

Analiza porównawcza jawnych wzorów dla współczynnika liniowych strat hydraulicznych

Określenie przedmiotu opracowania

Podstawowymi zależnościami hydraulicznego obliczania ustalonych turbulentnych przepływów ciśnieniowych w chropowatych kołowych przewodach rurowych są wzory:

- Darcy-Weisbacha

$$h = \left(\sum \zeta_i + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{8Q^2}{\Pi^2 g d^4} \quad (1)$$

- Colebrooka-White'a

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71} \right) \quad (2)$$

- wzór określający liczbę Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi d v} \quad (3)$$

- wzór określający chropowatość względną przewodu

$$\varepsilon = \frac{k}{d} \quad (4)$$

gdzie:

h – straty hydrauliczne,

λ – współczynnik liniowych strat hydraulicznych,

ζ_i – współczynniki lokalnych strat hydraulicznych, wg PN-76/M-34034,

k – chropowatość bezwzględna wewnętrznych ścian przewodu, wg PN-76/M-34034,

v – kinematyczny współczynnik lepkości płynu,

Q – objętościowe natężenie przepływu,

d, l – średnica i długość rurociągu.

Na podstawie przytoczonych równań można rozwiązywać trzy typy zadań hydraulicznego obliczania przewodów. W szczególności wyznaczaniu może podlegać h , Q lub d , gdy dane są w każdym przypadku pozostałe wielkości. Ze względu na uwikłaną formę wzoru (3) względem λ , rozwiązywanie każdego ze sformułowanych zadań wywołuje znaczne utrudnienia i jest wysoce czasochłonne.

Współczynnik liniowych strat hydraulicznych

Od początku XX w. współczynnik ten był przedmiotem licznych badań ekspe-

rymentalnych. W związku z tym w literaturze przedmiotu istnieje duża ilość różnorodnych wzorów empirycznych. Na II Międzynarodowym Kongresie Zaopatrzenia w Wodę w Paryżu w 1952 roku Lamont (1952, 1954) przedstawił analizę porównawczą licznych wzorów, w wyniku której uznano, że wzór Colebrooka-White'a (1938/39) jest najbardziej zgodny z wynikami pomiarów eksperymentalnych. W związku z tym narodowe komitety normalizacyjne licznych państw wprowadziły ten wzór do swoich norm jako obowiązujący. Polski Komitet Normalizacyjny w 1964 roku wprowadził wzór Colebrooka-White'a do PN-76/M-34034.

Wzór Colebrooka-White'a (1937) jest wzorem aproksymacyjnym, który w szczególnym przypadku dla $\varepsilon \rightarrow 0$ przyjmuje postać wzoru Prandtla-Karmana, natomiast dla Re przyjmujących duże wartości przyjmuje postać wzoru Prandtla-Nikuradsego. Graficznie wzór (2) jest przedstawiany wg PN-76/M-34034 na tzw. wykresie Moody (1944). Na podkreślenie zasługuje to, że Altszul przedstawił (1958) teoretyczne uzasadnienie wzoru Colebrooka-White'a.

Metody graficzne rozwiązywania zadań

W przypadku długich rurociągów, tzn. gdy $\Sigma\zeta$ jest małe w stosunku do $\lambda l/d$, przez odpowiednie połączenie wzorów (1) do (4) oraz przeprowadzając odpowiednie algebraiczne przekształcenia, można utworzyć (Grabarczyk, Szymaszek 1973) trzy bezwymiarowe grupy wyrazowe:

