Wiesław NAGÓRKO, Jacek JAKACKI*

Niejednorodne płyty sprężyste w ujęciu wariacyjnym

Abstract

On the variational description of the nonhomogeneous elastic plates. Using the variational approach an approximate model of thin elastic nonhomogeneous plates has been proposed. The notion of approximate models is defined in terms of mathematical objects, and the method is outlined on comparing the solutions of the boundary-value problems formulated for the plate models with unknown solution concerning the accurate three-dimensional model.

Key words: theory of plates, variational approach in the plate theory

Wstęp

Przedmiotem rozważań są sprężyste płyty niejednorodne. Wychodząc z trójwymiarowego opisu płyty, tzn. opisu, w którym przemieszczenia i naprężenia są funkcjami trzech zmiennych przestrzennych, w pracy przeprowadza się konstrukcję ogólnego modelu dwuwymiarowego spełniającego postulowaną zasadę najmniejszego błędu. Praca oparta jest na wynikach przedstawionych w publikacjach [Nagórko 1983a, b; 1989] i stanowi ich jednolite i rozszerzone ujęcie.

Próby opisania trójwymiarowego stanu odkształcenia i naprężenia płyty funkcjami określonymi na powierzchni środkowej (płaszczyźnie) sięgają XVIII wieku (pierwsze niedokładne równanie płyt sformułowane zostało przez J. Bernoulliego w 1789 roku). Zadowalająca postać teorii dwuwymiarowej została przedstawiona w pracach Cauchy'ego (1828) i Poissona (1929). Przyjęto w nich założenie, że możliwe jest aproksymowanie składowych tensora naprężeń wielomianami. Taylora względem zmiennej określającej odległość dowolnego punktu płyty od jej płaszczyzny środkowej w położeniu nieodkształconym. Zachowując w tych wielomianach większą lub mniejszą liczbę wyrazów, uzyskiwano – jak się wydawało – bardziej lub mniej dokładne przejście od zagadnienia trójwymiarowego do zagadnienia dwuwymiarowego.

Inny sposób sprowadzenia trójwymiarowego modelu płyty do modelu dwuwymiarowego zaproponował Kirchhoff (1850, 1876), przyjmując dwa założenia upraszczające. Pierwsze z nich mówi, że włókna prostoliniowe płyty, normalne do jej płaszczyzny środkowej, pozostają po odkształceniu proste i normalne do odkształconej powierzchni środkowej, nie zmieniając przy tym swej długości. Dru-

*Katedra Mechaniki i Konstrukcji Budowlanych SGGW, ul. Nowoursynowska 166, 02–787 Warszawa.

gie dotyczy pomijalności naprężeń normalnych działających na powierzchnie równoległe do powierzchni środkowej płyty jako niewielkie w porównaniu z pozostałymi naprężeniami.

Kolejne konstrukcje teorii dwuwymiarowych pochodzą od Arona (1874) i Love'a (1888, 1992) i dotyczą nie tylko płyt, lecz ogólnie powłok. Teoria tam przedstawiona przyjmuje założenia Kirchhoffa oraz dwa dodatkowe, w których wymaga się, by grubość powłoki była niewielka w porównaniu z najmniejszym promieniem krzywizny powierzchni środkowej powłoki oraz by odkształcenia i przemieszczenia były małe, tzn. takie, by można było pominąć w równaniach konstytutywnych wielkości małe wyższego rzędu niż pierwszy. Teoria ta nazywa się teorią Kirchhoffa–Love'a lub **teorią pierwszego rzędu**.

Dalsze prace z zakresu formułowania teorii płyt i powłok powstawały w wyniku rozpatrywania różnych wariantów założeń upraszczających, takich jak liniowość rozkładu naprężeń normalnych wzdłuż grubości płyty, dany z góry rozkład naprężeń stycznych, możliwość rozkładania poszukiwanych funkcji w szeregi trygonometryczne lub w szeregi wielomianów Legendre'a.

