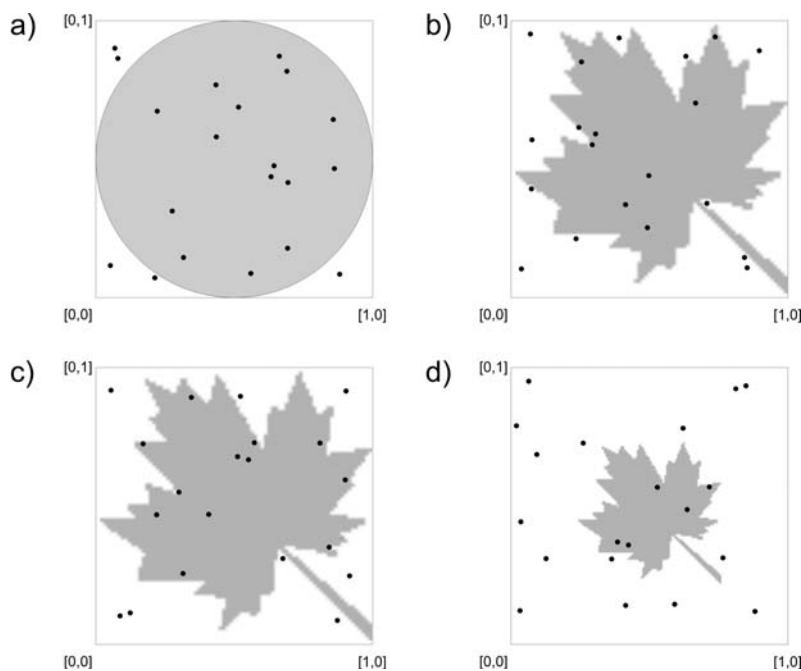
2. Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo¹ to klasa algorytmów obliczeniowych wykorzystujących do uzyskania wyników powtarzalne próby losowe. Metoda ta znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach, głównie do modelowania

procesów zbyt złożonych, aby można było przewidzieć ich wyniki za pomocą podejścia analitycznego.

Uproszczony przykład stosowania metody Monte Carlo do określania pola powierzchni figur geometrycznych przedstawiono na rycinie 1. Ustalenie pola powierzchni koła wpisanego w kwadrat o boku równym 1 m (ryc. 1a) można osiągnąć stosując podejście analityczne za pomocą powszechnie znanych wzorów ($0,7853981 \text{ m}^2$). Podejście do tego problemu w duchu metody Monte Carlo polegałoby na losowym rozmieszczeniu pewnej liczby punktów (w przykładzie jest ich 20) w obrębie wspomnianego kwadratu. W kolejnym kroku należałoby zliczyć punkty, które znalazły się w obrębie koła (15). Proporcja pomiędzy liczbą punktów w kole a ogólną liczbą punktów ($15:20$) jest oszacowaniem proporcji pomiędzy powierzchnią koła i kwadratu opisanego na tym kole, a stąd już łatwo o oszacowanie powierzchni koła ($15/20 \times 1 \text{ m}^2 = 0,75 \text{ m}^2$).

W przypadku złożonych wieloboków nieforemnych (ryc. 1b) podejście analityczne bywa uciążliwe. Gdy poszukiwana jest tylko przybliżona powierzchnia, metoda Monte Carlo okazuje się bardzo użyteczna. Jak widać z porównania rycin 1b i 1c, w przypadku losowania rozmieszczenia, każde losowanie może dać inne oszacowanie (odpowiednio $9/20$ i $12/20$). Dokładność



Rycina 1. Wykorzystanie metody Monte Carlo do określania powierzchni figur płaskich: koła (a) i wieloboków nieforemnych (b, c, d)

Figure 1. The use of Monte Carlo method for area estimation of plane figures: circle (a) and non regular polygons (b, c, d)

¹ Ważną rolę w powstaniu tej metody odegrał polski matematyk, pochodzenia żydowskiego, Stanisław Ulam (w 1943 przyjął obywatelstwo amerykańskie). Jedno z pierwszych zastosowań tej metody miało miejsce w okresie prac nad bombą wodorową. Nazwa tej metody, w której badacz zdaje się na wyniki losowania, ma związek z wujem Ulama, który pożyczal pieniądze od krewnych z powodu wizyt w Monte Carlo (Metropolis 1987).

oszacowania zależy od liczby sprawdzeń i w mniejszym stopniu – od jakości użytego generatora liczb pseudolosowych.

Na potrzeby dalszej części artykułu podano przykład zastosowania metody Monte Carlo do porównywania powierzchni obiektów. Na rycinie 1d przedstawiono pomniejszoną wersję badanego wieloboku. Podczas oszacowania stwierdzono pięć trafień. Choć różnica wielkości jest widoczna gołym okiem, można ją też próbować udowodnić statystycznie za pomocą metody Monte Carlo. Po dokonaniu 100 oszacowań powierzchni liścia z ryciny 1c można uzyskać rozkład częstości trafień oraz określić średnią liczbę trafień. O ile rozkład ten będzie rozkładem normalnym, stosunkowo prosto można określić prawdopodobieństwo napotkania 5 trafień na liściu z ryciny 1c. Jeżeli wyniesie ono 0,03, to przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ można powiedzieć, że powierzchnia liścia z ryciny 1d różni się istotnie od powierzchni liścia z ryciny 1c.

