PRZEWODNOŚĆ HYDRAULICZNA OŚRODKA POROWATEGO W UJĘCIU STATYSTYCZNYM

B. Usowicz

Instytut Agrofizyki PAN, ul. Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27 e-mail: Usowicz@demeter.ipan.lublin.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób szacowania przewodności hydraulicznych ośrodków porowatych w oparciu o statystyczny model, krzywą retencji oraz wybrane przewodności hydrauliczne, które użyto do kalibracji modelu. Przeprowadzono porównanie wyników obliczeń ze zmierzonymi dla dwóch skrajnie różnych materiałów porowatych. Otrzymane wyniki wykazały, że przyjęte dane wejściowe oparte na krzywej retencji i skrajnych wartościach przewodności hydraulicznej ośrodka są wystarczające, a przyjęte uproszczenia dopuszczalne, jak również, że zmienne użyte do obliczeń oraz parametry modelu zostały wybrane poprawnie. Zgodność wyników otrzymanych z obliczeń i z pomiarów była satysfakcjonująca.

Słowa kluczowe: krzywa retencji, przewodność hydrauliczna, ośrodek porowaty.

WSTĘP

Obieg wody w przyrodzie warunkowany jest zdolnością ośrodka porowatego do przyjmowania wody z opadów i nawodnień oraz jej redystrybucją w tym ośrodku. Z kolei, zdolność ta zależy od przewodności hydraulicznej (przewodnictwa) ośrodka porowatego [1, 8, 13, 15, 17, 20]. Charakterystyki przewodności hydraulicznej są zatem niezbędne do opisu ruchu wody w ośrodku porowatym. Mają ona również istotne znaczenie praktyczne w projektowaniu w melioracji [5, 14, 22] czy też w określeniu dostępności wody i składników pokarmowych roślinom.

Dotychczasowe badania wykazały, że konfiguracja fazy stałej – zależna od rozkładu granulometrycznego, zawartości materii organicznej oraz upakowania cząstek (zagęszczenia) – ma zasadniczy wpływ na krzywą retencji wody i jej przewodność hydrauliczną, a więc, ma wpływ na przepływ wody w ośrodku. Za-

gęszczenie ośrodka wpływa na przebieg krzywej retencji wody w sposób bardzo istotny, przy czym jest on uwarunkowany rodzajem ośrodka porowatego i jego powierzchnią właściwą [6, 22].

Modele empiryczne szeroko stosowane do opisu hydrofizycznych właściwości ośrodka oparte są na wybranych właściwościach fizycznych i strukturalnych tego ośrodka bądź na określonych wartościach potencjału z wybranymi parametrami fazy stałej [2, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 16, 17]. Modele te mają swoje wady i są ciągle niedoskonałe. Przyczynę tego stanu należy upatrywać w samym obiekcie badań. Gleba jest obiektem żywym i bardzo zmiennym [13, 23]. To wszystko powoduje, że wymyka się ona idealizacji i nie poddaje się uproszczeniom, które są nieodzowne do jej opisu i zrozumienia [5, 19, 20].

Potrzeba znalezienia optymalnego rozwiązania problemu wymiany masy w ośrodku porowatym w oparciu o podstawowe, łatwo mierzalne właściwości ośrodka, jak i wyjaśnienia skomplikowanego procesu przepływu medium w ośrodku porowatym jest głównym motorem podejmowania badań w tym obszarze. W niniejszej pracy przedstawiono sposób szacowania właściwości hydraulicznych ośrodków porowatych w oparciu o statystyczny model przewodności hydraulicznej oraz przeprowadzono porównanie wyników obliczeń ze zmierzonymi dla dwóch skrajnie różnych materiałów porowatych.

PRZEPŁYW WODY W OŚRODKU POROWATYM

Przepływ cieczy w ośrodku porowatym opisywany jest prawem Darcy, które mówi, że szybkość objętościowa przepływu przypadająca na jednostkę powierzchni jest proporcjonalna do spadku potencjału:

$$Q_{\psi} = \frac{KA\Delta\psi}{l} = \frac{1}{R}\Delta\psi \tag{1}$$

gdzie: Q_{ψ} jest szybkością objętościową przepływu, K – przewodnością hydrauliczną, $\Delta \psi$ – spadkiem potencjału w poprzek warstwy, A – polem warstwy, l jej miąższość, R – opornością.