W połowie XX wieku zaczęto formułować teorie, w których zrezygnowano z założeń prowadzących do teorii liniowej.

Przytaczając ten krótki historyczny rejestr metod formułowania teorii dwuwymiarowych, polegających na przejściu od teorii trójwymiarowej do teorii dwuwymiarowej w wyniku przyjmowania różnych założeń upraszczających, trzeba zauważyć, że możliwe jest także podejście polegające na traktowaniu płyty czy powłoki jako kontinuum dwuwymiarowego, zdolnego do przenoszenia nie tylko sił, ale i momentów. Nie ma wtedy potrzeby odwoływania się do relacji trójwymiarowych, bo relacje dwuwymiarowe nie są w tej metodzie wyprowadzane, lecz postulowane.

Traktowanie płyty jako ciała trójwymiarowego i badanie jej w ramach teorii dwuwymiarowych nasuwają pytanie: jaką wybrać dla rozważanych ciał metodę konstrukcji teorii dwuwymiarowej? Odpowiedź na to pytanie nie jest łatwa. Wybór metody powinien bowiem być uzależniony od tego, czy skonstruowany model dwuwymiarowy **dobrze aproksymuje** model trójwymiarowy.

Ocena metody formułowania teorii dwuwymiarowej lub inaczej, ocena dokładności rozwiązań otrzymanych w ramach teorii dwuwymiarowej – a więc rozwiązań przybliżonych w stosunku do rozwiązań trójwymiarowych – jest problemem trudnym. Najwcześniej stosowaną metodą oceny była **metoda testująca**, polegająca na porównywaniu wybranych rozwiązań dwuwymiarowych ze znanymi rozwiązaniami trójwymiarowymi. Później wprowadzono metody szacowania *a priori* błędu w normie energetycznej, a więc bez znajomości rozwiązań przybliżonych i dokładnych (trójwymiarowych) oraz oszacowania *a posteriori*, ze znajomością tylko rozwiązania przybliżonego, wyrażonego zwykle przez pola statycznie i kinematycznie dopuszczalne z wykorzystaniem twierdzenia o hipersferze. Innymi metodami są oszacowania asymptotyczne, badania błędu rezydualnego itd.

Punktem wyjścia w tej pracy jest założenie, że metoda formułowania teorii uproszczonej powinna opierać się na wyraźnie sprecyzowanych założeniach prowadzących do relacji dwuwymiarowych oraz że powinna ona zawierać odpowiedź, w jakim sensie droga od tych założeń do relacji dwuwymiarowych jest optymalna. Chodzi więc tu o to, by w postulowanej klasie przemieszczeń i naprężeń błąd był analitycznie (w miarę ogólnie) zdefiniowany i najmniejszy. By to osiągnąć, skonstruujemy najpierw strukturę relacyjną dla trójwymiarowych ciał sprężystych właściwą do opisu płyt. Następnie dla tej struktury zbudujemy dwie struktury prostsze (dwuwymiarowe), tak by w jednej można było wprowadzić więzy dla przemieszczeń, a w drugiej – więzy dla naprężeń. Przyjęcie więzów jest równoznaczne z określeniem operatów łączących struktury prostsze ze strukturą wyjściową. Układ relacji dwuwymiarowych opisujących płytę otrzymuje się z postulowanej zasady najmniejszego błędu. Wykazuje się, że nie jest możliwe wyprowadzenie z założeń Kirchhoffa wariacyjnych relacji dwuwymiarowych dla płyt, bowiem nie otrzymuje się w nich modułów sztywności. Przyjęcie ogólniejszej postaci więzów doprowadza do sformułowania, w którym moduły sztywności przyjmują znaną postać.

