JAN MEIXNER

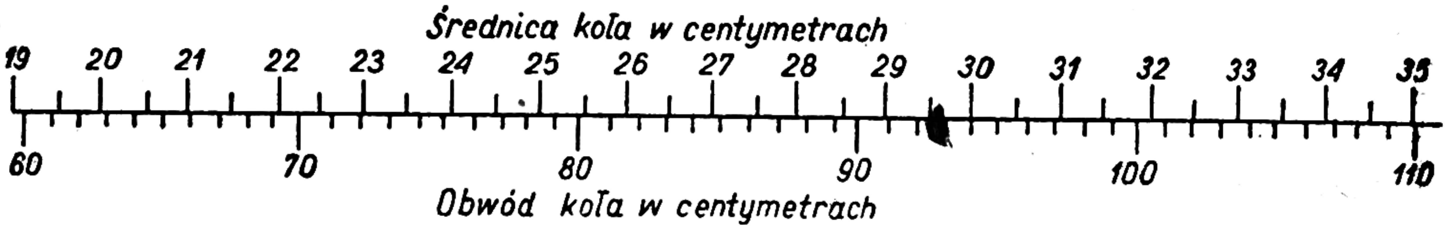
Kilka słów o nomografii

Prawie każda dziedzina wiedzy, w mniejszym lub większym zakresie, posługuje się w swoich badaniach matematyką. Coraz szersze jej stosowanie w praktyce doprowadziło do szukania nowych dróg, do uproszczenia i przyspieszenia wielu wyliczeń. Wynikiem tego było skonstruowanie początkowo prymitywnych, potem coraz bardziej skomplikowanych maszyn do liczenia oraz opracowanie zestawień tabelarycznych funkcjonalnych zależności pomiędzy zmiennymi wchodzącymi w określone wzory matematyczne. Z tabel tych przy znajomości niektórych zmiennych można odczytać pozostałe bez dokonywania jakichkolwiek wyliczeń.

Nie są to jednak jedyne możliwości ułatwienia i przyspieszenia prac rachunkowych. Duże usługi w tym zakresie może oddać nomografia.

Nomografia jest dziedziną matematyki zajmującą się graficznym przedstawieniem funkcji matematycznych. Odpowiednie wykresy, tzw. nomogramy, umożliwiają nam określenie wartości liczbowej poszukiwanej zmiennej przy znajomości pozostałych. Pierwsze naukowe podstawy nomografii dał Leon Lalanne w 1846 r. Dalszego jej opracowania dokonali: prof. Politechniki w Paryżu Maurice d'Ocagne oraz Rodolphe Soreau. Początek XX wieku jest już okresem coraz szerszego zainteresowania się tą dziedziną nauki. Ukazują się kolejno prace nomograficzne prawie we wszystkich językach.

