

URSZULA ZAJĄCZKOWSKA

Optymalizacja kształtu i struktury drzewa według teorii jednorodnego rozkładu naprężeń*

Optimization of tree structure and shape according to axiom of uniform stress

ABSTRACT

Zajączkowska U. 2006. Optymalizacja kształtu i struktury drzewa według teorii jednorodnego rozkładu naprężeń. Sylwan 4: 53-58.

A review of optimization methods based on the axiom of uniform stress and finite element method (FEM) developed by Mattheck is given. Computer-aided optimization (CAO) and computer-aided internal organization (CAIO) methods for modeling adaptive growth of trees are described. Examples of mechanical self-optimization of internal structure and tree shape under various environmental conditions e.g. control of spiral grain formation, xylem ray structure, stem wound regeneration, sable-shaped tree stems, root system growth are discussed.

KEY WORDS

trees mechanical properties, biomechanics, adaptive growth, axiom of uniform stress, mechanical self-optimization of trees

ADDRESSES

Urszula Zajączkowska – Katedra Botaniki Leśnej SGGW;
ul. Nowoursynowska 159; 02-776 Warszawa; uzaj@wl.sggw.waw.pl

Wzrost adaptacyjny u drzew polega na ciągłych subtelnym transformacjach pod wpływem zmian warunków życia. Termin „optimalny” wg Słownika Wyrazów Obcych [1979] oznacza „najlepszy, najkorzystniejszy”. Drzewa jako układy biofizyczne podlegają tym samym prawom fizyki, jakim podlega każdy obiekt na Ziemi. Rośliny drzewiaste dzięki działalności wtórnej tkanki merystematycznej – kambium – i procesom różnicowania, osiągnęły możliwość tworzenia niezwyklej tkanki – drewna (ksylemu). Drewno jest materiałem silnie zoptymalizowanym. Jest specyficznym budulcem głównej masy organizmu. Pełni funkcje transportowe dla wody i związków mineralnych. Często też przez zmianę swoich anatomicznych cech – np. przez tzw. drewno reakcyjne; może tworzyć struktury, w których mają wyraz zaistniałe naprężenia pochodzące np. od ciężaru bocznych gałęzi i towarzyszącemu mu momentowi zginania pnia, spowodowanym oporem wiatru w koronie drzewa. Istotny jest tu fakt, że struktura optymalna oznacza nie tylko taką, która będzie reakcją na zmieniony stan mechaniki drzewa, ale też taką, która jest dla drzewa energetycznie „tania” do wytworzenia.

W hodowli lasu stosuje się termin „rozpierzacz” [Szymański 1986] dla drzew, które w drzewostanie mogą wytworzyć grube i „rozpierzające się” konary. Utrzymanie ciężkich, rozłożystych gałęzi indukuje znaczny moment zginania (M_z): $M_z = m \cdot g \cdot l$ (gdzie m – masa; g – stała grawitacji; l – długość ramienia), zatem i potężne naprężenia wewnątrz korony oraz pod koroną w pniu. Jednak istotny w tym przypadku jest fakt, że nie każde drzewo może być „rozpierzaczem”,

* Praca została wykonana w ramach badań statutowych Katedry Botaniki Leśnej SGGW

a tylko te, które wyróżniają się dużą witalnością, czyli są w stanie utrzymać tak energochłonny układ, wytworzony dzięki większej liczbie podziałów kambialnych i zwiększonej intensywności asymilacji węgla do wbudowania w ciało organizmu. Dlatego też znamieną jest dążność organizmów do tworzenia „lekkich” konstrukcji. Zasada maksymalnej wytrzymałości przy najmniejszym wkładzie energii/materii jest w procesie wzrostu adaptacyjnego priorytetem.

Jak się okazuje, optymalizacja kształtu elementów konstrukcyjnych, prowadzona przez architektów, konstruktorów i inżynierów, także podlega tym samym warunkom co u roślin [Hejnowicz 2001]. Istnieje szereg metod strukturalnej optymalizacji stosowanych w inżynierii - głównie z nich to [Kim i in. 2001]:

- Optymalizacja z zastosowaniem jednorodności (Optimisation using Homogenisation). Optymalna homogeniczna struktura na poziomie makro uzyskiwana jest przez konstrukcje niejednorodnych mikrostruktur lub przez zmianę budującego materiału w istniejącej strukturze. Tak więc przez działania w skali mikro uzyskuje się zmianę całego układu w makroskali [Kim i in. 2001].
- Optymalizacja wg symulacji krzepnięcia metalu (SA – Simulated Annealing). Krzepnięcie ciekłego metalu jest jednocześnie procesem przejścia układu w niższy stan energetyczny. Optymalizacja opiera się na szeregu równań różniczkowych, opisujących proces tworzenia się wiązań w metalu, które można zaadaptować do innych obiektów [Kirkpatrick i in. 1983]
- Ewolucyjna strukturalna optymalizacja (ESO – Evolutionary Structural Optimisation). Koncepcja ESO zakłada, że przez stopniowe usuwanie z obiektu nieefektywnego materiału, kształt i struktura obiektu dążą do optimum. Podczas procesów iteracyjnych dokonuje się stopniowego odejmowania elementów na skonstruowanej macierzy optymalizowanego obiektu. Warunek maksymalnej wytrzymałości jest uzyskany przy najmniejszej z możliwych masie modelu [Li i in. 1999].
- Optymalizacja na podstawie algorytmów genetycznych (GAs- Genetic Algorithms). W koncepcji tej stosuje się algorytmy zaczerpnięte z zasad genetyki i mechanizmów naturalnej selekcji [Goldberg 1989]. Symuluje się procesy reprodukcji, krzyżowania i mutacji, a do następnej generacji kwalifikuje się rozwiązania najlepiej zaadaptowane do warunków, a odrzuca się rozwiązania gorsze. W efekcie w kolejnych symulacjach doprowadza się do uzyskania rozwiązania optymalnego.

Niezwykle interesująco przedstawia się problematyka optymalizacji zaproponowana przez prof. Mattheck'a [Mattheck, Kubler 1995, Mattheck 1998, Mattheck, Bethge 1998] z Karlsruhe Research Center, który stworzył teorię opisującą strukturalną optymalizację drzew:

Stosując metodę obliczeniową elementów skończonych (FEM- Finite Element Method)), dąży się do uzyskania układu o najmniejszych lokalnych naprężeniach na podstawie zmiany orientacji punktów wiążących modelu bez zmiany grubości warstwy modelowanej. Inspiracją do opracowania teorii stał się adaptacyjny przyrost drewna w drzewie, poddanemu stresowi mechanicznemu. Główne aksjomaty teorii strukturalnej optymalizacji drzew brzmią:

- orientacja oraz cechy elementów anatomicznych pnia / gałęzi odzwierciedlają dążenie do uzyskania równego rozkładu istniejących naprężeń;
- wzrost drzewa jest intensywniejszy w strefach poddanych większym niż średnie naprężeniom;
- stan niezakłóconego jednorodnego naprężenia ogranicza możliwość wystąpienia lokalnego zwiększenia naprężeń (pęknięcia), a także ich zmniejszenia (marnotrawstwa materii).

Modelowanie zoptymalizowanych układów na podstawie mechaniki drzewa uzyskuje się dwoma metodami:

- a) CAO (Computer-Aided Optimization) – komputerowo wspomagana optymalizacja,
- b) CAIO (Computer-Aided Internal Optimization) – komputerowo wspomagana wewnętrzna optymalizacja.

Procedura tworzenia zoptymalizowanego modelu metodą CAO odbywa się w pięciu fazach [Mattheck, Kübler 1995].

1. Stworzenie struktury elementów skończonych FEM, odpowiadającej wymiarowo modelowanemu obiektowi wraz z warstwą zewnętrzną o stałej grubości, którą przyrównuje się do „strefy wzrostu” drzewa - kambium. Przypisanie tej warstwie wartości modułu elastyczności o wielkości 1/400 w porównaniu z warstwami wewnętrznymi.
2. Zdefiniowanie naprężenia modelu FEM. Wynikiem tego jest zmiana współrzędnych punktów wiążących siatki FEM, rozkład obciążenia, napięcia z uwzględnieniem efektywnego naprężenia Misesa (średnia składowa tensora naprężenia) wyrażona wzorem:

$$\sigma_{Mises} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_3 + \sigma_1)^2}$$

gdzie:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – oznaczają naprężenia w głównych kierunkach.