Laminarny i stacjonarny przepływ cieczy przez prostą kapilarę o przekroju kolistym opisywany jest równanie Hagena-Poiseuille'a. Objętość cieczy, która w czasie *t* pod działaniem różnicy ciśnień przepływa przez rurkę kapilarną o promieniu *r* i długości *l* obliczana jest ze wzoru:

$$Q_{\psi} = \frac{\rho g r^2 A}{8\eta} \frac{\Delta \psi}{l} = \frac{KA}{l} \Delta \psi = \frac{1}{R} \Delta \psi$$
(2)

gdzie: r oznacza promień kapilary, g – przyśpieszenie ziemskie, η jest lepkością cieczy. Równanie to zachowuje swoją strukturę dla liczby Reynoldsa nie większej niż 4. Ostatni warunek spełniony jest przy dyspersyjnym przepływie cieczy w ośrodku porowatym.

Można przyjąć, że ośrodek porowaty odwzorowywany będzie przez układ (sieć) mniej lub bardziej cylindrycznych kanałów powiązanych między sobą. Promień kapilary *r* może w jednym przypadku reprezentować elementarną kapilarę powstałą między cząsteczkami gleby, w drugim przypadku może reprezentować średni promień hydrodynamiczny.

Spojrzenie na ośrodek porowaty jako sieć połączonych kapilar pozwala na zastosowanie statystycznego podejścia do opisu przepływu cieczy. W skład ośrodka porowatego wchodzi faza stała i to jej konfiguracja decyduje o rozkładzie porów w tym ośrodku, a tym samym warunkuje ona przebieg krzywej retencji wodnej ośrodka [5, 18, 19].

OPIS STATYSTYCZNEGO MODELU PRZEWODNOŚCI HYDRAULICZNEJ

Statystyczny model skonstruowano tak, że jednostkową objętość gleby w skład, której wchodzą cząstki fazy stałej, ciekłej i gazowej przedstawiono jako układ zbudowany z elementarnych figur geometrycznych, które tworzą warstwy nakładające się na siebie. Przyjęto, że ciecz, która występuje między cząsteczkami i jej przepływ przez układ zobrazowany będzie przez sieć kapilar. Połączenia kapilar w warstwie będą odwzorowywane przez równoległe połączenia oporników hydraulicznych, natomiast międzywarstwowe połączenia kapilar przez szeregowe połączenia oporników.

Średnie przewodnictwo hydrauliczne sieci kapilar obrazujących ośrodek porowaty szacowano z równania [20]:

$$K = \frac{\rho g}{8\eta} \sqrt{\frac{1}{u \sum_{j=1}^{L} \frac{P(x_{1j}, \dots, x_{kj})}{x_{1j} \frac{r_1^4}{l_1} + \dots + x_{kj} \frac{r_k^4}{l_k}}}$$
(3)

gdzie: *L* jest liczbą wszystkich możliwych kombinacji ułożenia kapilar, x_1 , x_2 ,..., x_k – liczba kapilar powstałych między cząstkami ośrodka o promieniach kapilar r_1 , r_2 ,..., r_k i długościach l_1 , l_2 ,..., l_k , u jest liczbą stopni swobody (liczba równoległych połączeń oporników hydraulicznych), przy czym: $\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = u$, j=1,2,...,L, $P(x_{ij})$ – prawdopodobieństwo. Spełniony musi być też warunek: $\sum_{j=1}^{L} P(X = x_j) = 1$.

Prawdopodobieństwo $P(x_{ij})$ wyliczane było z rozkładu wielomianowego [7]:

$$P(x_{1j},...,x_{kj}) = \frac{u!}{x_{1j}^{!}...x_{kj}^{!}} f_{1}^{x_{1j}}...f_{k}^{x_{kj}}, \qquad (4)$$

 $P(x_{ij})$ – podaje prawdopodobieństwo tego, że *u* niezależnych próbach uzyskamy dokładnie x_{ij} wyników typu *j*, jeśli prawdopodobieństwo wyniku *i* w pojedynczej próbie wynosi f_i , i = 1, 2, ..., k. W przypadku tego modelu f_i , f_2 , ..., f_k , są to zawartości wody i powietrza w jednostce objętości i są one traktowane jako prawdopodobieństwa uzyskania wyniku typu *i* w pojedynczej próbie.