$$X = 2g \frac{h}{j} \frac{k^3}{v^2} \quad (5)$$

$$Y = \frac{4Q}{\pi d v} \quad (6)$$

oraz zależność (4), występujące w równaniu

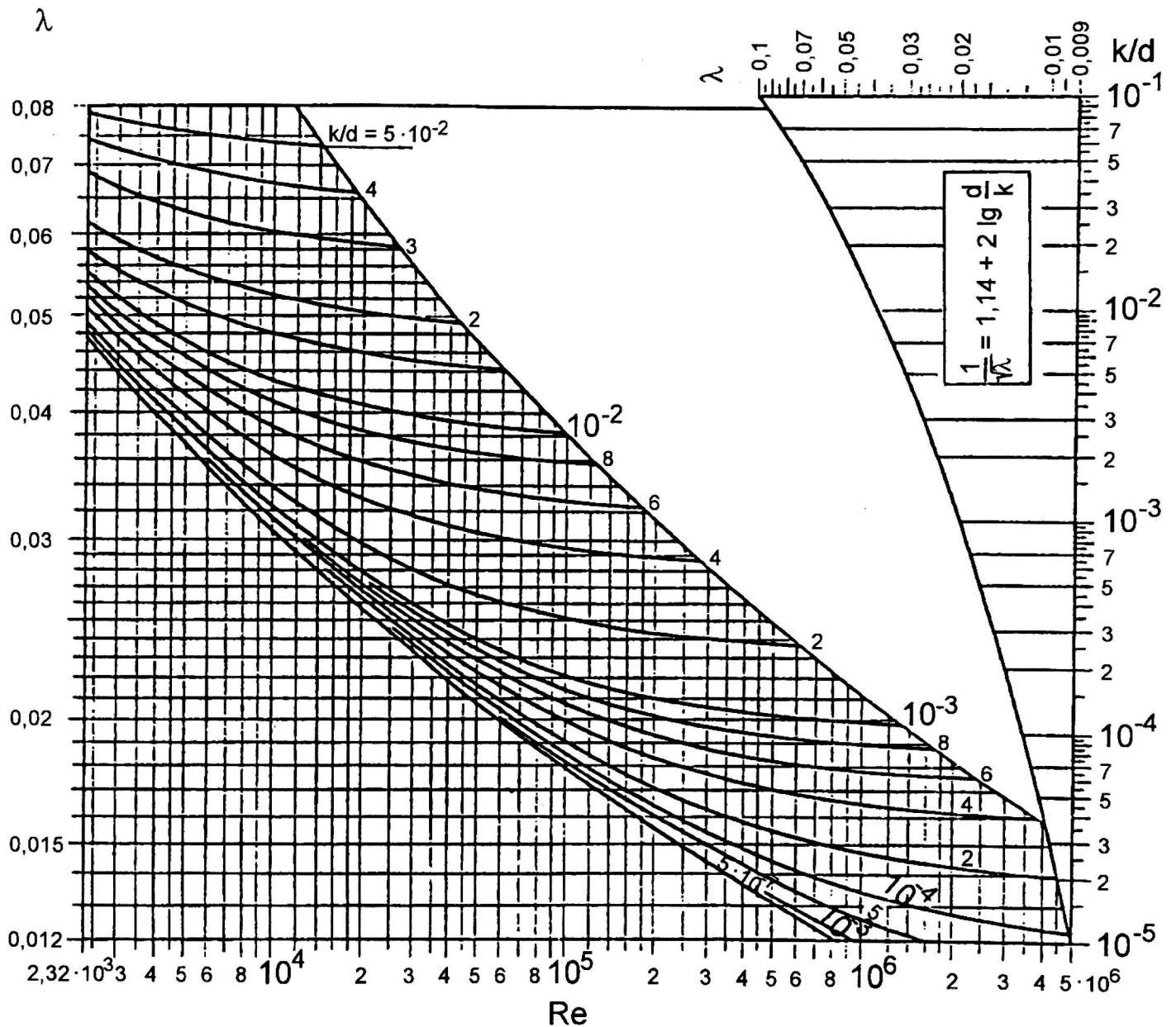
$$Y = -2 \frac{X^{1/2}}{\varepsilon^{5/2}} \lg \left(\frac{2,51\varepsilon^{3/2}}{X^{1/2}} + \frac{\varepsilon}{3,71} \right) \quad (7)$$

Traktując ε jako parametr, przyjmujący wartości w odpowiednim przedziale zmienności, można wyznaczyć wykresy zależności X i Y . Można zauważyć, że skalując logarytmicznie osie współrzędnych, wykresy staną się równoległymi liniami prostymi (rys. 2). Mając do dyspozycji ten wykres (rys. 2) oraz wykorzystując zależności (4), (5) i (6), w elementarny sposób uzyskuje się rozwiązania każdego z trzech typów zadań dla rurociągów długich.