3. Przyrównanie wartości efektywnego naprężenia Misesa do wartości rozkładu ciepła. Rejony poddane większym naprężeniom są modelowane jako „cieplejsze”.
4. Symulacja adaptacyjnego wzrostu wg warunku – strefy o większym naprężeniu czyli o intensywniejszej ekspansji cieplnej „rosną” intensywniej proporcjonalnie wraz z gradientem temperatury.
5. Sprawdzenie zoptymalizowanego kształtu przez obciążenie modelu, ale przy niezminionej wartości modułu Young’a i w razie konieczności powtórzenie cyklu (od pkt. 2).

Zaletami tej metody jest możliwość optymalizacji przy użyciu łatwo dostępnych programów dotyczących metody elementów skończonych (FEM) oraz krótki czas procesu optymalizacyjnego (2-3 iteracje). Metoda jest szeroko stosowana przez inżynierów i architektów zajmujących się problemami wytrzymałości materiałów. Wadą tej metody jest fakt, że dotyczy ona materiałów izotropowych. Korzystanie wyłącznie z metody CAO w stosunku do drzew w celu analizy kształtu, np. zarastających ran, nie pozwala na szczegółowy opis procesu regeneracji z powodu anizotropii drewna. Dlatego też uzupełnieniem komputerowo wspomaganej optymalizacji CAO jest metoda CAIO czyli komputerowo wspomagana wewnętrzna (strukturalna) optymalizacja.

Podstawą teoretyczną do zastosowania metody CAIO jest zjawisko orientacji elementów tkanki drzewnej takich jak np. cewek, naczyń, włókien czy promieni drzewnych wzdłuż głównych kierunków naprężeń. Jednym z najbardziej obrazowych przykładów anatomicznej optymalizacji drzewa jest budowa promienia drzewnego na przekroju stycznym. Gdyby ta stosunkowo delikatna struktura, zbudowana często wyłącznie z komórek miękiszowych, nie była wrzecionowatego kształtu, a np. kolistą – graniczne strefy promienia narażone byłyby na silny stres mechaniczny, wynikający z istniejących ogromnych naprężeń na osi wzdłuż pnia. Pominięcie warunku rozkładu naprężeń wzdłuż włókien w projektowaniu np. konstrukcji drewnianych jest głównym źródłem powstania naprężeń ścinających, które doprowadzają do obniżenia wytrzymałości konstrukcji i tym samym jest przyczyną złamań, splekań itp.

Optymalizację CAIO przeprowadza się stosując także metodę elementów skończonych (FEM). Stworzony model poddaje się zdefiniowanym naprężeniom. W ciągu kilku iteracji uzyskuje się taki układ punktów wiążących siatki modelu elementów skończonych, który odpowiada układowi najbardziej zoptymalizowanemu. Włókna zostają tak zorientowane, by odpowiadały głównym kierunkom naprężeń w modelowanym obiekcie.

Przykłady optymalizacji budowy i kształtu drzew jako wyraz adaptacji do różnych warunków wzrostu.

- Wrzecionowaty kształt elementów anatomicznych, jak i struktur, jakie są przez nie budowane.

Kształt wrzeciona przybierają nie tylko promienie w kierunku stycznym, ale i inne struktury np. blizny po odpadnięciu gałęzi [Mattheck 1998]. Cecha ta została wykorzystana m.in. w zabiegach pielęgnacji zranień - zaleca się nadanie ranom kształtu wrzecionowatego, nawet gdyby to oznaczało znaczne powiększenie powierzchni otwartego drewna. Wrzecionowaty kształt jest bowiem optymalny, jeśli chodzi o działanie naprężeń wzdłużnych, jak i poprzecznych.

- Mechaniczne znaczenie promieni.

Naprężenia w kierunku promieniowym (np. w pniu na skutek momentu zginania) i towarzyszące im naprężenia ścinające w kierunku osiowym są efektywnie przenoszone zarówno dzięki ciągłości anatomicznej w kierunku promieniowym jak i przez wzmocnienie końców anatomicznego elementu; w przypadku promieni drzewnych zaobserwowano bowiem, zwiększoną lignifikację górnego dolnego końca promienia (przekrój styczny), co przyrównuje się do układu z obszaru mechaniki, który odpowiada kształtowi dwuteownika [Mattheck 1998].

- Naprężenia wzrostowe jako wzmocnienie wytrzymałościowe szczególnie kierunku stycznego.

