Tomasz MAZUR
Politechnika Radomska, Zakład Matematyki
Radom Technical University, Division of Mathematics

Maciej SKWARCZYŃSKI
Katedra Zastosowań Matematyki SGGW
Department of Applied Mathematics WAU

Pamięci Lipmana Bersa (1914–1993)

O jednomianowej wypukłości w C^N
Remarks on monomial convexity in C^N

Uwagi wstępne

W teorii funkcji wielu zmiennych zespolonych występują szeregi potęgowe

$$\sum_{m=(m_1,\dots m_N)} a_m z^m := = \sum_{m_1,\dots m_N} a_{m_1,\dots m_N} z_1^{m_1} \dots z_N^{nm} \qquad (1)$$

gdzie $z = (z_1,\dots,z_N)$ jest elementem przestrzeni C^N, tj. n-wyrazowym ciągiem liczb zespolonych, a $m_j \in \{0, 1,\dots\}$ dla $j = 1,\dots,N$. Współczynniki $a_{m_1\dots m_N}$ są danymi liczbami zespolonymi. Obszar Ω złożony z tych punktów $z^o \in C^N$, dla których na pewnym otoczeniu punktu z^o szereg

$$\sum_{m=(m_1,\dots m_N)} |a_m z^m| := = \sum_{m_1,\dots m_N} |a_{m_1,\dots m_N} z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}| \qquad (2)$$

jest zbieżny jednostajnie, nazywamy **obszarem zbieżności** szeregu (1). Można łatwo sprawdzić, że Ω jest *pełnym* obszarem n- *kołowym* (patrz niżej). Wiadomo także (por. np. Bers 1964), że pełny n-kołowy obszar $D \subset C^N$ jest obszarem zbieżności pewnego szeregu potęgowego wtedy i tylko wtedy, gdy ma własność *logarytmicznej wypukłości.* W dowodzie tego faktu istotnym elementem jest następujący:

Lemat 1. *Każdy N-kołowy pełny i logarytmicznie wypukły obszar $D \subset C^n$ jest jednomianowo wypukły.*

W literaturze poświęconej podstawom wielu zmiennych dowód lematu 1 nie uzyskał jeszcze ostatecznego kształtu. Mimo pozytywnych prób (Bers 1964, Siciak 1973) dostępne dowody nie są zbyt szczegółowe. Celem obecnej notatki jest podanie dowodu, który szczegółowo eksponuje konsekwencje założenia o logarytmicznej wypukłości. Nasz tekst dedykujemy L. Bersowi, którego pomysł (wstępne wykorzystanie twierdzenia Heine-Borela) stanowi punkt wyjścia dla przedstawionego rozumowania. Podstawowe informacje o życiu i działalności L. Bersa można znaleźć w artykule W. Abikoffa (1995).

Obszary kołowe i jednomianowa wypukłość

Zaczniemy od przypomnienia podstawowych pojęć. Mówimy, że zbiór $E \subset C^N$ jest N-**kołowy** (względem początku układu), jeśli dla każdego $(z_1,...,z_N) \in E$ i każdego $\lambda \in C^N$ z równości $|\lambda_j| = 1; j = 1,...,N$ wynika, że $(\lambda_N z_1,...,\lambda_N z_N) \in E$.

Zastępując w powyższym określeniu równości $|\lambda_j| = 1$ nierównościami $|\lambda_j| \leq 1$ otrzymujemy definicję **pełnego** zbioru n-kołowego. Nietrudno zauważyć, że każdy zbiór N-kołowy E jest wyznaczony przez odpowiadający mu **diagram Hartogsa**

$$E_* : = \{(z_1,...,z_N) \in D; z_j = |z_j|, \quad j = 1,...,N\} \subset R^N \qquad (3)$$

Wyróżniamy podzbiór $E_+ \subset E_*$ złożony z punktów, które mają wszystkie współrzędne rzeczywiste i dodatnie. Mówimy, że zbiór E jest **logarytmicznie wypukły**, jeśli jego **logarymiczny obraz**

$$\ln E_+ : = \{\ln x : = (\ln x_1,..., \ln x_N); \quad (x_1,...,x_N) \in E_+\} \qquad (4)$$

jest wypukłym podzbiorem przestrzeni R^N.