Struktura relacyjna dla płyt

Strukturę relacyjną dla płyt traktowanych jako ciała trójwymiarowe skonstruujemy z następujących elementów [Nagórko 1983]:

- Konfiguracji odniesienia Ω, obszaru odpowiednio regulowanego w R^3.
- Przestrzeni funkcyjnej V zawierającej przemieszczenia ciała, a więc funkcje odpowiednio regularne $v: \Omega \rightarrow R^3$ i spełniające warunki brzegowe na części brzegu $\partial_2\Omega$; $v|_{\partial_2\Omega} = \underline{u}$ (na $\partial_1\Omega$ zadane są warunki w naprężeniach) oraz $\partial_1\Omega$, $\partial_2\Omega$ spełniają warunki: $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$, $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \varnothing$.
- Przestrzeni E funkcji tensorowych zawierających miary odkształceń ciała $\varepsilon_{kl}: \Omega \rightarrow R$, $k, l = 1,2,3$, takich że:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \tag{1}$$

lub

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l}) \tag{2}$$

Zauważmy, że odkształcenie (2) odniesione jest także do konfiguracji Ω.

- Przestrzeni S funkcji tensorowych zawierających miary naprężeń ciała $\sigma_{kl}: \Omega \rightarrow R$, $k, l = 1,2,3$, takich że:

$$\sigma_{kl} = B_{klmn}\varepsilon_{mn} \tag{3}$$

ponadto $B_{klmn}: \Omega \rightarrow R$ i $B_{klmn} = B_{lkmn} = B_{klnm} = B_{mnkl}$.

- Przestrzeni funkcyjnej B, sił masowych $b \in B$, $B: \Omega \rightarrow R^3$.
- Przestrzeni funkcyjnej P, obciążeń powierzchniowych $p \in P$, $p: \partial_1\Omega \rightarrow R^3$.
- Relacji łączącej obiekty $u \in V$, $(\varepsilon_{kl}) \in E$, $(\sigma_{kl}) \in S$, $b \in B$ i $p \in P$ w postaci wariacyjnej:

$$(\forall\, v \in V) \times \left\{ \int_\Omega [\sigma_{mn}(u)v_{m,n} - b_m v_m]dv = \int_{\partial_1\Omega} p_m v_m da \right\} \tag{4}$$

gdzie $\sigma_{mn}(u)$ określone jest związkami (3) i (1) lub (3) i (2).

Problem w tak określonej strukturze formułuje się następująco:

Znaleźć takie $u \in V$, że dla danych b, p zachodzi (1) – (4).

W powyższej strukturze relację (4) sformułować można alternatywnie:

Znaleźć takie $u \in V$, $\sigma \in S$, że dla danych b, p zachodzi (1) – (3) oraz:

$$
\begin{aligned}
&(\forall\, \tau \in S) \times \\
&\times \left\{ \int_{\Omega} \left[A_{klmn}\sigma_{mn}(u) - u_{k,l} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{a_0}{2}\, u_{m,k}\, u_{m,l} \right] \tau_{kl}\, dv = 0 \right\} \\
&(\forall\, v \in V) \times \\
&\times \left\{ \int_{\Omega} \sigma_{kl}(v_{k,l} + a_0 u_{m,k} v_{m,l}) dv = \right. \\
&\left. = \int_{\Omega} b_k\, v_k + \int_{\partial_1\Omega} p_k\, v_k\, da \right\}
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

gdzie $a_0 = 0$ lub $a_0 = 1$ [(zależy to od tego, który ze związków (1) czy (2) rozpatrujemy] oraz $A_{klmn}\,\sigma_{mn}$ jest obrazem przekształcenia A: $S \to S$ określonego funkcjami A_{klmn}: $\Omega \to R$.

Skonstruowana wyżej struktura relacyjna jest więc postaci $\mathbf{M} = \langle R, \Omega, V, E, S, B, P, M\rangle$, gdzie oprócz zdefiniowanych obiektów mamy przestrzeń liczb rzeczywistych R, która jest przestrzenią bazową oraz odwzorowanie M, które jest odwzorowaniem łączącym $u \in V$ z parą $(b,p) \in B \times P$. Odwzorowanie to określają relacje (1) – (3), czyli $u \to (\sigma_{kl})$ (oznaczymy je przez T) oraz relacje (4) $(\sigma_{kl}) \to (b,p)$, które oznaczymy przez K, tak więc $M = K \circ T$.