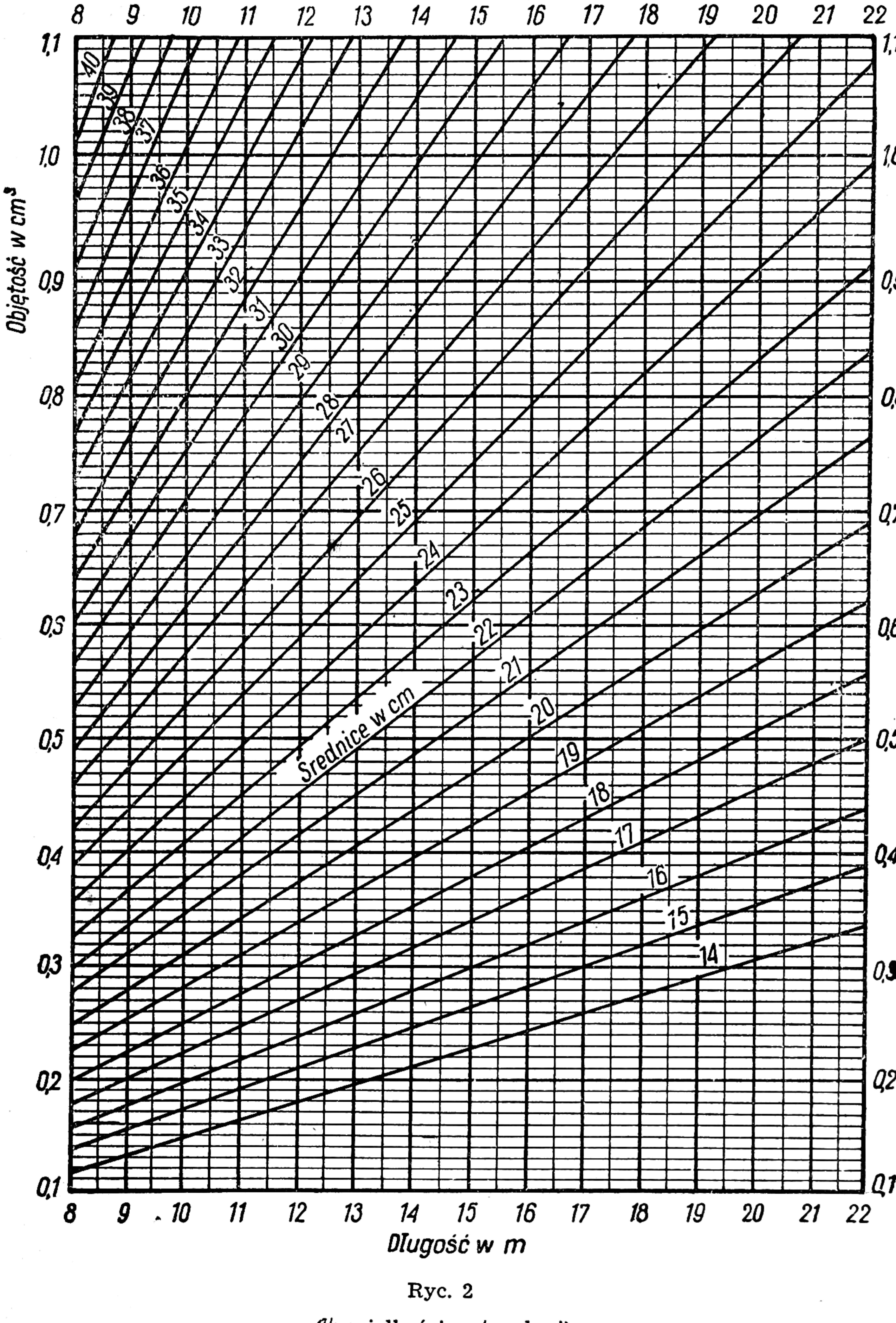
Typów nomogramów mamy dużo. Najprostszymi są nomogramy drabinkowe. Z innych wymienić należy nomogramy w układzie współrzędnych prostokątnych — siatkowe, nomogramy trójskalowe o skalach jednostajnych, specjalnych, np. logarytmicznych i wiele innych, już bardziej skomplikowanych. Przykładem najprostszego nomogramu drabinkowego może być nomogram do określenia np. średnicy drzewa przy znanym jego obwodzie (ryc. 1). Przytoczony nomogram opracowano dla zależności funk-



Ryc. 1

(7/9 wielkości naturalnej)

cyjnej pomiędzy obwodem koła w granicach 60—100 cm, a odpowiadającą mu średnicą. Wykreślenie tego nomogramu jest bardzo łatwe. Wzdłuż prostej po jednej stronie naniesiono wartości średnic koła z dokładnością