3. Estymator funkcji Ripleya

Stosowanie funkcji Ripleya do analizy struktury przestrzennej drzewostanów wymaga założenia, że położenie drzewa w drzewostanie może być reprezentowane tylko przez jeden punkt. Decyzja, jaki punkt będzie reprezentował położenie drzewa (np. czy środek podstawy pnia, czy środek przekroju pierśnicowego), może mieć duży wpływ na wyniki analizy (por. Laessle 1965). Po wykonaniu mapy położenia drzew na powierzchni próbnej badacz uzyskuje zbiór współrzędnych prostokątnych, reprezentujących położenie drzew w określonym fragmencie płaszczyzny (rejonie badań), dalej nazywany rozmieszczeniem. Punkty reprezentujące położenie drzew będą dalej określane jako obiekty.

Autorzy stosujący w swoich badaniach funkcję Ripleya zazwyczaj zaczynają od zbadania hipotezy o losowym sposobie rozmieszczenia drzew w badanym drzewostanie. Czynią to poprzez porównanie wartości funkcji Ripleya $K(t)$ dla badanego rozmieszczenia z wartością, jaką przyjąłaby funkcja Ripleya w rozmieszczeniu losowym w podobnym fragmencie płaszczyzny z taką samą liczbą obiektów jak w badanym rozmieszczeniu.

Funkcja Ripleya $K(t)$ jest jedną z miar opisujących rozmieszczenie obiektów. Iloczyn $\lambda K(t)$ równy jest liczbie uporządkowanych par obiektów oddalonych od siebie nie bardziej niż t w badanym rozmieszczeniu o zagęszczeniu obiektów na jednostkę powierzchni równym λ . Dla rozmieszczenia całkowicie losowego zajmującego nieskończoną płaszczyznę wartość funkcji Ripleya $K(t)$ da się przedstawić następującym wzorem (Ripley 1977):

$$K(t) = \pi t^2 \quad (1)$$

Teoretyczny przebieg funkcji Ripleya ma charakter paraboliczny. Jej wartość rośnie wraz ze wzrostem skali przestrzennej t (wraz ze wzrostem promienia analizowanego otoczenia obiektów). Ze względów praktycznych (stabilizacja zmienności estymatora funkcji, łatwość wizualnej oceny przebiegu estymatora) bardzo często badacze poddają funkcję transformacji następującym wzorem:

$$L(t) = \sqrt{\frac{K(t)}{\pi}} - t \quad (2)$$

Wówczas dla każdej skali przestrzennej t wartość funkcji $L(t)$ wynosi 0. Natomiast dla rozmieszczenia idealnie losowego zajmującego tylko część płaszczyzny wartość funkcji Ripleya $K(t)$ może się różnić od πt^2 , a wartość funkcji $L(t)$ może być inna niż 0. Wartość funkcji $K(t)$ lub $L(t)$ dla wybranego rozmieszczenia można wyliczyć za pomocą odpowiednich wzorów. Tak jak średnia pierśnica drzew na powierzchni próbnej jest estymatorem średniej pierśnicy drzew w drzewostanie, tak wyliczona dla rejonu badań wartość funkcji jest estymatorem wartości funkcji Ripleya $K(t)$ dla teoretycznego rozmieszczenia obejmującego całą płaszczyznę i jest oznaczana $\hat{K}(t)$ lub – po transformacji – $\hat{L}(t)$.

W przypadku rejonu badań o powierzchni $|A|$ liczb uporządkowanych par wyraża się następującym wzorem (Diggle 1983):

$$\lambda^2 |A| \hat{K}(t) = \sum_{i \neq j} \sum w_{ij}^{-1} I(u_{ij}) \quad (3)$$

gdzie:

u_{ij} – dystans między obiektami i oraz j

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{gdy } u_{ij} \leq t \\ 0, & \text{gdy } u_{ij} > t \end{cases}$$

w_{ij} – współczynnik korekcyjny stosowany do ograniczenia efektu brzegowego.

Prawa strona powyższego równania opisuje estymator liczby uporządkowanych par obiektów oddalonych od siebie nie więcej niż t w rejonie badań. Przekształcenie wzoru 3 pozwala wyprowadzić wzór na estymator funkcji Ripleya oznaczany jako $\hat{K}(t)$. Ponieważ nie jest znana wartość parametru λ procesu statystycznego, który wygenerował badane rozmieszczenie, możliwe jest jedynie skonstruowanie estymatora obciążonego. Przy dodatkowym założeniu o ergodyczności badanego procesu (Cressie 1993, str. 57, 629) jako estymator zagęszczenia może służyć stosunek ilości obiektów na powierzchni badawczej N do wielkości tej powierzchni $|A|$. Wówczas modyfikacja wzoru 3 pozwala obliczyć obciążony estymator funkcji Ripleya:

$$\hat{K}(t) = \sum_{i \neq j} \sum \frac{w_{ij}^{-1} I(u_{ij})}{\lambda^2 |A|} = \frac{|A|}{N^2} \sum_{i \neq j} \sum w_{ij}^{-1} I(u_{ij}) \quad (4)$$

Estymator wartości funkcji Ripleya przedstawiony wzorem 4 jest bardzo często wykorzystywany w badaniach struktury przestrzennej drzewostanów. Diggle (1983) podkreśla, że może być on stosowany do analizy rozmieszczeń stacjonarnych (nie wykazujących znacznych kierunkowych zmian lokalnego zagęszczenia obiektów) oraz izotropicznych (gdy średnia odległość obiektów w kierunku północ-południe nie różni się zbyt wiele od średniej odległości między obiektami w kierunku wschód-zachód). Dokładniejsze wyjaśnienie tych założeń wychodzi poza zakres niniejszego artykułu i zostało omówione gdzie indziej (np. Bolibok 2008a, b). Obliczenie transformowanej wartości estymatora odbywa się analogicznie jak we wzorze 2.