KALIBRACJA MODELU

Kalibracji modelu dokonano na drodze analizy składowych jego elementów oraz na podstawie porównania wartości obliczonych z modelu ze zmierzonymi. Do jego kalibracji użyto krzywej retencji wody oraz wybrane wartości (skrajne) przewodności hydraulicznej ośrodka porowatego. Przyjęto też pewne uproszczenia odnośnie ośrodka. Opisano go sześcioma różnymi kapilarami o jednakowych długościach. Pięć z nich wyznaczono z krzywej retencji wody ośrodka, szóstą kapilarę, reprezentującą parę wodną, dobierano obliczeniowo używając do tego wartości przewodności hydraulicznej w strefie nienasyconej woda. Długość kapilary oraz stopnie swobody modelu *u* dobierano również na drodze obliczeń używając do tego przewodności hydraulicznej w strefie pełnego nasycenia ośrodka wodą. W tym przypadku szósta kapilara równa była zeru, a w obliczeniach przewodności hydraulicznej uwzględniane były tylko kapilary wyznaczone z krzywej retencji. Ilościowe miary dokładności przybliżenia (zgodności) właściwości wyliczanej ze wzorów z danymi pomiarowymi określano ze znanych z rachunków błędów wielkości. Są to: średni błąd kwadratowy:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (f_{mi} - f_{ci})^2}{k}},$$
(5)

gdzie: f_{mi} – wartość zmierzona, f_{ci} – wartość obliczona, k = n - 1 jeśli n < 30 i k = n jeśli $n \ge 30$, n – liczba danych. Maksymalny błąd względny:

$$\eta_{b} = \max_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \left| \frac{f_{mi} - f_{ci}}{f_{mi}} \right| \cdot 100\% \right\}.$$
(6)

DANE POMIAROWE

Dane pomiarowe porowatości, gęstości ośrodka, gęstości fazy stałej, zawartości materii organicznej, zawartości wody przy różnym jej potencjale, przewodności wodnej oraz temperatury ośrodka, pochodziły z prac Brooksa i Coreya [1] i Selima i in. [18]. Dane obejmowały dwa ośrodki porowate: zwięzłą skałę – skała Berea i glebę piaskową Lakeland pobraną z wierzchniej warstwy 0–15 cm.

SZACOWANIE PRZEWODNOŚCI HYDRAULICZNEJ SKAŁY I PIASKU

Szacowanie przewodności hydraulicznej zwięzłej skały i drobnego piasku Lakeland prowadzono przy użyciu modelu statystycznego (równanie 3), obliczenia zaś za pomocą programu komputerowego "Soil Electric, Hydraulic, Pneumatic, Thermal and Diffusivity Properties Software Package 1.0" [20, 21]. Do programu wprowadzono dane otrzymane z krzywej retencji skały i piasku (Rys. 1), tj. średnie promienie hydrauliczne i odpowiadające im zawartości wody oraz wybrane wartości przewodności hydraulicznej. Dane te zestawiono w Tabeli 1. Krzywa retencji skały Berea (Rys. 1a) znacząco się różniła od krzywej retencji gleby piaskowej Lakeland (Rys. 1b). Znacznie zróżnicowane były też wartości przewodności hydraulicznej w stanie pełnego nasycenia ośrodka. Odmienności te miały swoje odbicie w wartościach promieni i długościach kapilar jak i w odpowiadających im wartościach zawartości wody. Już wstępne analizy krzywych retencji i szacowanych przewodności hydraulicznych skały i piasku ujawniły znaczące zróżnicowanie wartości promienia kapilary odnoszącej się do pary wodnej oraz jej zależność od wilgotności i struktury materiału. Biorąc pod uwagę prężność pary wodnej w stanie różnego uwilgotnienia ośrodka, można przyjąć, że przy wilgotności równej zero wartość promienia kapilary parowej będzie równa zeru, oraz że będzie on rósł wykładniczo wraz ze wzrostem wilgotności. Na drodze analizy otrzymanych wyników określono wartości promieni kapilar parowych oraz wyznaczono parametry równania wykładniczego (Tabela 1). Stwierdzono również, że powyżej pewnej wartości wilgotności w przypadku piasku (0,16 m³ m⁻³) i dla wszystkich wilgotności skały wartości promieni kapilar parowych były stałe, ale różne. Punktem granicznym wilgotności w przypadku piasku okazał się punkt przecięcia się prostej z osią wilgotności, przy czym prostą tę wyznaczono w oparciu o część punktów krzywej retencji. Była to ta część, w której obserwuje się szybki spadek wartości potencjału wody wraz ze wzrost wilgotności (Rys. 1b, Tabela 1).