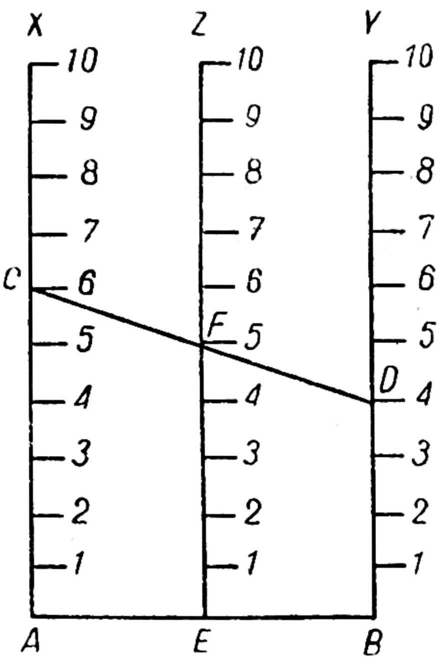


Ryc. 2

(1/9 wielkości naturalnej)

do 0,5 cm, w skali 1:1, a po drugiej odpowiadające im obwody z dokładnością do 1 cm w skali 1:3,14. Przy większym zagęszczeniu podziałek można by przy tych samych skalach uzyskać jeszcze większą dokładność w odczytywaniach wartości. Jednak i ta jest dla celów praktycznych całkowicie wystarczająca.

Identyczne nomogramy mogą być opracowane dla określenia powierzchni koła przy znanym obwodzie albo średnicy, różnych zamienników jednych miar na drugie, np. mp na m³ itp.



Ryc. 3

(7/9 wielkości naturalnej)

Przykładem nomogramu siatkowego w układzie współrzędnych prostokątnych może być nomogram do określania miąższości drzew leżących zgodnie z wzorem Hubera $V = g\,l$ (ryc. 2). Konstrukcja nomogramu jest następująca:

Na oś y nanosimy miąższości, na oś x długości. Następnie w układzie współrzędnych xy każdej parze wartości miąższości i długości podporządkowuje się punkt określający pow. przekroju, wyrażoną przez odpowiadającą jej średnicę (dla ułatwienia posługiwania się nomogramem). Zbiory punktów określających te same średnice łączymy ze sobą. Ponieważ, w naszym przypadku, w ten sposób wykreślona linia jest prostą, więc wystarczy przy sporządzaniu nomogramu nanieść położenie skrajnych punktów, a następnie połączyć je prostą. Posługiwanie się tym nomogramem jest łatwe. Miąższość odczytujemy z osi rzędnych jako wartość rzutu punktu przecięcia się odpowiedniej długości i średnicy. Np. długości 15,5 m i średnicy 24 cm odpowiada miąższość 0,70 m³.

Trzecim rodzajem nomogramów, o których poprzednio mówiłem są nomogramy trójskalowe o układzie współrzędnych równoległych. Najczęściej są stosowane tego typu nomogramy o skalach logarytmicznych. Propagatorem ich w leśnictwie Związku Radzieckiego jest prof. A n u c z i n. Opracował on je dla określania powierzchni przekrojów drzew, miąższości drzew stojących, zbieżystości stojących strzał sosny, świerka, brzozy i osiki, składu gatunkowego drzewostanów, zadrzewienia i zapasu.

Dla wyjaśnienia konstrukcji nomogramów trójskalowych narysujmy 3 proste równolegle położone w równych odstępach od siebie, które służyć nam będą jako skale funkcyjne trzech zmiennych x, y, z (ryc. 3). Naniesśmy na nie identyczne skale jednostajne. Następnie przetnijmy je czwartą CD. Jak widać z rysunku, figura $ABCD$ jest trapezem, a odcinek EF jest jego linią środkową.

Stąd $EF = \dfrac{AC + BD}{2}$

Ryc. 3 przedstawia najprostszy nomogram trójskalowy o skalach równoległych i jednostajnych dla równania $z = \dfrac{x + y}{2}$. Z nomogramu tego można odczytać przy dowolnych kombinacjach zmiennych x i y odpowiadającą im wartość z. W tym celu przykładamy linijkę do określonych wartości zmiennych na skali x i y. Punkt przecięcia się linijki ze skalą z wskazuje wartość szukanej zmiennej.