4. Graficzna reprezentacja przedziałów ufności

Estymator funkcji Ripleya jest zmienną losową o pewnej wariancji, która sprawia, że przebieg funkcji ustalony dla fragmentów (o tym samym kształcie i powierzchni) położonych w różnych częściach rozmieszczenia losowego zajmującego całą płaszczyznę będzie różny. Z tego powodu przed rozstrzygnięciem, czy obserwowany w badanym rozmieszczeniu przebieg estymatora różni się od przebiegu w rozmieszczeniach losowych, konieczne jest określenie potencjalnej zmienności estymatora. W tym celu na wykresie przedstawiającym przebieg estymatora lub zaznaczane są dwie linie, które w przypadku losowego rozmieszczenia drzew przebiegają jedna poniżej, a druga powyżej krzywej estymatora. Symbolizują one przewidywany dla danego λ zakres zmienności estymatora i określane są mianem graficznej reprezentacji przedziałów ufności.

Bardzo często autorzy stosujący w badaniach ekologicznych funkcję Ripleya ograniczają analizę wyników tylko do sprawdzenia, czy krzywa estymatora przecina linię reprezentującą przedział ufności, co jest interpretowane jako dowód na nielosowy sposób rozmieszczenia obiektów. Przypomina to wzrokowe porównywanie dwóch histogramów przedstawiających rozkłady liczebności. Nawet w przypadku, gdy wzrokowa analiza nie pozostawia cienia wątpliwości co do całkowitej odmienności badanych rozkładów, tylko zastosowanie odpowiedniego testu pozwala na formalne odrzucenie hipotezy zerowej o zgodności badanych rozkładów. Podobnie rzecz się ma w przypadku funkcji Ripleya.

5. Stałe przedziały ufności

Precyzyjne określenie zmienności wspomnianych estymatorów nie jest łatwe. Czasami wykorzystywany jest podany przez Ripleya (1979) sposób polegający na zastosowaniu wzorów na tak zwane stałe przedziały ufności (wzór 5 i 6).

$$\pm 1,46 \sqrt{|A|} N \quad (5)$$

$$\pm 1,68 \sqrt{|A|} N \quad (6)$$

Pozwalają one oszacować zakres, w którym obserwuje się odpowiednio 95% i 99% wartości estymatora $\hat{L}(t)$, dla rozmieszczenia losowego na powierzchni badawczej o wielkości $|A|$ i liczbie obiektów równej N . Wzory te mają charakter empiryczny, zostały ustalone na drodze symulacji dla rozmieszczeń zawierających odpowiednio 25 i 100 obiektów na powierzchni próbnej o boku równym 1 i są właściwe dla t nie większego niż odpowiednio 0,25 i 0,125. W związku z tym ich przydatność jest ograniczona.

Niektóre publikacje podają analityczne metody konstruowania stałych przedziałów ufności (np. Saunders et Funk 1977, za Ripley 1979). Praktyczne zastosowanie wspomnianych metod ma jednak liczne ograniczenia. Przykładowo metoda proponowana przez Ripleya (1981, za Tomppo 1986, str. 26) jest przydatna tylko dla kolistych powierzchni próbnych dla skali przestrzennej mniejszej niż $\frac{0,7r}{\sqrt[3]{N}}$, gdzie r to promień powierzchni, a N to liczba obiektów. Wzór opracowany przez Stoyana i in. (1987, str. 58) pozwala ustalić stałe przedziały ufności tylko dla jednej wcześniej ustalonej wartości t .

6. Zastosowanie metody Monte Carlo do określenia zmienności estymatora funkcji Ripleya

Uzyskanie metodą analityczną odpowiedzi na pytanie, jak kształtowałyby się zmienność estymatora funkcji Ripleya, gdyby w rejonie badań obiekty były rozmieszczone losowo, jest co najmniej kłopotliwe. Z tego powodu do odpowiedzi na to pytanie rutynowo stosowana jest metoda Monte Carlo. Wygenerowanie rozmieszczenia losowego w rejonie badań zawierającego taką samą liczbę obiektów jak badane rozmieszczenie jest banalnie proste (por. Stoyan i in. 1987, str. 38-40.). Aby poznać zmienność estymatora, generuje się większą liczbę rozmieszczeń losowych, rejestruje się obliczone dla każdego z nich wartości estymatora i w ten sposób otrzymuje się oszacowanie zmienności estymatora.

Omawiając stosowanie metody Monte Carlo do określania pola powierzchni figur geometrycznych

(ryc. 1), wspomniano o możliwości porównywania wielkości powierzchni wieloboków nieforemnych na podstawie liczby trafień. Dokładnie rzecz ujmując zaproponowana metoda porównania wymagała założenia, że rozkład liczby trafień jest rozkładem normalnym. Zmienność estymatora funkcji Ripleya jest mało poznana i nie można zakładać, że rozkład odchyień wartości estymatora od wartości średniej będzie zgodny z rozkładem normalnym. Z tego powodu wykorzystanie metody Monte Carlo do testowania hipotezy zerowej (H_0), że badane rozmieszczenie obiektów na powierzchni badawczej nie różni się od rozmieszczenia losowego, wymaga zastosowania testu rang (Besag i Diggle 1977). Polega on na obliczeniu wartości wybranej przez badacza statystyki U dla pewnej liczby n rozmieszczeń obejmujących zarówno badane rozmieszczenie U_1 , jak i określoną liczbę $s=n-1$ rozmieszczeń losowych $U_2 \dots U_n$, czyli realizacji jednorodnego procesu Poissona w granicach rejonu badań, przy λ identycznym jak w badanym rozmieszczeniu. Następnie wartości tej statystyki szeregowane są w kolejności rosnącej. Prawdopodobieństwo, że przez przypadek wartość U_1 będzie najmniejsza ze wszystkich statystyk $U_2 \dots U_n$, jest takie samo jak prawdopodobieństwo, że będzie ona największa, i wynosi $p = n^{-1}$ (Diggle 1983, str. 12).

