

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

Вячеслав Ловейкин, Юрий Човнюк, Василий Кулык

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
Украина, г. Киев, ул. Героев Оборона, 15

Аннотация. Установлены оптимальные режимы колебаний зерновых смесей при наличии сил сухого трения методом вариационного исчисления, которые минимизируют возникающие в переходных процессах колебания системы.

Ключевые слова: оптимальный режим, колебания, зерновая смесь, сухое трение, вариационное исчисление, переходные процессы.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Под динамической нелинейностью понимают обычно такую нелинейность, которая проявляет себя только в процессе движения (в т.ч. смесей) [1]. До вибросистем с динамической нелинейностью относятся колеблющиеся системы большинства машин вибрационного воздействия, применяемые в сельскохозяйственных машинах, технологиях строительного производства и т.п., в которых силы неупругого сопротивления (демпфирования) изменяются непропорционально скорости в первой степени.

В процессе работы вибромашины возникают различные по своей природе неупругие сопротивления: обрабатываемого материала, окружающего воздуха; внутренние сопротивления в материале конструкций машины; сопротивления, обусловлены затратами энергии в болтовых и шарнирных соединениях, направляющих, в местах опор и креплений пружин и т.д. Все эти сопротивления по-разному изменяются в зависимости от перемещений элементов колеблющейся системы вибромашины. Каждый из них влияет на форму и амплитуду колебаний, а также на расходы энергии.

Результатирующую всех неупругих сопротивлений вибросистемы можно представить как многокомпонентное сопротивление, состоящее из суммы одновременно действующих

однокомпонентных сопротивлений. В качестве однокомпонентных сопротивлений рассматриваются: сопротивление, которое зависит от скорости; гистерезисное сопротивление которое является функцией перемещения и зависит от амплитуды; сопротивление, которое зависит от фазы вынужденной силы; сопротивление, которое зависит только от перемещения; постоянное по величине сопротивление сухого трения. Направление результирующего многокомпонентного сопротивления, так же как и направление его отдельных компонентов, всегда противоположный скорости.

Точные аналитические решения уравнений, которые характеризуют движение систем при наличии сил сухого трения, трудно получить [2-8]. Опубликованные в литературе приближенные методы могут быть применены только к системам с малым сопротивлением, то есть с малой нелинейностью. Указанные приближенные методы основаны на предположении, что колебания гармоничны.

Однако, во многих вибрационных машинах, особенно в приводных механизмах решетных станков зерноочистительных машин [9-17], демпфирующие силы изменяются непропорционально скорости, т.е., по форме являются нелинейными. По величине эти силы имеют порядок вынужденной силы и могут значительно превышать величину сил упругости пружин, то есть относительно большими. Такие

машины нельзя рассматривать как системы с малым сопротивлением.

Поскольку член, который выражает сопротивление, является нелинейным – движение негармонично. Поэтому кривые колеблющихся величин, $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, отличаются от косинусоиды или синусоиды. Итак, форма колебаний зависит от вида демпфирующей функции: один вид кривых – за сухого трения, другой – за аэродинамического сопротивления, третий – за гистерезисных сопротивлений и т.д. Отсюда возникает необходимость установить, какой вид кривых имеет та или иная демпфирующая функция. Зная это, по виду кривых, полученных путем осциллографирования, можно будет более достоверно установить закон изменения сопротивления в реальной вибромашине и найти числовые значения коэффициентов, характеризующих такое сопротивление. В работе [4] предложен численный метод решения дифференциальных уравнений для разных демпфирующих функций.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В статье [5] рассмотрены вынужденные колебания вибратора с синусоидальным вынужденной / возмущающей силой при наличии сухого трения. Впервые этот вопрос был исследован Ден-Гартогом [6, 7], который показал, что в зависимости от величины силы трения колебания могут происходить с паузами и без пауз. Он получил точное аналитическое решение для систем, в которых отношение частоты ω возмущающей силы к частоте Ω собственных колебаний системы $\frac{\omega}{\Omega} \geq 0,5$.