Np. przy $x = 6$; $y = 4$ wartość z wynosi 5;
przy $x = 8$; $y = 4$ wartość z wynosi 6 itd.

W wielu wzorach o 3 zmiennych zmienne x i y tworzą iloczyny albo ilorazy; np. $z = x\,y$; $z = \frac{x}{y}$.

Chcąc sporządzić nomogram trójskalowy dla tych wzorów należy doprowadzić je do takiej postaci, aby mnożenie i dzielenie zamienić na dodawanie, względnie odejmowanie. Dokonać tego możemy drogą logarytmowania. Np. wzór $z = x\,y$ po zlogarytmowaniu przybierze postać $\log z = \log x + \log y$.

Dla takiej postaci wzoru można już opracować nomogram trójskalowy.

Przykładowo sporządźmy go ponownie dla wzoru Hubera $V = g\,l$. Przez zlogarytmowanie doprowadzamy ten wzór do postaci:

$$\log V = \log g + \log l.$$

Przed przystąpieniem do sporządzania nomogramu należy ustalić:

1. Zakres zmienności poszczególnych zmiennych. Przyjmijmy zakres zmienności dla średnicy: $d_1 \div d_2 = 14 \div 30$ cm, odpowiadający tym średnicom zakres zmienności pow. przekroju (g) wyniesie $g_1 \div g_2 = 0{,}0154 \div 0{,}0707$ m^2, a dla długości (l) przyjmijmy $l_1 \div l_2 = 8 \div 22$ m.
   Zakres zmienności V, jako zmiennej zależnej, wynika z ustalonych zakresów g i l; wyniesie on $V_1 \div V_2 = 0{,}1232 \div 1{,}5554$ m^3.
2. Długość skal (L) dla zmiennych g, l, V.
   Przyjmijmy dla wszystkich skal $L = 200$ mm.
3. Szerokość nomogramu, tzn. odległość skal zewnętrznych x i y (w naszym przykładzie g i l) od siebie, którą oznaczamy przez s.
   Przyjmijmy $s = 50$ mm.

Następnie musimy obliczyć [1]):

1. Moduł każdej skali (μ), określający długość odcinka skali wyrażającego wartość jednostki liczbowej zmiennej wg następujących wzorów:

$$\mu_g = \frac{L}{\log g_2 - \log g_1} = \frac{200 \text{ mm}}{\log 0{,}0707 - \log 0{,}0154} = 181{,}62 \text{ mm}^{2)}$$

$$\mu_l = \frac{L}{\log l_2 - \log l_1} = \frac{200 \text{ mm}}{\log 22 - \log 8} = 455{,}27 \text{ mm}$$

$$\mu_v = \frac{L}{\log V_2 - \log V_1} = \frac{200 \text{ mm}}{\log 1{,}5554 - \log 0{,}1232} = 302{,}16 \text{ mm}$$

---

[1]) Wszystkie podane wzory jak i oznaczenia zaczerpnięto z podręcznika J. Górskiego — Zasady nomografii dla szkół technicznych — Warszawa 1949 r. Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Wyprowadzenia przytoczonych wzorów nie podaje się, gdyż można je znaleźć w wymienionym podręczniku.

Nie we wszystkich wypadkach konstrukcji nomogramów trójskalowych, opartych na podanych w tym artykule zasadach, skale x i z oraz z i y położone są w stosunku do siebie w równych odległościach. Jeżeli określimy odległość skali x od z przez m, a z od y przez n, to s będzie się równać $m + n$ (ryc. 4).

2. Wartości m i n obliczamy wg wzorów:

$$m = \frac{b \mu_3 s}{\mu_2}; \qquad n = \frac{a \mu_3 s}{\mu_1}$$

(a i b — dodatnie współczynniki stałe zmiennych x i y)

μ_1 oznacza moduł skali x, w naszym wypadku g,
μ_2 „ „ „ y, „ „ l,
μ_3 „ „ „ z, „ „ V.