W związku z tym można zauważyć, że przedstawiona metoda charakteryzuje się następującymi zaletami:

- Jest to metoda, która pozwala rozwiązywać wszystkie trzy rodzaje zadań obliczeniowych z zastosowaniem wspólnego wykresu (rys.2), dzięki temu, że występujące w równaniu (7) wyrażenia bezwymiarowe (4), (5) i (6) obejmują wielkość poszukiwaną tylko w jednym typie zadania;
- Podstawowe równanie (7) metody jest równaniem wielkości bezwymiarowych;
- Metoda ta może być stosowana dla dowolnych cieczy w dowolnej temperaturze oraz dla dowolnych chropowatości rur, bez żadnych ograni-

$$\frac{1}{\lambda} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71 d} \right)$$



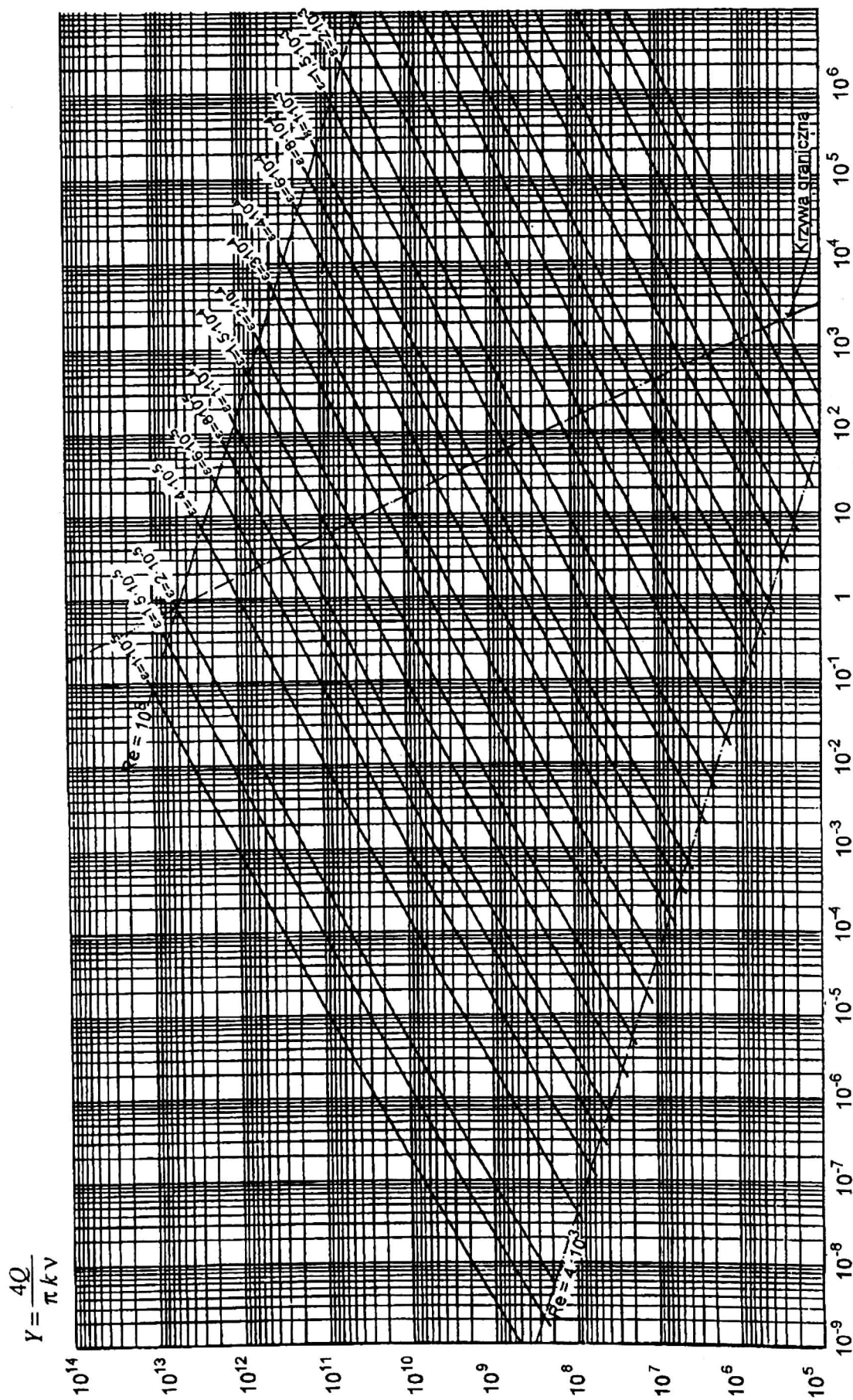
RYСУNEK 1. Wykres Moody

czeń dla ν oraz dla k , w przeciwieństwie do metody przedstawionej przez Waldena i Sawickiego (1968), wymagającej odrębnych nomogramów dla różnych wartości k i ν ;

- Ze względu na to, że wykresy są równoległymi liniami prostymi (rys. 2) metoda jest bardzo dogodna do realizacji obliczeń z zastosowaniem metody graficznej.

Natomiast do wad metody należy zaliczyć to, że:

- Jest mało stabilna ze względu na ϵ , gdyż małe zmiany wartości tej wielkości powodują znaczne zmiany wielkości poszukiwanych;
- Stosowanie metody do obliczeń komputerowych, np. dużych sieci wodociągowych, dla wszystkich rodzajów zadań obliczeniowych pojedynczych



$$X = 28 \frac{\Delta H}{L} \cdot \frac{k^3}{v^2}$$

RYSUNEK 2. Wykres metody graficzno-analitycznej

przewodów wymaga również (podobnie jak dla wzoru Colebrooka-White'a) stosowania postępowania iteracyjnego, co znacznie wydłuża czas obliczeń.

Ze względu na ostatnią uwagę, uzasadnione jest szerokie zainteresowanie poszukiwaniem jawnych wzorów dla współczynnika λ , dobrze aproksymujących zależność funkcyjną Colebrooka-White'a (2).

Przegląd jawnych wzorów dla współczynnika λ

Przegląd ten obejmuje wybór kilku nowszych wzorów aproksymacyjnych, które ze względu na ich dokładność zasługują na szczególną uwagę. Wybozem objęto także kilka starszych wzorów ze względu na ich upowszechnienie. Celem uwzględnienia tych wzorów w przeglądzie i analizie porównawczej jest wykazanie, że wzory te charakteryzują się stosunkowo niską dokładnością. Niektóre z wzorów objętych przeglądem zostały przekształcone w taki sposób, aby wyeksponować podobieństwa w budowie, które jak się okaże pozostają w pewnym związku z ich dokładnością. Są to następujące wzory:

Zigranga-Sylvestra (1982):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left\{ \frac{\varepsilon}{3,7} - \frac{5,02}{\text{Re}} \lg \left[\frac{\varepsilon}{3,7} - \frac{5,02}{\text{Re}} \lg \left(\frac{\varepsilon}{3,7} + \frac{13}{\text{Re}} \right) \right] \right\} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \lg \left(\frac{7}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon}{10} \right) \quad (16)$$

(8)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\varepsilon}{3,7} - \frac{5,02}{\text{Re}} \lg \left(\frac{\varepsilon}{3,7} + \frac{13}{\text{Re}} \right) \right]$$

$$(9) \quad \lambda = 0,11 \left(\frac{68}{\text{Re}} + \varepsilon \right)^{1/4} \quad (17)$$

Phama (1979):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\varepsilon}{3,7} - \frac{4,52}{\text{Re}} \lg \left(\frac{7}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon}{7} \right) \right] \quad (10)$$

Chena (1985):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\varepsilon}{3,7} - \frac{5,04}{\text{Re}} \lg \left(\frac{5,85}{\text{Re}^{0,9}} + \frac{\varepsilon^{1,11}}{2,83} \right) \right] \quad (11)$$

Haalanda (1983):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \lg \left(\frac{6,9}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon^{1,11}}{4,27} \right) \quad (12)$$

Jaina (1976):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{5,72}{\text{Re}^{0,9}} + \frac{\varepsilon}{3,71} \right) \quad (13)$$

Waldena (1954, 1961, 1968):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{6,1}{\text{Re}^{0,915}} + \frac{\varepsilon}{3,73} \right) \quad (14)$$

Guido di Ricco (1963), Colebrooka (1938/39), Chirchilla (1973):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{5,76}{\text{Re}^{0,9}} + \frac{\varepsilon}{3,71} \right) \quad (15)$$

Wzory (logarytmiczny i wykładniczy) Altszula (1, 3):

Godne podkreślenia i zwrócenia uwagi są podobieństwa i różnice budowy wymienionych wzorów.