7. Test rang a przedziały ufności

Test rang w wersji graficznej można wykonać następująco. Dla konkretnej skali przestrzennej t oblicza się wartość estymatora funkcji Ripleya dla 99 wygenerowanych rozmieszczeń losowych. Wartości te są sortowane i największą z nich oraz najmniejszą zaznacza się punktowo w układzie współrzędnych, w którym oś rzędnych odpowiada skali przestrzennej t , a oś odciętych – wartościom estymatora (ryc. 2a). Jeżeli punkt reprezentujący na wykresie wartość estymatora funkcji Ripleya dla badanego rozmieszczenia w danej skali przestrzennej t (np. 4 m, ryc. 2b) znajdzie się poniżej lub powyżej wspomnianych punktów, będzie to symbolizować zajście zdarzenia o prawdopodobieństwie 100^{-1} . Przy odrzuceniu hipotezy zerowej o zgodności badanego rozmieszczenia z rozmieszczeniem losowym w skali przestrzennej t oznacza to, że szansa na popełnienie błędu statystycznego pierwszego rodzaju p jest równa lub mniejsza od 0,01. Na tym etapie wyводу ekstremalne wartości estymatora obliczone dla 99 rozmieszczeń losowych i naniesione na wykres dla każdej analizowanej skali przestrzennej można by uznać za graficzne przedstawienie przedziałów ufności dla poziomu istotności $\alpha=1\%$. Z przyczyn formalnych nie jest to jednak możliwe.

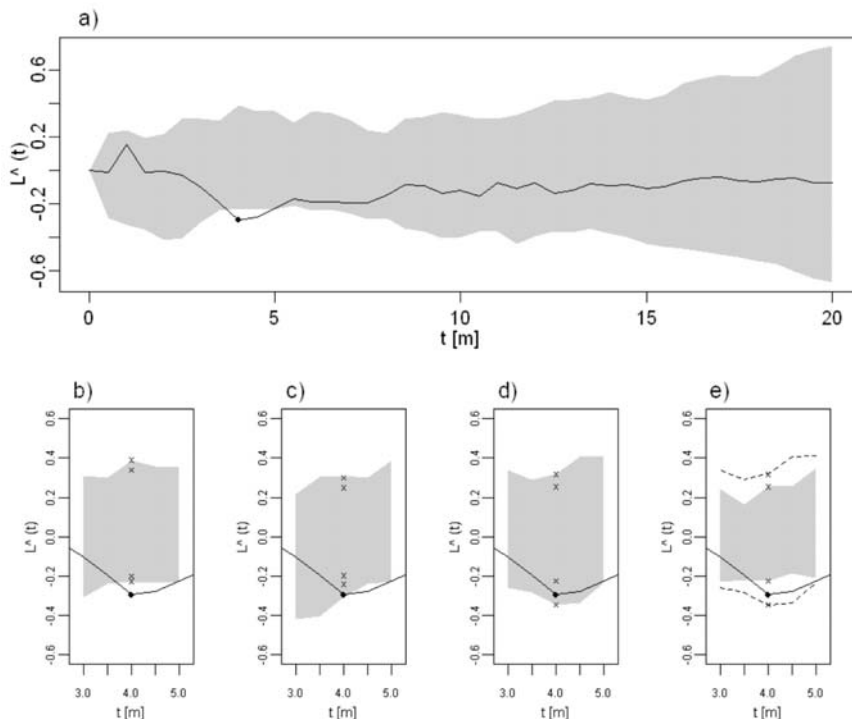
8. Nieostrość przedziałów ufności

Marriott (1979) zauważył istnienie zjawiska określanego jako nieostrość przedziałów ufności ustalanych za pomocą metody Monte Carlo. Przejawia się ona między innymi tym, że za każdym razem, gdy zostanie wygenerowane $s=99$ rozmieszczeń losowych, położenie punktów symbolizujących przedziały ufności może być trochę inne (por ryc. 2b, 2c i 2d). Jeżeli dla konkretnej wartości t zaobserwowano, że krzywa estymatora z badanego rozmieszczenia znajduje się lekko poza przedziałem ufności (ryc. 2b), to po innej serii symulacji może znajdować się wewnątrz przedziałów ufności (ryc. 2d). Jest to zjawisko normalne i powinno skłaniać do ostrożności w formułowaniu twierdzeń o istotności różnicy między badanym rozmieszczeniem a rozmieszczeniem losowym tylko na podstawie analizy przebiegu krzywej estymatora względem tak rozumianych przedziałów ufności. W związku z tą sytuacją Marriott (1979) zaproponował modyfikację testu. Polega ona na tym, że w uporządkowanym szeregu wartości statystyki U obserwowany jest tzw. obszar krytyczny o szerokości m . Jeżeli wartość U_1 znajdzie się wśród m największych wartości statystyki U , to przy poziomie istotności $\alpha = \frac{m}{n}$ możemy odrzucić H_0 .

Symulacje przeprowadzone przez Marriotta wskazują, że przyjęcie $m=5$ (Diggle 1983) jest całkowicie wystarczające, a więc dla $s=99$ osiągnięty jest poziom istotności $\alpha = \frac{m}{n} = \frac{5}{1+99} = 5\%$.