Niech D będzie obszarem w C^N. Mówimy, że podzbiór $K \subset D$ jest **relatywnie zwarty** i piszemy $K \subset\subset D$, jeśli $\overline{K}$ (domknięcie w przestrzeni C^N) jest zbiorem ograniczonym, a ponadto $\overline{K} \subset D$. Dla dowolnej rodziny Φ, złożonej z ciągłych funkcji $f : D \to C$ określamy Φ – **powłokę** zbioru $\overline{K}$ następującym wzorem:

$$\hat{K}_\Phi : = \left\{ z \in D; \bigwedge_{f \in \Phi} |f(z)| \leq |f|_K \right\} \qquad (5)$$

gdzie $|f|_K : = \max\ (|f(w)|;\ w \in K)$. Mówimy, że obszar D jest **Φ-wypukły** jeśli $\hat{K}_\Phi \subset\subset D$ dla każdego podzbioru $K \subset\subset D$. W przypadku gdy Φ jest rodziną wszystkich jednomianów (od N zmiennych zespolonych) rozpatrywanych w obszarze D, mówimy odpowiednio o **powłoce jednomianowej** i o **jednomianowej wypukłości.** W dalszym ciągu powłokę jednomianową podzbioru $K \subset\subset D$ będziemy oznaczać symbolem $\tilde{K}$. Należy wykazać, że w N-kołowym, pełnym i logarytmicznie wypukłym obszarze D z warunku $K \subset\subset D$ wynika, że

$$\tilde{K} \subset\subset D \qquad (6)$$

Redukcja do przypadku, gdy K jest skończoną sumą domkniętych polidysków

Niech $r_1,...,r_N$ będą liczbami dodatnimi i niech $r = (r_1,...,r_N)$. Otwarty polidysk w przestrzeni $\mathbb{C}^N$ jest to zbiór postaci

$$P_r := \{z \in \mathbb{C}^N;\ |z_j| < r_j, j = 1,...,N\} \quad (7)$$

Widać natychmiast, że suma dowolnej liczby polidysków (7) jest pełnym obszarem N-kołowym i na odwrót, pełny N-kołowy obszar D może być przedstawiony jako suma polidysków

$$D = \bigcup_{r \in D_+} P_r \quad (8)$$

Jeśli $K \subset\subset D$, to polidyski we wzorze (8) tworzą otwarte pokrycie domkniętego i ograniczonego zbioru $\overline{K}$. Na mocy twierdzenia Heine-Borela istnieje skończony podzbiór $S = \{r^{(1)},...,r^{(S)}\} \subset D_+$ taki, że suma polidysków P_r, $r \in S$ zawiera $\overline{K}$. Wynika stąd, że

$$K \subset \bigcup_{r \in S} \overline{P}_r \quad (9)$$

Oznaczmy przez F prawą stronę wzoru (9); jest jasne, że $F \subset\subset D$. Ponieważ $K \subset F$, więc $\widetilde{K} \subset \widetilde{F}$ i jeśli $\widetilde{F} \subset\subset D$ to $\widetilde{F} \subset\subset D$. Tak więc warunek (6) wystarczy wykazać w przypadku gdy

$$K = \bigcup_{r \in S} \overline{P}_r \quad (10)$$

Główna idea dowodu

Symbolem $\widetilde{K}_{\mathbb{C}^n}$ będziemy oznaczać powłokę zbioru (10) względem rodziny jednomianów rozpatrywanych na całej przestrzeni $\mathbb{C}^N$. Z oczywistych własności jednomianów wynika, że $\widetilde{K}_{\mathbb{C}^N}$ jest pełnym zbiorem N-kołowym. Nie należy mylić $\widetilde{K}$ z $\widetilde{K}_{\mathbb{C}^n}$ ponieważ na ogół $D \neq \mathbb{C}^N$. Widać, że $\widetilde{K}_{\mathbb{C}^N} \supset \widetilde{K}$, więc dla wykazania (6) wystarczy wykazać, że

$$\widetilde{K}_{\mathbb{C}^N} \subset\subset D \quad (11)$$

Z oczywistych własności jednomianów wynika że $\widetilde{K}_{\mathbb{C}^N}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc wzór (11) można napisać w postaci:

$$\widetilde{K}_{\mathbb{C}^N} \subset D \quad (12)$$

Aby wykazać (12) rozpatrzmy dowolny punkt $w \in \widetilde{K}_{\mathbb{C}^N}$; udowodnimy, że $w \in D$. Dalsze rozumowanie uwzględnia postać punktu w. Niech $J := \{j;\ w_j = 0$ i niech $J' := \{j; w_j \neq 0$. Określmy więc

$$\rho := \min\left\{r_j^{(m)};\ j \in J,\ 1 \leq m \leq s\right\} > 0 \quad (13)$$

Rozpatrzmy punkt w^* taki, że $w_j^* = \rho$ jeśli $j \in J$ oraz $w_j^* = |w_j|$ jeśli $j \in J'$. Wykażemy, że $\ln w^* \in \ln D_+$ (stąd $w^* \in D_+$ i $w \in D$ bo D jest N-kołowy i pełny). W tym celu wystarczy zauważyć, że

$$\ln w^* \in \operatorname{conv} \ln K_+ \quad (14)$$

Rzeczywiście, $K_+ \subset D_+$ i wobec założenia o wypukłości zbioru $\ln D_+$

$$\operatorname{conv} \ln K_+ \subset \operatorname{conv} D_+ = \ln D_+ \tag{15}$$

Możemy już przedstawić dowód lematu.