Tabela 1. Parametry modelu przewodności wody	
Table 1. Water conductivity model parameters	

Parametry modelu przewodności wody					
Indeks Skała Berea		Piasek Lakeland			
i	$\theta_i (m^3 m^{-3})$	<i>r_i</i> (μm)	$\theta_i (m^3 m^{-3})$	<i>r_i</i> (μm)	
1	0,0021	83,5	0,0079	598,2	
2	0,0132	41,0	0,0458	125,9	
3	0,0453	31,8	0,0854	70,6	
4	0,0744	23,6	0,0783	43,4	
5	0,0711	14,9	0,1562	19,9	
6	0,2060	0,9	0,2150	3,0	
			< 0,160	$6,8\cdot10^{-10} e^{52.4502\cdot\theta}$	
Parametr					
K_s^*	4,73·10 ⁻⁶ m s ⁻¹		$4,291 \cdot 10^{-5} \text{ m s}^{-1}$		
ф*	$0,206 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$		$0,375 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$		
u	7		a sussible deal 7 an idea againt		
~ 100	35460 m		ante ligidan	21000 m	

 θ_i – zawartość wody odpowiadająca danemu promieniowi kapilary r_i , K_s – przewodność wodna w stanie pełnego nasycenia ośrodka porowatego wodą, ϕ – porowatość, u – stopnie swobody, l – długość kapilary. * Dane z prac: [1, 18].





Fig. 1. Soil water potential of rock and sand as a function of water content – a) Berea Sandstone and b) Sand Lakeland and linear equation, ψ – water potential, θ – water content, R² – determination coefficient. Empirical data (o) from [1, 18].

Zostały ustalone parametry modelu statystycznego przy których dokonano obliczeń przewodności hydraulicznej skały i piasku. Wynosiły one odpowiednio: stopień swobody równy był u = 7 dla obu ośrodków, długości kapilar były różne, ale stałe w całym zakresie badanych wilgotności i wynosiły odpowiednio: skała Berea l = 35460 m i piasku Lakeland l = 21000 m. Wartości te wskazują, że długość kapilary zależała od ośrodka porowatego, głównie od jego struktury. Im luźniejszy był ośrodek tym mniejsza była długość kapilary. Ta tendencja obserwowana jest również dla innych ośrodków porowatych.

PORÓWNANIE WYNIKÓW OBLICZEŃ Z DANYMI POMIAROWYMI

Obliczone i zmierzone przewodności hydrauliczne skały i piasku w funkcji wilgotności oraz porównanie przewodności obliczonej z danymi pomiarowymi przedstawiono na Rys. 2. Na rysunkach podano również równania regresji liniowej oraz współczynniki determinacji. Przewodność hydrauliczna skały zmieniała się z zakresie trzech rzędów wielkości, piasku w zakresie sześciu rzędów. Natomiast zakres zmian wilgotności skały by prawie dwukrotnie mniejszy od zakresu zmian wilgotności w piasku. Przebiegi zależności przewodności hydraulicznej skały i piasku od wilgotności w pół logarytmicznej skali znacznie się różniły między sobą. Skała wykazywała w miarę liniową zależność, piasek dużą nieliniowość. W tym ostatnim przypadku przebieg zależności przewodności od wilgotności można byłoby przybliżyć dwoma prostymi o różnych współczynnikach kierunkowych. Punkt przecięcia się tych prostych znajdował się w okolicy 0,16 m³ m⁻³ wilgotności piasku.