Pościowa analiza porównawcza wybranych 10 wzorów jawnych (8) do (17) zostanie przeprowadzona przez obliczenie błędów względnych, zdefiniowanych wzorem

$$\delta = \frac{\lambda_2 - \lambda_i}{\lambda_2} \cdot 100 \quad (18)$$

gdzie:

λ_2 – wartości liczbowe obliczone komputerowo dla wybranych wartości Re i ε ze wzoru Colebrooka-White'a (2), z zastosowaniem dowolnej metody wyznaczania rzeczywistych pierwiastków algebraicznych równań przestępnych;

λ_i – wartości liczbowe obliczone komputerowo dla tych samych wartości Re i ε z odpowiedniego wzoru jawnego, spośród wzorów (8) do (17).

Obliczenia wartości współczynnika λ , z wcześniej wymienionych wzorów, zostały przeprowadzone dla wybranych wartości wielkości ε i Re w tzw. strefie przejściowej (rys. 1 i tab. 1*).

W tabeli 2, dla wszystkich ocenianych wzorów jawnych od (8) do (17), w kolumnach 2 do 6 przedstawiono uśrednione wartości obliczonych wartości błędu względnego δ dla poszczególnych wartości ε , natomiast w kolumnie 7 dla poszczególnych równań przedstawiono maksymalną wartość spośród błędów uśrednionych.

*Dziękuję Panu mgr. inż. Arturowi Kanclerzowi za wykonanie obliczeń komputerowych.

TABELA 1. Wartości Re i ε , dla których wykonano obliczenia wartości λ i δ dla wybranych 10 wzorów jawnych

ε	Re					
	$4 \cdot 10^3$	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$5 \cdot 10^{-2}$	+	+				
10^{-2}	+	+	+			
10^{-3}	+	+	+	+		
10^{-4}	+	+	+	+	+	
10^{-5}	+	+	+	+	+	+

W tabeli 3, dla równań (8–17) i dla poszczególnych wartości ε , w kolumnach 2 do 6 przedstawiono wartości maksymalnych błędów δ , natomiast w kolumnie 7 przedstawiono maksymalne wartości, spośród wymienionych, czyli są to wartości błędów względnych maksimum maksimum dla całej strefy przejściowej.

Ocena wzorów

Analizując wyniki obliczeń, przedstawione w tabelach 2 i 3, można stwierdzić, że:

- Wzór (8) Zigranga-Sylvestra z bardzo wysokim stopniem dokładności, do 0,1%, aproksymuje wyniki uzyskiwane ze wzoru (2) Colebrooka-White'a;
- Wszystkie wzory o bardziej rozwiniętej budowie, tzn. od (8) do (11), charakteryzują się dużą dokładnością, poniżej 1%, w przeciwieństwie do pozostałych wzorów, których budowa jest bardziej uproszczona;
- Dokładność drugiego wzoru Zigranga-Sylvestra (9) obniża się w miarę spadku chropowatości względnej rurociągu;
- Na drugim miejscu pod względem dokładności aproksymacji plasuje się wzór Phama (10);

TABELA 2. Średnie wartości δ (w %) dla wybranych wartości ε

Nr równania	ε					$\delta_{\text{sr max}}$
	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	
1	2	3	4	5	6	7
8	-0,10	-0,1	0,0	+0,1	+0,1	+0,1
9	-0,05	+0,05	-0,1	-0,24	-0,35	-0,35
10	-0,25	-0,1	+0,1	+0,1	+0,1	-0,25
11	-0,10	-0,2	-0,15	+0,1	-0,06	-0,2
12	-0,75	-0,16	+0,15	0,0	-0,15	-0,75
13	-2,40	-1,9	-0,9	-0,46	-0,25	-2,4
14	-1,70	-0,8	+0,025	+1,2	+1,5	-1,7
15	-2,50	-2,0	-1,0	-0,7	-0,47	-2,5
16	+16,0	+6,6	+0,8	-0,5	-3,0	+16,0
17	+27,0	+8,7	+0,9	+2,7	+10,4	+27,0