Dowód lematu

Aby wykazać (14) wykorzystamy założenie $w \in \tilde{K}_{C^N}$ rozpatrując dowolne liczby naturalne $m_1,...,m_N$ oraz jednomian

$$f(z) := \prod_{j \in J'} z_j^{m_j} \tag{16}$$

Z określenia powłoki jednomianowej wynika, że

$$\left| \prod_{j \in J'} w_j^{m_j} \right| \le \max_{z \in K} \left| \prod_{j \in J'} z_j^{m_j} \right| \le \max_{r \in S} \prod_{j \in J'} r_j^{m_j} \tag{17}$$

Nasz pomysł polega na pomnożeniu obu stron nierówności (17) przez potęgę liczby ρ o wykładniku $\sum_{j \in J} m_j$. Otrzymujemy (niezależnie od liczb m_j) nierówność

$$\prod_{j=1}^{N} (w_j^*)^{m_j} \le \max_{r \in S} \left(\prod_{j \in J'} r_j^{m_j} \prod_{j \in J} \rho^{m_j} \right) \le$$

$$\le \max_{r \in S} \prod_{j=1}^{N} r_j^{m_j} \tag{18}$$

Stąd, logarytmując obie strony i dzieląc przez $M := m_1 +...+ m_N$ otrzymujemy następujący wzór:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{M} \ln w_j^* \le \max_{r \in S} \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{M} \ln r_j \tag{19}$$

Każda kombinacja wypukła liczb rzeczywistych może być aproksymowana kombinacją wypukłą o współczynnikach wymiernych. Wobec tego, jeśli $c_j \ge 0$ dla j= = 1,....,N i $\Sigma c_j = 1$, to z nierówności (19) wynika, że

$$\sum_{j=1}^{N} c_j \ln w_j^* \le \max_{r \in S} \sum_{j=1}^{N} c_j \ln r_j \tag{20}$$

Wypukła powłoka zbioru jest to (z definicji) najmniejszy wypukły nadzbiór tego zbioru. Wykorzystując szczególną postać zbioru $\ln K_+$ można udowodnić, że $\operatorname{conv} \ln K_+$ (powłoka wypukła tego zbioru) jest domknięta, patrz sekcja 6. Wiadomo że (Edwards 1969, wniosek 2.1.4), że każdy wypukły i domknięty podzbiór F rzeczywistej przestrzeni lokalnie wypukłej jest częścią wspólną wszystkich domkniętych półprzestrzeni, które zawierają podzbiór F. Wobec tego, jest częścią wspólną wszystkich domkniętych półprzestrzeni zawierających zbiór $\ln K_+$.

Niech

$$\{x \in \boldsymbol{R}^k;\ a_1x_1 +...+ a_Nx_N \le d\} \tag{21}$$

będzie dowolną taką półprzestrzenią. Wykażemy że $a_j \ge 0$ dla j = 1,...,N. Rozumując nie wprost przypuśćmy, że jakiś współczynnik, np. a_1, jest ujemny. Wybierzmy $r = (r_1,...,r_N) \in S \subset K_+$. Jeśli $0 < \varepsilon < r_1$, to punkt $(\ln \varepsilon, \ln r_2,...,\ln r_N) \in \ln K_+$ spełnia (21), tzn.

$$a_1\ln\varepsilon + a_2\ln r_2 + ... + a_N\ln r_N \geq d \qquad (22)$$

Przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$ stwierdzamy, że $\infty \leq d$, zachodzi sprzeczność. Teraz już można bez straty ogólności przyjąć, że nieujemne liczby a_j, $j = 1,...,N$ w określeniu półprzestrzeni (21) są współczynnikami kombinacji wypukłej. Ponieważ $\ln r \in \ln K_+$ dla każdego $r \in S$, więc ze wzoru (20) wynika, że $\ln w^*$, spełnia nierówność (21). W konsekwencji $\ln w^* \in \operatorname{conv} \ln K_+$, co wykazano już we wzorze (14). Pozostaje zatem sprawdzić, że $\operatorname{conv} \ln K_+$ jest zbiorem domkniętym.