Przeprowadzone porównania i analizy uzyskanych wyników wskazują na bardzo dobrą zgodność wartości obliczonych ze zmierzonymi. Równanie prostej otrzymanej z porównania wyników obliczeń z danymi pomiarowymi z zerowym wyrazem wolnym jest w dobrej zgodności z równaniem jeden do jednego. Współczynnik kierunkowy prostej, w przypadku skały, był prawie równy jedności, natomiast w przypadku piasku był o 0,1 większy od jedności, co wskazywałoby, że model nieco zawyża wartości przewodności hydraulicznej. Wysokie wartości współczynników determinacji $R^2 > 0.96$ wskazują, że przyjęte uproszczenia są dopuszczalne, a zmienne (rozkład kapilar, prawdopodobieństwo wystąpienia kapilar o określonych wymiarach) użyte przy obliczeniach zostały wybrane poprawnie. To spostrzeżenie potwierdza średni błąd kwadratowy i maksymalny błąd względny. Dla skały Berea wynosiły one odpowiednio $\sigma_b = 2,29 \cdot 10^{-7}$, $\eta_b = 18.6$ %, a dla piasku Lakeland $\sigma_b = 3.06 \cdot 10^{-6}$, $\eta_b = 99.8$ %. W ostatnim przypadku maksymalny bład względny był większy przy niższych wilgotnościach. Poniżej wilgotności 0,16 m³ m⁻³ mieścił się on w przedziale od 35% do 99,8%, powyżej tej wilgotności mieścił się w przedziale od 0,6 % do 36%.



Rys. 2. Przewodność hydrauliczna skały i piasku obliczona i zmierzona w funkcji jej wilgotności – a) skała Berea i b) piasek Lakeland oraz porównanie przewodności obliczonej, K_o , z danymi pomiarowymi, K_z , i odpowiadające im równania regresji oraz współczynniki determinacji, \mathbb{R}^2 , c) skała Berea, d) piasek Lakeland. Dane pomiarowe (o) pochodzą z prac [1, 18].

Fig. 2. Calculated and measured hydraulic conductivity of rock and sand as a function of water content – a) Berea Sandstone and b) Sand Lakeland. Also shown comparison of calculated, K_a , and measured, K_z , hydraulic conductivity of rock and sand, parameters of linear regression and coefficients of determination, \mathbb{R}^2 , c) Berea Sandstone, d) Sand Lakeland. Empirical data (o) from [1, 18].

PODSUMOWANIE

Podjęta w pracy próba opisu przewodności hydraulicznej ośrodka porowatego na bazie statystycznego modelu przewodności miała na celu zbadanie wpływu głównych cech fizycznych ośrodka na jego przewodność, znalezienie możliwie najlepiej charakteryzujących zmiennych, a także sprawdzenie czy można wyodrębnić parametry modelu wspólne dla wielu ośrodków porowatych, a jeśli nie, to określić od czego moga one zależeć.

Stwierdzono, że dane uzyskiwane z krzywej retencji (rozmiary kapilar i prawdopodobieństwo wystąpienia kapilar o określonych wymiarach) są reprezentatywne do wyznaczania przybliżonego rozkładu porów w ośrodku, a zawartość wody i powietrza do wyznaczania prawdopodobieństwa znalezienia określonej kapilary w pojedynczej próbie.

Analiza otrzymanych wyników wykazała, że przyjęte dane wejściowe oparte na krzywej retencji i skrajnych wartościach przewodności hydraulicznej ośrodka są wystarczające, a przyjęte uproszczenia dopuszczalne w tego typu badaniach, jak również, że zmienne użyte do obliczeń oraz parametry modelu zostały wybrane poprawnie.