Anizotropia drewna wyrażona odmienną budową anatomiczną w trzech kierunkach przestrzennych oznacza też różne właściwości wytrzymałościowe. Uznaje się płaszczyznę styczną za najmniej wytrzymałą, szczególnie na naprężenia rozciągające [Krzysik 1975]. Towarzyszące ciąglemu wzrostowi na grubość tzw. naprężenia wzrostowe (znaczące naprężenia ściskające), istotnie wpływają na zwiększenie wytrzymałości [Hejnowicz 2002]. Najintensywniejsze naprężenia ściskające odnotowano u szablsto wygiętych buków po tej stronie pnia, która odznaczała się największą krzywizną [Dietrich, Mattheck 1995].

- Wzrost korzeni dąży do ciągłej adaptacji do czynników mechanicznych.

Zgodnie z równaniem Mohra-Coulomba [Scott 1963] {w aspekcie stabilności mas gleby): $s = \sigma \cdot \operatorname{tg}\Phi + c$ (gdzie: s – naprężenia ścinające; c – wielkość kohezji materiału; σ – nacisk prostopadły; Φ – kąt tarcia wewnętrznego) podatność gruntu do wystąpienia w nich naprężeń ścinających jest głównym parametrem „siły tarcia” gruntu, od której zależy stabilność korzeni, czyli i całego drzewa. Im większy nacisk prostopadły drzewa, tym większe tarcie. Dlatego też u drzew pod stałym działaniem jednego kierunku wiatru (np. drzewa z pasa nadmorskiego) korzenie rozrastają się nierównomiernie. Stałe pochylenie korony od siły wiatru powoduje inny, niż u drzew rosnących w zwarciu, rozkład sił i naprężeń. Korzeń od strony nawietrznej jest poddany ciągłym siłom wznoszącym go do powierzchni gruntu, przeciwnie niż korzenie od strony zawietrznej, które do ziemi są niejako wciskane. Naprężenia ścinające w pierwszym z przypadków są dużo mniejsze (mniejszy nacisk prostopadły σ) zatem, aby ustabilizować konstrukcję systemu korzeniowego, drze-

wo rozbudowuje w tym rejonie znaczną sieć korzeni. Po stronie zawietrznej zaś, gdzie dodatkowe naprężenia prostopadłe indukują ogromne naprężenia ścinające – przyrost korzeni jest tam mniejszy niż zwykle [Mattheck i in. 1997]. Można się zatem spodziewać, że przy permanentnym działaniu jednego kierunku wiatru, chwilowa jego zmiana może znacznie łatwiej doprowadzić do przewrócenia drzewa, niż gdyby taka sama siła zadziałała na drzewo rosnące w zwarciu, czyli ze znacznym ograniczonym działaniem wiatru.

- Skręt włókien może być wyrazem usztywniania pnia pod wpływem bodźców mechanicznych.

Drzewa rosnące na zboczach lub w pasie nadmorskim często wykazują skręt włókien. Taka budowa pnia generuje np. na stronie nawietrznej układ naprężeń rozciągających zarówno wynikających z wygięcia pnia (naprężenia równoległe do kierunku siły wiatru), jak i spiralnej budowy (naprężenia równoległe do kierunku skrętu włókien). Podobnie jak to było opisane w punkcie 4 – nagła zmiana kierunku działania bodźca może spowodować, że indukowane zostaną naprężenia ściskające, co jest w tak zmienionej strukturze równoznaczne z powstaniem szeregu pęknięć pnia. Problem został obrazowo opisany, przez analogię do rozkręcania liny w przeciwnym, spiralnym kierunku skrętu [Mattheck 1998].

- Zarastanie tkanką drzewną obcego ciała to dążenie do zminimalizowania jednostkowego stresu mechanicznego.

W przypadku np. kontaktu pnia z kamieniem, w wyniku procesów wzrostowych powierzchnia kontaktu drzewa z obcym ciałem zwiększa się, a kierunek włókien drzewnych w stosunku do granicy z obcym ciałem staje się prostopadły (zgodnie z własnością orientacji włókien do kierunku głównych naprężeń). Podobną reakcję możemy zaobserwować w przypadku zrośnięcia dwóch gałęzi. Niezależnie, czy jest to żywy obiekt (pień, gałąź), czy martwy (kamień, mur) – kambium kształtuje przyrosty w sposób taki, który zrealizowałby zasadę równomiernego naprężenia na powierzchni [Mattheck 1998].