Jawna postać zbioru conv $\ln K_+$

Zauważmy, że $\ln K_+$ jest sumą s zbiorów

$$\{u + \ln r^{(i)} \in \mathbf{R}^N;\ u \leq 0\} \qquad i = 1,...,s \qquad (23)$$

gdzie $u \leq 0$ oznacza, że $u_j \leq 0$ dla $j = 1,...,N$. Rozpatrzmy wypukły zbiór

$$L := \operatorname{conv}\{\ln r^{(1)},...,\ln r^{(s)}\}$$
$$= \{v = c_1 \ln r^{(1)} + ... + c_s\ln r^{(s)};\ c_i \geq 0, \Sigma c_i = 1\} \qquad (24)$$

Jest on zwarty w $\mathbf{R}^N$, bo układy współczynników $(c_1,...,c_s)$ określających kombinację wypukłą, tworzą zwarty podzbiór w $\mathbf{R}^s$. Wykażemy, że

$$\operatorname{conv} \ln K_+ = \{u + v;\ u \leq 0,\ v \in L\} \qquad (25)$$

jest zbiorem domkniętym. Rozumowanie przeprowadzimy w trzech krokach.

1° Element prawej strony zbioru (25)

$$u + v = u + \sum_{i=1}^{s} c_i \ln r^{(i)} = \sum_{i=1}^{s} c_i(u + \ln r^{(i)}) \qquad (26)$$

jest wypukłą kombinacją elementów zbioru $\ln K_+$, więc należy do $\operatorname{conv} \ln K_+$. Wykazaliśmy, że w zbiorze (25) prawa strona zawiera się w lewej.

2° Jest jasne, że w kombinacji (25) prawa strona zawiera $\ln K_+$. Widać także, że prawa strona przedstawia zbiór wypukły. Rzeczywiście, kombinacja wypukła elementów o niedodatnich współrzędnych ma niedodatnie współrzędne, a kombinacja wypukła elementów z (wypukłego) zbioru L należy do L. Wynika stąd że w (25) prawa strona zawiera lewą. Zatem równość (25) została wykazana.

3° Wykażemy, że prawa strona równania (25) jest zbiorem domkniętym. Rozpatrzmy w zbiorze tym ciąg elementów $u^{(n)} + v^{(n)}$ zbieżny do $x^o \in \mathbf{R}^N$; należy wykazać, że x^o należy do prawej strony równości (25). Ponieważ L jest zbiorem zwartym, więc istnieje zbieżny podciąg $v^{(n_j)} \to v^o \in L$. Zauważmy, że $u^{(n_j)} + v^{(n_j)} \to x^o$ (jako podciąg ciągu zbieżnego). W konsekwencji ciąg $u^{(n_j)}$ ma granicę $u^o \in \mathbf{R}^N$, a ponieważ

$u^{(n_j)} \leq 0$, więc $u^o \leq 0$. Widać stąd, że $x^o = u^o + v^o$ należy do prawej strony równości (25). Wykazaliśmy, że conv $\ln K_+$ jest zbiorem domkniętym.

Tym samym dowód lematu 1 zastał zakończony. Dodajmy, że powłoka wypukła domkniętego i nieograniczonego zbioru nie zawsze jest domknięta (wystarczy rozpatrzyć w $\mathbf{R}^2$ powłokę wykresu funkcji $g(x) = 1/x, x \geq 1$). Z tego względu wybraliśmy dowód domkniętości powłoki zbioru $\ln K_+$ związany z jawnym wyznaczeniem tej powłoki.

Summary

Remarcs on monomial convexity in $\mathbf{C}^N$. Well known result that logarithmic convexity implies monomial convexity plays a basic role in the theory of several complex variables. The paper presents a new and detailed proof which exposes formal consequences of logarithmic convexity. Following L. Bers the consideration of monomial hull of a subset K is reduced to the case when K is a finite union of closed polydiscs. The essential fact that in this case conv $\ln K_+$ is closed follows from explicite description of conv $\ln K_+$.

Literatura

BERS L.1964: *Introduction to several complex variables.* Courant Institute of Math. Sciences, New York University.

EDWARDS R. 1969: *Functional analysis, theory and applications.* Tłum. ros. Mir, Moskwa.

SICIAK J. 1973: *Wstęp do teorii funkcji analitycznych wielu zmiennych.* [W]: F. Leja: *Funkcje zespolone.* PWN, Warszawa, s. 266–302.

ABIKOFF W. 1995: *Remembering Lipman Bers.* Notices Amer. Math. Soc., January 1995

Authors' address:
T. Mazur
Radom Technical University
26–600 Radom
ul. Malczewskiego 29
Poland
M. Skwarczyński
Warsaw Agricultural University–SGGW
02–787 Warszawa
ul. Nowoursynowska 166
Poland