PIŚMIENNICTWO

- Brooks R.H., Corey A.T.: Hydraulic properties of porous media. Hydrology Papers. Colorado State University. Fort Collins, Colorado, 3, 1–27, 1964.
- Campbell G.S.: A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data. Soil Sci., 117, 311–314, 1974.
- 3. Cook F.J., Broeren A.: Six method for determining sorptivity and hydraulic conductivity with disc permeameters. Soil Sci., 157, 2–11, 1994.
- 4. Crawford J.W.: The relationship between structure and the hydraulic conductivity of soil. European J. Soil Sci., 45, 493–502, 1994.
- 5. Czachor H.: Geometria fazy stałej i przestrzeni porów w rolniczych ośrodkach granularnych na przykładzie gleby mineralnej. Acta Agrophysica, 7, 1997.
- 6. Dechnik I., Lipiec J.: Przewodnictwo wodne gleby w strefie nienasyconej i metody jego pomiaru. Problemy Agrofizyki, 32, 1980.
- Eadie W.,T, Drijard D., James F.,E., Roos M., Sadoulet B.: Metody statystyczne w fizyce doświadczalnej. PWN. Warszawa, 63-64, 1989.
- 8. Germann P.F., DiPietro L.: When is porous-media flow preferential? A hydromechanical perspective. Geoderma, 74, 1–21,1996.
- Genuchten van, M.T.: A closed-form equation predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., 44, 892–898, 1980.
- 10. Haverkamp R., Parlange J.Y.: Predicting the water-retention curve from particle-size distribution: sandy soils without organic matter. Soil Sci., 142, 325-339, 1986.
- Hopmans J.W., Dane J.H.: Temperature dependence of soil hydraulic properties. Soil Sci. Soc. Am. J., 50, 4–9, 1986.
- Horowitz J., Hillel D.: A theoretical approach to the areal distribution of soil surface conductivity. Soil Sci., 143, 231–240, 1987.
- 13. Kutilek M., Nielsen D.R.: Soil Hydrology. Cremlingen-Destedt, Catena Verlag, 1994.
- 14. Majercak J., Novak V.: Simulation of the soil-water dynamics in the root zone during the vegetation period. I. Simulation model. Vodohosp. Cas., 40, 299–315, 1992.

- 15. Mualem Y., Dagan G.: Hydraulic conductivity of soils: Unified approach to the statistical models. Soil Sci. Soc. Am. J., 42, 392–395, 1978.
- 16. Mualem Y.: Prediction of the soil boundary wetting curve. Soil Sci., 137, 379-390.1984.
- Nitao J.J., Bear J.: Potentials and their role in transport in porous medium. Water Resour. Res., 32, 225–250, 1996.
- Selim H.M., Hammond L.C., Mansell R.S.: Soil water movement and uptake by plants during water infiltration and redistribution. Soil and Crop Sci. Soc. of Florida, 36, 101–107, 1976.
- 19. Sobczuk H.A.: Opis stanu fizycznego gleby jako ośrodka nieuporządkowanego na przykładzie krzywych retencji wody. Acta Agrophysica, 11, 1998.
- 20. Usowicz B.: Statystyczno-fizyczne modele przepływu masy i energii w ośrodku porowatym. Acta Agrophysica, 29, 2000.
- 21. Usowicz B.: Soil Electric, Hydraulic, Pneumatic, Thermal and Diffusivity Properties Software Package 1.0. Copyright: Institute of Agrophysics PAS, Lublin, 2000.
- 22. Walczak R.: Modelowe badania zależności retencji wodnej od parametrów fazy stałej gleby. Problemy Agrofizyki, 41, 1984.
- 23. Walczak R., Usowicz B.: Variability of moisture, temperature and thermal properties in bare soil and in crop field. Int. Agrophysics, 8, 161–169, 1994.

STATISTICAL APPROACH FOR HYDRAULIC CONDUCTIVITY OF POROUS MEDIUM

B. Usowicz

Institute of Agrophysics PAS, ul. Doświadczalna 4, 20-290 Lublin 27, Poland e-mail: Usowicz@demeter.ipan.lublin.pl

Summary. In this paper the calculations of hydraulic conductivity of two porous media based on a new physical-statistical model are presented. The comparison of the calculated results with the measured data as well as the statistical analysis can be a basis to the statement, that this model predicts the hydraulic conductivity with the satisfactory accuracy.

Keywords: retention curve, hydraulic conductivity, porous medium.