Teoria jednorodnego rozkładu naprężeń w drzewie dostarcza szeregu propozycji dotyczących wyjaśnienia zjawisk towarzyszących mechanice drzewa, szczególnie w odniesieniu do zmienionych warunków środowiska. Stosowanie w badaniach optymalizacji metody elementów skończonych (FEM), która używana jest także w innych działach biologii, m.in. w chirurgii kostnej [Gardner i in. 1999], umożliwia analizę działalności kambium i wynikającej z niej specyfiki wzrostu drzewa.

Należy też zaznaczyć, że propozycje Mattheck'a spotkały się z zastrzeżeniami niektórych badaczy, w stosunku do głównego założenia teoretycznego teorii – o jednorodnym rozkładzie naprężeń [Niklas, Spatz 2000]. Najczęściej jednak dowody na nieścisłości w tym założeniu są uzyskiwane drogą skomplikowanych, komputerowych analiz, odnoszących się do dość specyficznych warunków i na ich podstawie trudno przedstawić spójny obraz wzrostu i funkcjonowania drzewa, i tym samym przedstawienie ich jako alternatywnej koncepcji w stosunku do teorii Mattheck'a.

Jak się wydaje, szersze wprowadzenie biomechanistycznych założeń i koncepcji zaproponowanych przez Matthecka do badań fizjologicznych przyczynić się może do znacznego postępu w poznaniu mechanizmów regulacji i integracji procesów wzrostu i różnicowania drzew, w których istotną rolę odgrywa współdziałanie hormonów roślinnych i związków odżywczych, w adaptacji układu do utrzymania jednorodnego rozkładu i minimalizacji naprężeń mechanicznych w zróżnicowanych warunkach środowiska.

Literatura

- Dietrich F., Mattheck C. 1995. Cracks in sabre-shaped trees and branches. *J. Theor. Biol.* 173: 321-327.
- Gardner T. N., Stoll T., Marks L., Mishra S., Knothe-Tate M. 2000. The influence of mechanical stimulus on the pattern of tissue differentiation in a long bone fracture – an FEM study. *Journal of Biomechanics* 33: 415-425.
- Goldberg D. E. 1989. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, UK.
- Hejnowicz Z. 2002. Anatomia i histogeneza roślin naczyniowych. Organy wegetatywne. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kim H., Querin O. M., Steven G. P. 2002. On the development of structural optimization and its relevance in engineering design.
- Kirkpatrick S., Gelatt C. D. Jr., Vecchi M. P. 1983. Optimization by simulated annealing. *Science* 4598: 871-680.
- Krzysik F. 1975. Nauka o drewnie. PWN, Warszawa.
- Li Q., Steven G. P., Xie Y. M. 2000. Evolutionary structural optimization for stress minimization problems by discrete thickness design. *Computers and Structure* 78: 769-780.
- Mattheck C. 1998. Design in Nature - Learning from Trees. SpringerBerlin, Heidelberg, New York. 276.
- Mattheck C., Bethge K. 1998. The structural optimization of trees. *Naturwissenschaften* 85: 1-10
- Mattheck C., Kubler H. 1995. Wood – The Internal Optimization of Trees. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- Niklas K. J., Sptatz H. C. 2000. Wind-induced stresses in cherry trees: evidence against the hypothesis of constant stress levels. *Trees* 14: 230-237.
- Scott R. F. 1963. Principles of soil mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, Palo Alto, London.
- Słownik Wyrazów Obcych PWN. 1979. PWN, Warszawa.
- Szymański S. 1986. Ekologiczne podstawy hodowli lasu. PWRiL, Warszawa.

SUMMARY

Optimization of tree structure and shape according to axiom of uniform stress

A review of optimization methods based on the axiom of uniform stress and finite element method (FEM) developed by Mattheck at Karlsruhe Research Center is given. Computer-aided optimization (CAO) and computer-aided internal organization (CAIO) methods for modeling adaptive growth of trees are described. Both methods include the principle of adaptive growth which biological structures use to minimize mechanical stress. The CAO method simulates adaptive growth in homogenous and isotropic material, thus for anisotropic wood structure the CAIO method has been developed. The latter method is based upon assumption that arrangement of wood fibers must be such that they are oriented along the force flow within a tree. The lines of force flow (main stress trajectories) are lines that are free of shear stress. Examples of mechanical self-optimization of internal structure and external tree shape under various environmental conditions e.g. control of spiral grain formation, structure and shape of xylem rays, fusiform shape of regenerated stem wound, sable-shaped tree stems and growth of root system in respect to stability of tree are discussed..