TABELA 3. Maksymalne wartości δ (w %) dla wybranych wartości ε

Nr równania	ε					$\delta_{\text{max max}}$
	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	
1	2	3	4	5	6	7
8	+0,1	+0,1	+0,1	+0,1	+0,1	+0,1
9	+0,1	+0,2	+0,3	-0,7	-0,9	-0,9
10	-0,3	-0,1	+0,3	+0,3	+0,3	+0,3
11	-0,1	-0,3	-0,4	-0,3	+0,3	-0,4
12	-1,0	-0,4	+0,9	-1,2	-1,3	-1,3
13	-3,1	-3,0	-1,8	-1,5	-1,5	-3,1
14	-2,3	-1,4	+0,5	+2,7	+2,7	+2,7
15	-3,2	-3,2	-2,0	-1,8	-1,9	-3,2
16	+16,8	+9,1	+2,2	-2,4	-8,4	+16,8
17	+27,1	+9,2	+1,8	+8,1	+23,2	+27,1

- Nieznacznie niższą dokładnością charakteryzuje się kolejny wzór Chena (11), jednak występujące w nim wykładniki potęgowe obniżają jego zalety, ze względu na wydłużanie czasu obliczeń komputerowych dużych wielopierścieniowych sieci wodociągowych;
- Na uwagę zasługuje najstarszy (15) spośród jawnych wzorów aproksymacyjnych, ogłoszony w piśmiennictwie – jak się wydaje – niezależnie przez trzech autorów, którego dokładność jest większa od 1%, ale niezbyt dużo;
- W piśmiennictwie państw Europy Wschodniej oraz b. Związku Radzieckiego szczególnie rozpowszechnione są wzory Altszula (16) i (17), które charakteryzują się mniejszą dokładnością, tym mniejszą – im większa jest chropowatość ścian rurociągów, czyli rurociągów z dłuższym czasem eksploatacji.

Wnioski

1. Biorąc pod uwagę przedstawioną ocenę, można stwierdzić, że spośród analizowanych wzorów jawnych, wzór Zigranga-Sylvestra (8) oraz wzór Phama (10) zasługują na szczególne preferencje jako wzory charakteryzujące się bardzo dużą dokładnością aproksymacji wzoru Colebrooka-White'a (2).

2. Preferowane wzory szczególnie są przydatne do przyspieszania komputerowych obliczeń wielopierścieniowych sieci wodociągowych, z zastosowaniem iteracyjnych metod wyrównywania naporów hydraulicznych (Szymaczek 1973). Do obliczeń sieci wodociągowych, z zastosowaniem iteracyjnych metod wyrównywania przepływów (Szymaczek 1973), może być wykorzystywane równanie (7), którego budowa jest jawna względem natężenia przepływu Q .

3. Należy zauważyć, że preferowane wzory nie upraszczają komputerowego obliczania zadań trzeciego typu, tzn. kiedy wyznaczana jest średnica d , gdy zadane są wszystkie pozostałe wielkości, wtedy konieczne jest zastosowanie dowolnej iteracyjnej metody do wyznaczenia pierwiastka ε z równania (7).