Praca Marriotta wykazała, że omawiane graficzne przedstawienie przedziałów ufności (por. ryc. 2 a-d) nie może być uznane za reprezentację poziomu ufności 99%.

Niestety, tak konstruowane przedziały ufności (ryc. 2a-d) nie mogą służyć za reprezentację również 95% poziomu ufności. Jeżeli wartość badanej statystyki U_1 dla wybranej skali przestrzennej t po uszeregowaniu zajęłaby 4 miejsce wśród największych wartości statystyki U , to po uwzględnieniu poprawki Marriotta można by odrzucić H_0 . Jednakże w tym przypadku punkt reprezentujący wartość estymatora obliczoną dla badanego rozmieszczenia, dla skali przestrzennej $t=4$ m nie leży poza przedziałami ufności zdefiniowanymi przez $\max \hat{L}(t)_{2 \dots 99}$ i $\min \hat{L}(t)_{2 \dots 99}$ (ryc. 2d). Analiza graficzna na podstawie tak zdefiniowanych przedziałów ufności mogłaby prowadzić do popełnienia błędu statystycznego drugiego rodzaju i uznania rozmieszczenia nielosowego (przy $\alpha=5\%$) za losowe. Z tego powodu niektórzy autorzy starają się skonstruować graficzną reprezentację przedziałów ufności tak, aby nie były one zbyt konserwatywne. Jedną z metod ograniczenia możliwości popełnienia błędu II rodzaju jest odrzucenie



Rycina 2. Przebieg estymatora funkcji $\hat{K}(t)$ Ripleya (linia ciągła) dla rozmieszczenia składającego się z 400 obiektów położonych w kwadracie o wymiarach 100×100 m na tle graficznej reprezentacji zmienności estymatora (szary obszar) obserwowanej w losowym rozmieszczeniu oszacowanej na podstawie 99 symulacji rozmieszczeń losowych o takiej samej ilości obiektów i powierzchni jak badane rozmieszczenie (a). Cztery skrajne wartości estymatora dla rozmieszczeń losowych (zaznaczone czarną literą x) oraz wartość estymatora (czarna kropka) dla badanego rozmieszczenia w skali 4 m (b). Cztery skrajne wartości estymatora dla rozmieszczeń losowych w dwóch kolejnych seriach symulacji (c, d). Graficzna reprezentacja lokalnych przedziałów ufności (e) reprezentujących poziom istotności 5% (szary obszar) dla symulacji z ryc. d. Linie przerywane pokazują maksymalny obserwowany zakres zmienności estymatora dla symulowanych rozmieszczeń.

Figure 2. The estimator of Ripley's $\hat{K}(t)$ function (solid line) for point pattern made of 400 objects placed on square region 100×100 m at the graphical representation of estimator variability (gray polygon) observed in random point pattern with the same area and the same object number as in investigated pattern. Variability was estimated on the base of 99 simulations of random pattern (a). Four marginal values of estimator (letter x) for spatial scale 4 m observed in random pattern from 99 simulations and the estimator value (black dot) for investigated pattern (b). Four marginal values of estimator in two series of simulation (c, d). Graphical representation of local confidence intervals (e) representing significance level 5% (gray polygon) for simulation series from figure d. The dashed lines depict maximum extent of estimator variability in the last simulation series

pewnej liczby skrajnych wartości estymatora $\hat{K}(t)$ uzyskanych podczas symulacji rozmieszczenia losowego. Przykładowo Vacek i Lepš (1996) po przeprowadzeniu $s=99$ symulacji rozmieszczenia losowego, przy poziomie istotności $\alpha = 5\%$, w celu zdefiniowania granic przedziałów ufności przyjmowali 3. i 97. wartość w szeregu uporządkowanych rosnąco wartości. Podobnie Moeur (1997) w celu uzyskania 90% przedziału ufności pomijała 5% najwyższych i 5% najniższych wartości estymatora obliczonych dla 200 symulowanych rozmieszczeń losowych. Goreaud (2000) podaje ogólne zasady konstruowania uproszczonej graficznej reprezentacji przedziałów ufności na podstawie wybranego poziomu ufności α i liczby

przeprowadzonych symulacji s . Jako dolną lub górną granicę przedziałów ufności należy odpowiednio wybrać z uszeregowanych rosnąco wartości estymatora (lub wartości zajmujące miejsca wskazane wyrażeniami $n \frac{\alpha}{2}$ oraz $n \frac{1-\alpha}{2}$). Cytowane rozwiązanie bazuje na założeniu, że skrajne wartości estymatorów funkcji Ripleya uzyskane w czasie symulacji będą się rozkładały równo po obu stronach średniej wartości estymatora. Przy tym założeniu równe „przycięcie” przedziałów od góry i od dołu ograniczy problem nadmiernego konserwatywności graficznej reprezentacji przedziałów ufności (por. ryc. 2e) dla wybranej skali przestrzennej.

9. Lokalny i globalny test Monte Carlo

Przedstawione rozważania dotyczące testowania istotności wyników za pomocą procedury Monte Carlo odnosiły się do wartości estymatora obserwowanych dla wybranej skali przestrzennej t . Wyznaczone dla niej przedziały ufności określane są jako lokalne przedziały ufności. W badaniach ekologicznych rzadko udaje się wskazać konkretną skalę przestrzenną t , w której będą analizowane relacje przestrzenne między osobnikami z badanej populacji. Częściej poszukiwana jest odpowiedź na ogólne pytanie: jaki jest typ rozmieszczenia (skupiskowy, losowy, równomierny) osobników danej populacji? Bardziej precyzyjnie pytanie to powinno brzmieć: jak kształtują się relacje przestrzenne między obiektami w analizowanym zakresie skal przestrzennych, np. od t_{\min} do t_{\max} ?