Podstawiając do wzorów odpowiednie wartości obliczamy m i n.

$$m = \frac{181{,}62 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}}{455{,}27 \text{ mm}} = 19{,}95 \text{ mm}$$

$$n = \frac{181{,}62 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}}{302{,}16 \text{ mm}} = 30{,}05 \text{ mm}$$

3. Ostatnią pracą obliczeniową przed sporządzeniem nomogramu jest rozwiązanie równań każdej skali. Równanie skali w postaci ogólnej jest następujące:

$$\bar{x} = \mu_1 (x_2 - x_1)$$

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{a\mu_2 + b\mu_1}$$

W naszym wypadku równaniami skal będą:

$$\bar{g} = \mu_g (\log g_2 - \log g_1)$$
$$\bar{l} = \mu_l (\log l_2 - \log l_1)$$
$$\bar{v} = \mu_v (\log V_2 - \log V_1)$$

Dla przykładu rozwiążmy równanie skali l.

Przy $l = 8$ m, $\bar{l}_8 = 455{,}27$ mm $(\log 8 - \log 8) = 0$
$\bar{l}_9 = 455{,}27$ mm $(\log 9 - \log 8) = 23{,}27$ mm
$\bar{l}_{10} = 455{,}27$ mm $(\log 10 - \log 8) = 44{,}12$ mm
....
$\bar{l}_{22} = 455{,}27$ mm $(\log 22 - \log 8) = 200{,}00$ mm

Otrzymane wyniki określają odległość poszczególnej wartości zmiennej na skali w mm od początku układu współrzędnych. W analogiczny sposób dokonuje się obliczeń dla skali V i g, z tym, że wartości g dla udogodnienia wyrażono na nomogramie, jak przy nomogramie siatkowym, przez odpowiadające im średnice (ryc. 4). Po tak dokonanych obliczeniach wy-

[2]) Jeżeli przy konstrukcji nomogramu przyjmiemy różne długości skal dla zmiennych x i y to moduł skali z należy obliczyć wg wzoru:

kreślenie nomogramu nie przedstawia żadnych trudności. Kreślimy 3 równoległe proste o uprzednio ustalonej długości *(L)* i odległości pomiędzy nimi *(m* i *n)*. Na odpowiednie skale nanosimy wartości liczbowe zmiennych. W ten sposób został sporządzony nomogram trójskalowy o skalach logartymicznych dla wzoru Hubera (ryc. 4).

Posługiwanie się tym nomogramem jest takie samo jak nomogramem przedstawionym na ryc. 3. Np. długości 13 m, średnicy 19 cm odpowiada miąższość 0,37 m³.

Opracowany nomogram ze względu na duże zagęszczenie podziałek w górnej części nie daje całkowicie dokładnych wyników i posługując się nim można popełnić błąd w granicach ± 0,01 m³.