Literatura

- ALTSZUL A. D. 1951: *O zakone soprotivlenija truboprovodov*. Dokłady AN SSSR. vol. 76; nr 6.
- ALTSZUL A. D. 1958: *K vyvodu formuły Kolbruka (O profile skorostej i soprotivlenija pri turbulentnom teczenii v technicznych truboprovodach)*. Izv. AN SSSR, OTN, nr 8, 122–125.
- ALTSZUL A. D. 1970, 1982: *Gidrawliczeskie soprotivlenija*. Moskva Niedra.
- COLEBROOK C. F. 1938/39: *Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws*. J. of the Institution of Civil Engineers. Vol. 11; 133–156.
- COLEBROOK C. F., WHITE C. M. 1937: *Experiments with fluid friction factor in roughened pipes*. Proceedings of the Royal Society. Ser. A. vol. 161; nr A 903; 367–381.
- CHEN N. H. 1979: *An explicit equation for friction factor in pipes*. Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals. Vol. 18; No 3; 296–297.
- CHEN J. J. J. 1984: *A simple explicit formula for the estimation of pipe friction factor*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. vol. 77, Part 2, Mar; 49–55.
- CHEN J. J. J. 1985: *Systematic explicit solutions of the Prandtl and Colebrook-White equations for pipe flow*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. vol. 79, Part 2, June, 383–389.
- CHURCHILL S. W. 1973: *Empirical expression for the shear stress in turbulent flow in commercial pipe*. American Institution of Chemical Engineers J. Vol. 19, 1973, nr 2; 375–376.
- CHURCHILL S. W. 1977: *Friction-factor equation spans all fluid-flow regimes*. Chemical Engineering. Vol. 84; nr 24; 91–92.
- GRABARCZYK C., SZYMASZEK E. 1973: *Podstawowe typy zadań hydraulicznego obliczania przewodów*. Gaz, Woda i Technika Sanitarna. Vol. nr 2, 52–56.
- GRABARCZYK C., SZYMASZEK E. 1973: *Kryteria rozstrzygające strefę przepływu w rurociągach*. Gaz, Woda i Technika Sanitarna. Vol. 47, nr 3; 86–89.
- HAALAND S. E. 1983: *Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow*. J. of Fluids Engineering. vol. 105, March; 89–90.
- JAIN A. K. 1976: *Accurate explicit equation for friction factor*. J. of the Hydraulic Division. Vol. 102; nr 5; 674–677.
- LAMONT P. A. 1952: *British National Report on formula for pipeline calculations*. 2-nd International Water Supply Congress. Paris.
- LAMONT P. A. 1954: *A review of pipe friction data and formula, with a proposed set exponential formulae based on the theory of roughness*. Proceedings of the Institution of

- Civil Engineers. Vol. 3. Part III, April; 248–275.
- LAMONT P. A. 1969: *The choice of pipe flow laws for practical use*. Water and Water Engineering. January; 9–19.
- MOODY L. F. 1944: *Friction factor for pipe flow*. Transaction of the ASME, vol. 66, 671–684.
- PHAM Q. T. 1979: *Explicit equations for the solution of turbulent pipe-flow problems*. Transaction of the Institution of Chemical Engineers. Vol. 57, 281–283.
- PN-76/M-34034. Rurociągi. Zasady obliczania strat ciśnienia.
- RICCO GUIDO di 1963: *Sull'impegno della formula Colebrook White per il moto uniforme turbulento*. L'Energia Elettrica. nr 12; 929–933.
- SZYMASZEK E. 1973: *Analiza porównawcza i opracowanie algorytmów hydraulicznego obliczania wielopięściennych sieci wodociągowych z zastosowaniem e.m.c.* Rozprawa doktorska, promotor – doc. dr hab. inż. Czesław Grabarczyk. Politechnika Poznańska.
- ZIGRANG D. J., SYLVESTER N. D. 1982: *Explicit approximations to the solution of Colebrook's friction factor equation*. The American Institute of Chemical Engineers Journal. Vol. 28, Nr 3, 514–515.
- WALDEN H. 1954: *Nowe wzory do obliczeń gazociągów dalekosiężnych*. Gaz, Woda i Technika Sanitarna. nr 3.
- WALDEN H. 1961: *Współczynnik oporów hydraulicznych w gazociągach dalekosiężnych*. Rozprawy Inżynierskie. Vol. 9, nr 3, 445–453.
- WALDEN H., SAWICKI W. 1968: *Tablice i nomogramy do obliczania strat ciśnienia w przewodach wodociągowych*. Warszawa, Arkady.

Summary

The comparative analysis of explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. The article aims at presenting a selection of explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow and developing their evaluation based on numerical comparative analysis. Ten chosen approximation formulas (8) – (17) were selected for the review.

The relative error δ , defined by the formula (18), was assumed for the evaluation of the correctness of these formulas results as compared to the results of the formula Colebrook-White (2). The results of the computer calculations of the δ_{\max} value were shown in table 3. Formulas (8) and (10) can be defined as very accurate.

Author's address

Cz. Grabarczyk

Warsaw Agricultural University

02-787 Warszawa, ul. Nowoursynowska 166

Poland