Zasada najmniejszego błędu

W tej części artykułu wybierzemy do rozważań niektóre tylko elementy struktury skonstruowanej w poprzedniej części. I tak, niech $\mathbf{M} = \langle V, S, F, T, K\rangle$, gdzie $F = B \times P$.

Oprócz struktury $\mathbf{M}$ rozważać będziemy dwie struktury $\mathbf{N}^{\alpha} = \ldots Y^{\alpha}, G^{\alpha}, N^{\alpha}\rangle$, $\alpha = 1,2$, które nazwiemy strukturami prostszymi. W tych strukturach Y^{α} i G^{α} są przestrzeniami funkcji określonych na pewnym obszarze dwuwymiarowym II o wartościach w R^n, N^{α} zaś są operatorami N^{α}: $Y^{\alpha} \to G^{\alpha}$. Załóżmy, że struktury $\mathbf{N}^{\alpha}$ są połączone ze strukturą $\mathbf{M}$, tak że przestrzenie Y^{α} są przestrzeniami współrzędnych uogólnionych dla V^{α}, a G^{α} są przestrzeniami współrzędnych uogólnionych dla F. Są więc określone operatory A^{α}: $Y^{\alpha} \to V^{\alpha}$ i B^{α}: $F \to G^{\alpha}$ (rys.).

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] & S \arrow[r, "K"] & F \arrow[d, "B^1"] \arrow[dr, bend left, "B^2"] & \\
Y^1 \arrow[u, "A^1"] \arrow[rr, "N^1"] & & G^1 & \\
& Y^2 \arrow[uu, "A^2"] \arrow[rr, "N^2"] & & G^2
\end{tikzcd}
$$

Rys. Powiązanie struktur

Operatory A^α wyznaczają więzy w przestrzeni V^α. Pojęcie więzów w mechanice ma różne znaczenia. W tej pracy przez więzy w przestrzeni Z będziemy rozumieć zawsze pewne ograniczenia (w postaci niekoniecznie analitycznej) wyznaczające niepuste podzbiory właściwe w tej przestrzeni. Operatory A^α wyznaczają więc więzy w V^α, o ile $rng\, A^\alpha \neq 0$, $rng\, A^\alpha \subset V^\alpha$ i $A^\alpha \neq V^\alpha$. Podobnie operatory B^α mogą wyznaczać więzy w G^α.

W strukturach $\mathbf{N}^\alpha$ formułujemy problem:

Dane są $g_0^\alpha \in G^\alpha$, znaleźć takie

$y^\alpha \in Y^\alpha$, **że** $g_0^\alpha = N^\alpha(y^\alpha)$, $\alpha = 1,2$ (6)

W celu ustalenia związku między rozwiązaniem problemu (6) i rozwiązaniem problemu (5) wprowadzamy dla struktury **M** pojęcie **funkcjonału błędu**. Dla uproszczenia zapisu oznaczamy przez W przestrzeń V lub S.

Niech będzie dany funkcjonał ε: $W \times W \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ postaci $\varepsilon(w_1, w_2) = \|w_1 - w_2\|$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą w przestrzeni W. Liczbę ε nazwiemy **błędem** utożsamiania elementów w_1 i w_2.