Niektórzy autorzy szukając odpowiedzi na tak postawione pytanie, próbują stosować graficzną reprezentację przedziałów ufności. Nie jest to jednak poprawne ze statystycznego punktu widzenia. Można to sprawdzić następująco. Z teorii metody Monte Carlo wynika, że gdy na wykres przedstawiający lokalny przedział ufności ($\alpha=5\%$) naniesiony zostanie przebieg estymatora funkcji Ripleya obliczony dla kolejnych 100 realizacji procesu Poissona (o tej samej wartości λ jak przy generacji przedziałów ufności), to dla jednej konkretnej skali przestrzennej t nie więcej niż pięć z nich znajdzie się poza przedziałami ufności. Jednakże, jeżeli zostaną poddane analizie wszystkie dystanse z zakresu od t_{\min} do t_{\max} odsetek ten wzrośnie znacznie ponad oczekiwane 5%. Jest to zjawisko analogiczne do problemu obserwowanego przy statystycznej analizie porównań wielokrotnych. Im więcej porównań, tym większe jest prawdopodobieństwo, że któreś porównanie okaże się istotnie różne przez przypadek (Rice 1989, Michalak 1996). Prawdopodobieństwo odrzucenia przez przypadek hipotezy zerowej w teście porównań wielokrotnych jest wyższe niż w przypadku każdego z porównań składowych.

Graficzna reprezentacja przedziałów ufności określana jest jako lokalne przedziały ufności, ponieważ zakładany poziom ufności ($1-\alpha$) jest osiągany jedynie lokalnie, oddzielnie dla każdej wybranej skali przestrzennej t , natomiast dla zakresu skal przestrzennych jest on zawsze niższy niż lokalnie. W związku z tym rośnie prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju i uznania na podstawie lokalnych przedziałów ufności (przy zakładanym α) rozmieszczenia losowego za nielosowe w zakresie skal przestrzennych od t_{\min} do t_{\max} .

Poziom istotności α testu globalnego wykonanego na podstawie lokalnych przedziałów ufności można obliczyć analitycznie (Durbin 1971, za Tomppo 1986

str. 27, Novikov 1981 za Tomppo 1986, str. 27.). Problem ten może być również rozwiązany na drodze symulacji. Pierwszy etap polega na wygenerowaniu lokalnych przedziałów ufności. W drugim etapie generuje się pewną liczbę rozmieszczeń losowych. Następnie zlicza się przypadki, w których estymator dla losowych rozmieszczeń przecina dolny lub górny przedział ufności dla dowolnej wartości t z przyjętego do analizy zakresu (t_{\min} do t_{\max}). Stosunek liczby przypadków, w których nastąpiło przecięcie przedziałów ufności, do ogólnej liczby wygenerowanych rozmieszczeń można traktować jako oszacowanie poziomu istotności testu globalnego dokonane na podstawie lokalnych przedziałów ufności. Tomppo (1986) przeprowadził 1000 symulacji dla rozmieszczeń losowych (zagęszczenie λ od 500 do 1000 obiektów na 1 ha) z zastosowaniem stałych przedziałów ufności ustalonych metodą analityczną. Osiągany poziom istotności w małym stopniu zależał od zagęszczenia obiektów na jednostkę powierzchni, czy też od bezwzględnej liczby obiektów w rejonie badań (symulowano 40, 60, 80, 100 i 120 obiektów). W przypadku stałych przedziałów ufności przy poziomie istotności testu lokalnego $\alpha = 1\%$ poziom istotności testu globalnego wahał się od 6,8 do 8,8%, a przy poziomie istotności testu lokalnego $\alpha = 5\%$ poziom istotności dla testu globalnego wahał się od 24 do 31%. Goreaud (2000) przeprowadził 10000 symulacji dla rozmieszczeń losowych o zagęszczeniu 100 obiektów na 1 ha, za zastosowaniem lokalnych przedziałów ufności generowanych metodą Monte Carlo. Poziom istotności testu globalnego osiągnięty w symulacji wynosił odpowiednio 8,8% oraz 36% dla poziomów istotności testu lokalnego 1% i 5%. W podsumowaniu tych rozważań warto jeszcze raz podkreślić, że badacz, który wizualnie porównuje przebieg estymatora funkcji Ripleya z graficzną reprezentacją przedziałów ufności dla poziomu istotności 5%, w trzydziestu kilku przypadkach na sto analiz pomylił się i uzna losowe rozmieszczenie drzew na drzewostanie za nielosowe.

10. Globalne testy istotności

Poprawne rozstrzygnięcie kwestii, czy badane rozmieszczenie jest nielosowe w pewnym zakresie skal przestrzennych, wymaga przeprowadzenia testu Monte Carlo z wykorzystaniem statystyki uwzględniającej wartości estymatora funkcji Ripleya w całym badanym zakresie skal przestrzennych. Wybór odpowiedniej statystyki do przeprowadzenia testu globalnego ma zasadnicze znaczenie, gdyż może on mieć wpływ na końcowy wynik testu Diggle'a (1983, str. 9). W literaturze można napotkać dwa rodzaje statystyk stosowanych do tego celu. Jeden rodzaj nawiązuje do testu

Kołmogorowa-Smirnowa i został zaproponowany przez Ripleya (1979). Drugi rodzaj statystyk nawiązuje do testu Craméra-von Misesa i był proponowany między innymi przez Diggle'a (1983).