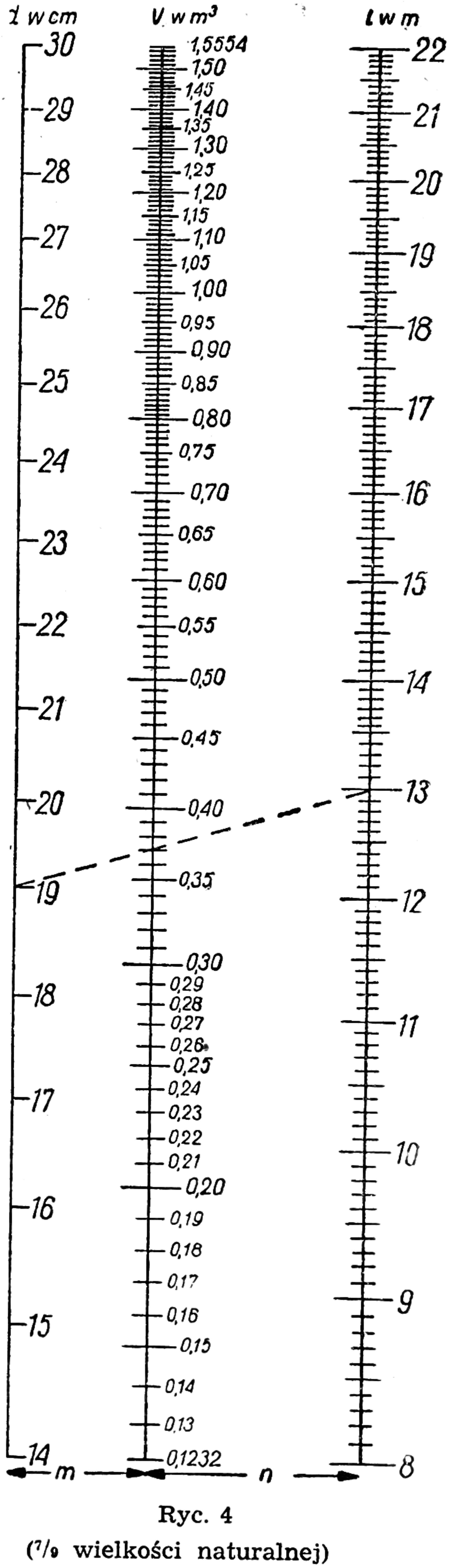
Dokładność jednak jego można by zwiększyć przez przyjęcie dłuższych skal, względnie przez zmniejszenie zakresu zmienności poszczególnych zmiennych.

Czytelników, którzy chcieliby bliżej zapoznać się z zasadami nomografii odsyłam do cytowanego podręcznika J. G ó r s k i e g o, napisanego w bardzo przystępnej formie. Ostatnio wyszła w przekładzie polskim książka N. A n u c z i n a pt. „Przemysłowa taksacja lasu" — PWRIL, 1954 r., w której są podane wymienione poprzednio nomogramy.

Zasadniczą zaletą nomogramów jest bardzo wydatne ułatwienie obliczeń, jak i ogromne zmniejszenie ich pracochłonności, przy równoczesnej łatwości posługiwania się nimi. Należy zaznaczyć, że dane odczytywane z nomogramów nie są całkowicie ścisłe. Są to dane przybliżone. W wielu jednak wypadkach dokładność ich jest w zupełności wystarczająca.

Jako najbardziej znany i powszechnie stosowany przyrząd do liczenia oparty o zasady nomografii można przytoczyć suwak logarytmiczny.

Jest rzeczą znaną, że obliczenia przeprowadzane na suwaku nie są całkowicie ścisłe. Mimo to znalazł on szerokie zastosowanie w technice dzięki ułatwieniu i wydajnemu skróceniu żmudnych i nieraz skomplikowanych obliczeń.



Ryc. 4

(⁷/₉ wielkości naturalnej)

W wypadkach, kiedy zależy nam na otrzymaniu bardzo dokładnych wyników, nomogramy oddadzą nam duże usługi przy sprawdzaniu obliczeń uzyskanych drogą rachunkową.

W artykule tym, podając parę przykładów najprostszych nomogramów, chciałem zwrócić uwagę na możliwości zracjonalizowania wielu wyliczeń dokonywanych w leśnictwie, szczególnie przy pracach mierniczych, dendrometrycznych i urządzeniowych przez opracowanie i stosowanie odpowiednich nomogramów. Stosowanie ich wpłynie wydatnie na zmniejszenie pracochłonności wyliczeń, przede wszystkim wtedy, gdy nie mamy do dyspozycji odpowiednich maszyn do liczenia, względnie zestawień tabelarycznych.

Nomografia w zastosowaniu do leśnictwa stawia dopiero pierwsze kroki. Mogą być jeszcze pewne zastrzeżenia co do dokładności niektórych nomogramów. W przyszłości jednak, przy dalszym doskonaleniu metod ich konstrukcji, mogą one i powinny znaleźć szerokie zastosowanie.