Niech teraz y_0^α będzie rozwiązaniem problemu (6) odpowiadającym siłom uogólnionym g_0^α. Jeżeli $g_0^\alpha = B^\alpha(f_0)$ i v_0^α są rozwiązaniem (5) (w przemieszczeniach i naprężeniach) odpowiadającymi f_0, to wtedy rozwiązanie y_0^α i więzy A^α określają w przestrzeni V^α elementy $v^\alpha = A^\alpha(y_0^\alpha)$. Zbiór tych elementów oznaczymy przez $\tilde{V}^\alpha$. Oznaczmy ponadto przez V_0^α zbiór rozwiązań problemu (5) i załóżmy, że struktury $\mathbf{N}^\alpha$ razem z operatorami A^α, B^α, $\alpha = 1, 2$ spełniają następujące warunki:

$$(\forall\, v_0^\alpha \in V_0^\alpha)\,(\exists\, y_0^\alpha \in Y^\alpha) \times$$

$$\times \{N^\alpha(y_0^\alpha) = g_0^\alpha(v_0^\alpha),$$

$$\varepsilon^\alpha [A^\alpha(y_0^\alpha), v_0^\alpha] =$$

$$= \min_{v^\alpha \in \tilde{V}^\alpha} \varepsilon^\alpha(v^\alpha, v_0^\alpha),\ \alpha = 1,2\}$$

gdzie: $[g_0^\alpha(v_0^\alpha)] =$

$$= \{ B^1 [M(v_0^1)], B^2 [K(v_0^2)] \}$$

Warunki powyższe wprowadzone dla dwuwymiarowych struktur w formie postulatu nazywać będziemy **zasadą najmniejszego błędu**. Mówi ona, że struktura **M**, dane funkcjonały błędu ε^α, struktury $\mathbf{N}^\alpha$ oraz operatory A^α i B^α powinny być takie, by rozwiązania y_0^α problemu (6) odpowiadające siłom uogólnionym $g_0^\alpha = B^\alpha(f_0)$ minimalizowały błąd identyfikacji elementów $v^\alpha = A^\alpha(y_0^\alpha) \in \tilde{V}^\alpha$ i rozwiązania y_0^α problemu (5).

W pracy [Nagórko 1983b] wykazano, że zasada prac wirtualnych (4) lub (5) jest szczególnym przypadkiem zasady minimalizacji błędu takim, dla którego norma definiująca błąd jest określona przez iloczyn skalarny:

$$v_1 \cdot v_2 = \int_\Omega \nabla v_1^T B \nabla v_2\, dv$$

gdzie $B = (B_{klmn})$, a ∇ jest gradientem funkcji. Wynika stąd, że skonstruowany na jej podstawie model płyt spełnia warunek minimalizacji błędu; jest więc optymalny. Zauważmy jednak, że w tak uproszczonym modelu na ogół nie potrafimy wskazać, jak wielki jest błąd utożsamiania nieznanego rozwiązania trójwymiarowego z rozwiązaniem dwuwymiarowym.

Specyfikacja modelu dwuwymiarowego płyt

Przejdźmy teraz do wyspecyfikowania tych cech, które wyróżniają płytę spośród innych ciał trójwymiarowych.

Warunek opisu ciała relacjami, których dziedziną jest pewien obszar dwuwymiarowy $\Pi \subset R^2$ (odpowiednio regularny) i taki, że $\Pi \subset \Omega$, $\partial\Pi \subset \partial\Omega$. Na ogół przyjmuje się, że konfiguracja płyty w stanie nieodkształconym jest iloczynem kartezjańskim $\Pi \times (-h,h)$, $h > 0$, wtedy układ współrzędnych tak się wprowadza, że $(x_\alpha) \in \Pi$, $\alpha = 1,2$, a $x_3 \in (-h,h)$. Ponadto wyróżnia się części brzegu $\partial_+\Omega$, $\partial_-\Omega$ (powierzchnię górną i dolną), tak że $\partial\Pi \cap \partial_\pm\Omega = \varnothing$ oraz powierzchnię boczną $\partial_h\Omega = \partial\Omega \setminus (\partial_+\Omega \cup \partial_-\Omega)$.