Ripley (1979) zaproponował statystykę L_m , bazującą na transformowanej postaci funkcji:

$$L_m = \sup_{t \leq t_{\max}} \left| \sqrt{\frac{\hat{K}(t)}{\pi}} - t \right| = \sup_{t \leq t_{\max}} |\hat{L}(t)| \quad (7)$$

Zaproponowana statystyka jest analogiczna do stosowanej w teście Kołmogorowa-Smirnowa. Ustalenie wartości tego typu statystyki sprowadza się do ustalenia największej różnicy między dwoma rozkładami. W tym konkretnym przypadku ustalana jest maksymalna różnica między empirycznymi wartościami estymatora a wartością teoretyczną $L(t)$ w pewnym zakresie skal przestrzennych. Ponieważ z definicji dla rozmieszczeń losowych $L(t) = 0$, to wartość tej statystyki (wzór 7) odpowiada największej bezwzględnej wartości estymatora obserwowanej dla badanego zakresu skal przestrzennych (0 do t_{\max}). Wartości statystyki dla rozmieszczeń losowych i dla badanego rozmieszczenia L_{m1} są sortowane. Przyjmując obszar krytyczny $m=5$, po dokonaniu 99 symulacji, gdy wartość L_{m1} znajdzie się wśród 5 największych wartości statystyki L_m , można powiedzieć, że badane rozmieszczenie nie jest losowe w badanym zakresie skal przestrzennych. Poziom istotności tego testu można wyliczyć ze wzoru $\alpha = m/(1+s)$, a w omawianym przypadku wyniósłby on 5%.

Diggle (1979) dodaje statystykę r bazującą na nie-transformowanej postaci funkcji Ripleya, lecz również nawiązującą do statystyki Kołmogorowa-Smirnowa.

$$r = \sup_{t \leq t_{\max}} |\hat{K}(t) - \pi t| \quad (8)$$

Według autora obie statystyki (wzór 7 i 8) są przydatne jedynie dla mniejszych skal przestrzennych. W przypadku kwadratowej powierzchni próbnej o boku 1, stosowanie tych statystyk jest uzasadnione dla $t_{\max} \leq 0,25$. Porównanie dokonane przez Diggle'a (1979) wskazuje, że zastosowanie statystyki L_m daje zdecydowanie mocniejszy test, zwłaszcza w stosunku do rozmieszczeń równomiernych. Słabość testu Monte Carlo opartego na statystyce r związana jest ze stosunkowo dużą zmiennością estymatora obserwowaną dla większych wartości t , mogącą maskować odchylenia wskazujące równomierność dla mniejszych skal przestrzennych (por. ryc. 2a). Przykład praktycznego wykorzystania statystyki L_m do analizy populacji roślinnych można znaleźć w pracy Barota i in. (1999).

Druga grupa statystyk stosowanych do analizy rozmieszczenia w pewnym zakresie skal przestrzennych jest analogiczna do statystyki stosowanej w teście Craméra-von Misesa. Wartość tego typu statystyki usta-

laną jest poprzez całkowanie kwadratów różnic między wartościami rozkładów w badanym zakresie skal przestrzennych. W przypadku funkcji Ripleya całkowaniu będzie podlegał kwadrat różnicy między wartością estymatora dla badanego rozmieszczenia a wartością teoretyczną $K(t)$ w badanym zakresie skal przestrzennych (0 do t_{\max}). Diggle (1983, str. 12) podaje ogólną postać takiej statystyki. Ponieważ znane są teoretyczne wartości funkcji Ripleya dla rozmieszczenia losowego ($K(t) = \pi t^2$) możliwe jest dalsze przekształcenie tej statystyki (wzór 9)

$$u_i = \int_0^{\max} \{\hat{K}(t) - K(t)\}^2 dt = \int_0^{\max} \{\hat{K}(t) - \pi t^2\}^2 dt \quad (9)$$

Omawiana statystyka została zastosowana do analizy struktury przestrzennej drzewostanów tropikalnych przez Plotkina i in. (2000) w zmodyfikowanej wersji nawiązującej do wzoru podanego przez Diggle'a (1983, str. 77), przydatnego w sytuacji, gdy wartości parametru $K(t)$ nie są znane. Modyfikacja polegała na tym, że przed odjęciem wartości estymatora i parametru podniesiono je do potęgi 1/2.

Do konstrukcji statystyki typu Craméra-von Misesa może być użyta również transformowana postać funkcji Ripleya (Szwagrzyk et Ptak 1991, str. 117). Ponieważ teoretyczna wartość $L(t) = [K(t)/\pi]^{1/2} - t = 0$, możliwe jest stosowanie statystyki zaproponowanej we następującym wzorze (praktyczne zastosowanie patrz: Martens et al. 1997, Bolibok 2003):

$$u_i = \int_0^{\max} \{\hat{L}(t) - L(t)\}^2 dt = \int_0^{\max} \{L(t)\}^2 dt \quad (10)$$

Przeprowadzenie formalnego testu za pomocą metody Monte Carlo daje jedynie odpowiedź na pytanie, czy badane rozmieszczenie jest losowe czy nie. Po odrzuceniu hipotezy zerowej o losowym typie rozmieszczenia obiektów w badanym rozmieszczeniu możliwe jest testowanie alternatywnych hipotez o zgodności badanego rozmieszczenia z innymi dającymi się symulować procesami stochastycznymi. Większość autorów jednak wybiera rozwiązanie polegające na uznaniu badanego rozmieszczenia za skupiskowe, jeżeli przebieg estymatora funkcji K przecina góry przedział ufności, lub za równomierne, jeżeli przecięty jest dolny przedział. Przyjęcie tego rozwiązania wymaga jednak szczególnej staranności w konstruowaniu graficznej reprezentacji przedziałów ufności.