Warunek zawężający klasę zagadnień brzegowych polegający na tym, że zakłada się $\partial_+\Omega \cup \partial_-\Omega \subset \partial_1\Omega$, tj, powierzchnia górna i dolna płyty jest pod wpływem danych obciążeń zewnętrznych $\partial_2\Omega \subset \partial_h\Omega$, tj. brzeg, gdzie dane są warunki przemieszczeniowe, należy do powierzchni bocznej. Ponadto przyjmuje się, że dla $x \in \partial_2\Omega$ dane są przemieszczenia postaci:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{u}_\alpha(x_1,x_2,x_3) = \tilde{w}_\alpha(x_1,x_2) + \\
&+ x_3 \cdot \tilde{f}_\alpha(x_1,x_2) \\
&\tilde{u}_3(x_1,x_2,x_3) = \tilde{w}(x_1,x_2) + \\
&+ x_3^2 \cdot \tilde{f}(x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Podobnie na powierzchni bocznej, tj. dla $x \in \partial_2\Omega \cap \partial_h\Omega$, przyjmuje się, że dane obciążenie p ma postać:

$$
\begin{aligned}
&p_\alpha(x_1,x_2,x_3) = g_\alpha(x_1,x_2) + \\
&+ x_3 \cdot q_\alpha(x_1,x_2) \\
&p_3(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2) + \\
&+ x_3^2 \cdot q(x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Dla powierzchni górnej i dolnej przyjmuje się:

$$
\begin{aligned}
&p|_{\Pi\times\{h\}} = (0,0,P_+) \\
&p|_{\Pi\times\{-h\}} = (0,0,P_-)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Założenia o zmianie własności materiałowych ciała, tzn. zakłada się, że funkcje dwu zmiennych opisujące własności sprężyste płyty powinny być inne niż stałe sprężystości B_{klmn} określone w Ω. Te nowe funkcje $\tilde{B}_{klmn}$ nazywa się modułami sztywności. W dalszym ciągu podamy związki między B_{klmn} a $\tilde{B}_{klmn}$.

Ograniczenia w klasie przemieszczeń – więzy dla przemieszczeń, np. w postaci:

$$
\begin{aligned}
&u_k(x_1,x_2,x_3) = w_k^0(x_1,x_2) + \\
&+ x_3 \cdot w_k^1(x_1,x_2) + x_3^2 \cdot w_k^2(x_1,x_2)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Ostatnią grupą założeń są **ograniczenia w klasie naprężeń**, tj. więzy dla naprężeń mówiące o tym, że nie wszystkie naprężenia z S są dopuszczalne.

Zestawione wyżej założenia są zależne między sobą, np. przyjęcie więzów dla przemieszczeń determinuje już postać więzów dla naprężeń. Założenia te można tak dobrać, że będą sprzeczne, np. więzy dla przemieszczeń i naprężeń mogą być takie, że zbiór naprężeń zgodnych z więzami i naprężeń dopuszczalnych przez więzy przemieszczeniowe będzie pusty.

Przyjmijmy więzy (10) w postaci:

$$w^0(x_1,x_2) = [0,0,w(x_1,x_2)]$$

lub

$$w^0(x_1,x_2) = $$
$$= [w_1(x_1,x_2),\ w_2(x_1,x_2),\ w(x_1,x_2)]$$

$$w^1(x_1,x_2) = $$
$$= (-w_{,1}(x_1,x_2), -w_{,2}\,(x_1,x_2), 0] \qquad (11)$$

$$w^2(x_1,x_2) = (0,0,0)$$

oraz warunki brzegowe (7) w postaci $\tilde{u}_k\,(x_1, x_2, x_3) = 0$ dla $(x_k) \in \partial_h\Omega \equiv \partial_1\Omega$, warunki (8) w postaci:

$$p_k(x_1,x_2,0) = 0 \vee p_\alpha(x_1,x_2,0) =$$
$$= g_\alpha(x_1,x_2) \wedge p_3(x_1,x_2,0) = 0$$

dla $(x_\alpha) \in \partial\Pi$, a warunki (9) w nie zmienionej postaci, wtedy układ powyższych założeń po prostych przekształceniach relacji (4) prowadzi do następujących związków:

$$(\forall r \in \overline{V}) \left[\int_\Omega (\overline{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, w_{,\alpha\beta}\, r_{,\gamma\delta} - b)\, r da = \int_{\Pi_+ \cup \Pi_-} (p_+ + p_-)\, ds \right] \qquad (12)$$

gdzie:

V jest przestrzenią funkcji r: $\Pi \to R$ wyznaczającej zgodnie z więzami (11) wszystkie elementy $v \in V$ w postaci $v_\alpha = -r_{,\alpha}$, $v_3 = r$ oraz $\overline{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \frac{2}{3} h^3\, B_{\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$b = \int_{-h}^{h} b_3\, dx_3.$$

Związek (12) różni się od znanego klasycznego sformułowania tym, że funkcje charakteryzujące własności materiałowe $\overline{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nie są modułami sztywności. Warunek o modułach sztywności musi być tutaj wprowadzony niezależnie.

Łatwo sprawdzić, że zmieniając więzy przemieszczeniowe (11), tak że występujące w nich funkcje w_k^0, w_k^1 pozostają bez zmian, zaś $w^2(x_1,x_2) = [0,0,f(x_1,x_2)]$, oraz wprowadzając warunki dla naprężeń $\sigma_{33} = 0$, z relacji (4) otrzymujemy (12), gdzie za $\overline{B}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ trzeba podstawić:

$$\overline{B}_{\alpha\beta\gamma\delta} = B_{\alpha\beta\gamma\delta} - \overline{B}_{\alpha\beta33}\,\overline{B}_{3333} \qquad (13)$$

Związek (13) definiuje już moduły sztywności płyty. Relacje (12), (13) otrzymano, wykorzystując metodę więzów i przyjmując zasadę najmniejszego błędu.

Uwagi końcowe

W pracy zajmowano się modelowaniem płyt w obrębie struktur teorii sprężystości. Przedstawiona metoda jest optymalna względem analitycznie określonego błędu. Jako przykład wyprowadzono, narzucając odpowiednie więzy na przemieszczenia i naprężenia, relacje wariacyjne klasycznej teorii płyt. Relacje w przypadku ogólnym są dobrą podstawą do konstrukcji modeli dwuwymiarowych dla ciał o skomplikowanej strukturze wewnętrznej, np. kompozytów, oraz przy analizie wpływu na płyty takich pól, jak wilgotność czy temperatura.

Bibliografia

ARON H. 1874: *Das Gleichgewicht und die Bewegung einer unendlich dünnen beliebig gerkrümmnt elastischen Schale*. J. Reine Ang. Math., 78.

CAUCHY A. 1828: *Sur l'equilibre et le mouvement d'une plaque solide*. Exercice de mathematique, 3.

KIRCHHOFF G. 1850: *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastichen Scheibe*. J. Reine Angew. Math., 40, 51–58.

KIRCHHOFF G. 1876: *Vorlesungen über mathematische Physik*. Bd. 1, Mechanik.

LOVE A. 1888: *On the small free vibrations and deformations of thin elastic shell*. Phil. Trans. Roy. Soc. 179 (A).

LOVE A. 1927: *Mathematical theory of elasticity*. Cambridge.

NAGÓRKO W. 1983a: *On the method of formulation of two-dimensional theories for elastic shells*. Mech. Teoret. i Stos. 21, 239–248.

NAGÓRKO W. 1983b: *On approximate structures in mechanics*. Arch. of Mech., 35, 443–456.

NAGÓRKO W. 1989: *Modele powierzchniowe i mikrolokalne płyt sprężystych*. Wyd. Uniwersytetu Warszawskiego, 1–96.

POISSON S. 1929: *Mémmoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solides*. Mém. de l'Acad. Sci., 8.