11. Podsumowanie

Rzadko natura badanego zjawiska przyrodniczego pozwala w badaniach drzewostanowych wskazać a priori skalę przestrzenną kluczową dla danej analizy.

Zazwyczaj badacz analizuje przebieg estymatora funkcji Ripleya w pewnym zakresie skal przestrzennych. Błędem jest wyciąganie wniosków jedynie na podstawie wizualnej oceny przebiegu estymatora względem graficznej reprezentacji przedziałów ufności. Aby uniknąć pochopnego uznania badanego rozmieszczenia za nielosowe należy do testowania wyników stosować statystyki analizujące przebieg estymatora w całym rozpatrywanym zakresie skal przestrzennych. Wprowadzenie w czyn tych zaleceń nie wymaga wielkiego zachodu. W powszechnie dostępnym, nieodpłatnym oprogramowaniu do analizy danych punktowych (Haase 2002, Baddeley i Turner 2005) należy włączyć odpowiednią opcję i zinterpretować jej wynik.

Literatura

- Baddeley A., Turner R. 2005: Spatstat: An R Package for Analyzing Spatial Point. *Journal of Statistical Software*, 12 (6), 1-42. <http://www.jstatsoft.org/>, dostęp z dnia 15.01.2008.
- Barot S., Gignoux J., Menaut J.C. 1999: Demography of a savanna palm tree: predictions from comprehensive spatial pattern analyses. *Ecology*, 80 (6): 1987-2005.
- Besag J., Diggle P. J. 1977: Simple Monte Carlo tests for spatial pattern. *Applied Statistics*, 26: 327-333.
- Bolibok L. 2003: Dynamika struktury przestrzennej drzewostanów naturalnych w oddziale 319 BPN – czy biogrupy drzew są powszechne i trwałe w nizinym lesie naturalnym? *Sylvan*, 147(1): 12-23.
- Bolibok L. 2008a: Limitations of Ripley K function use in the analysis of spatial patterns of tree stands with heterogeneous structure. *Acta Scientiarum Polonorum Silvorum Colendarum Ratio et Industria Lignaria*, 7(1): 5-18.
- Bolibok L. 2008b: Stosowanie funkcji Ripleya do badania anizotropicznych rozmieszczeń drzew. *Leśne Prace Badawcze*, 69(2): 143-153.
- Clark P.J., Evans F.C. 1954: Distance to nearest neighbor as a measure of spatial relationships in populations. *Ecology*, 35: 445-453.
- Cressie N. A. C. 1993: *Statistics for spatial data*. Wiley, New York.
- Diggle P.J. 1979: On parameter estimation and goodness of fit testing for spatial point pattern. *Biometrics*, 35, 87-101.
- Diggle P.J. 1983: *Statistical analysis of spatial point patterns*. Academic Press, London.
- Goreaud F. 2000: Apports de l'analyse de la structure spatiale en forêt tempérée à l'étude et la modélisation des peuplements complexes. Thèse de Doctorat, ENGREF, Nancy: 1-528.
- Haase P. 2002: SPPA – A Program for Spatial Point Pattern Analysis, Version 2.0.3 <http://haasep.homepage.t-online.de/>, dostęp z dnia 15.01.2008
- Laessle A.M. 1965: Spacing and competition in natural stands of sand pine. *Ecology*, 46: 65-72.
- Marriott F. H. C. 1979: Barnard's Monte Carlo tests: How many simulations? *Applied Statistics*, 28: 75-77.
- Martens S.N., Breshears D.D., Mayer C.W., Barnes F.J. 1997: Scales of above-ground and below-ground competition in a semi-arid woodland detected from spatial pattern. *Journal of Vegetation Science*, 8: 655-664.
- Metropolis N. 1987: The Beginning of the Monte Carlo Method. *Los Alamos Science*, 15: 125-130.
- Michalak P. 1996: Kilka uwag o równoczesnym wnioskowaniu statystycznym. *Wiadomości Ekologiczne*, 42(4) 229–233.
- Moerur M. 1997: Spatial models of competition and gap dynamics in old-growth *Tsuga heterophylla* – *Thuja plicata* forests. *Forest Ecology and Management*, 94: 175–186.
- Plotkin J.B., Potts M.D., Leslie N., Manokaran N., LaFrankie J., Ashton P.S. 2000: Species-area curves, spatial aggregation, and habitat specialization in tropical forests. *Journal of Theoretical Biology*, 207: 81-99.
- Rice W. R. 1989: Analyzing tables of statistical tests. *Evolution*, 43: 223-225
- Ripley B.D. 1977: Modelling spatial patterns. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 39: 172-192.
- Ripley B.D., 1979: Tests of 'randomness' for spatial point patterns. *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 41: 368-374.
- Stoyan D., Kendall W., Mecke J. 1987: *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley & Sons. New York.
- Szwagrzyk J., Ptak J. 1991: Analizy struktury przestrzennej populacji i zbiorowisk oparte na znajomości rozmieszczenia osobników [Analyses of spatial structure of populations and communities based on mapped point patterns of individuals]. *Wiadomości Ekologiczne*, 37: 107–124.
- Tomppo E. 1986: Models and methods for analyzing spatial patterns of trees. *Communications Instituti Forestalis Fenniae*, 138: 1-65.
- Vacek S., Lepš J. 1996: Spatial dynamics of forest decline: the role of neighbouring trees. *Journal of Vegetation Science*, 7: 789-798.