Для систем, в которых это отношение меньше 0,5, Ден-Гартог получил приближенное решение, а также ограничил его некоторым диапазоном частот. В области малых значений $\frac{\omega}{\Omega} < 0,5$, по его утверждению, “движение имеет за полупериод более одной паузы” и “для этой области не может быть получено решение”

[6].

В дальнейшем проблемой вынужденных колебаний при сухом трении занимались другие ученые [8], которые исследовали главным образом системы с несинусоидальными вынужденными силами.

Цель работы состоит в рассмотрении вынужденных и собственных колебаний зерновых смесей при наличии сил сухого трения в постановке Ден-Гартога, получении общего уравнения движения системы для колебаний с паузами или без пауз, и оптимизации режимов ее движения, которые минимизируют возникающие колебательные процессы, вызванные наличием именно сил сухого трения. При этом оптимальные режимы движения указанных смесей устанавливаются с помощью методов вариационного исчисления и решения уравнений Лагранжа-Эйлера [18, 19].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Модель колебательной системы зерновой частицы с сухим трением подается в виде массы M , которая закреплена упругими элементами связи зернины зерновой смесью с жесткостью k и имеет возможность скользить вдоль наклонной (под углом α к горизонту) сухой поверхности с коэффициентом трения f . На массу M действует гармоничная возмущающая сила $Q \cos(\omega t + \beta)$, восстановительная сила упругих элементов kx и постоянная по величине, но всегда противоположна скорости по направлению сила сопротивления $F = Mg(f \cos \alpha \pm \sin \alpha)$. Здесь x отклонение массы M от положения равновесия.

Если рассматривать принятые вынужденные колебания системы, эти колебания осуществляются с частотой ω , равной частоте возмущающей силы, с размахом, равным двойной амплитуде колебаний $2X_0$. В конечных точках, одновременно с изменением скорости, сила трения скачкообразно меняет свой знак на противоположный.

Условия движения системы в обе

стороны абсолютно одинаковы. Поэтому достаточно рассмотреть только одну половину цикла.

Предположим, что масса M находится в одном из крайних положений. За начало отсчета времени ($t_o = 0$) принимаем момент начала движения массы M с крайнего положения и предположим, что движение из одного крайнего положения в другое крайнее

положение происходит за время t_1 . Назовем это время продолжительностью движения. Понятно, что продолжительность движения не может быть больше половины периода колебаний, то есть $t_1 \leq \frac{\pi}{\omega}$.

Теперь дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы запишем в виде:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x} + F \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + kx = Q \cdot \cos(\omega t + \alpha); \\ x(0) = X_o; \dot{x}(0) = 0; x(t_1) = -X_o; \dot{x}(t_1) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где α – фазовый угол возмущающей силы при $t = 0$; $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = \text{sign}(\dot{x})$ – множитель при F ,

который указывает, что направление силы трения изменяется в зависимости от изменения направления скорости; X_o – амплитуда колебаний. При $Q = 0$ (1) описывает собственные колебания системы

при наличии сил сухого трения.

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОВОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

1. Исходя из (1) можно легко получить:

$$(F^*)^2 = \left(\frac{F}{Q} \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \right)^2 = \left[-\frac{M \ddot{x}}{Q} - kx + \cos(\omega t + \alpha) \right]^2. \quad (2)$$

Определим закон движения $x(t)$, при котором за период разгона системы ($t = t_p$) принимает наименьшее значение, то есть оказывает наименьшее влияние на динамику приводного механизма решетных станов

зерноочистительной машины.

Для того чтобы найти подобный закон движения $x(t)$ зерновой частицы, надо удовлетворить критерий качества этого движения:

$$\int_{t=0}^{t=t_p} (F^*)^2 dt = \int_0^{t_p} \left[-\frac{M \ddot{x}}{Q} - \frac{kx}{Q} + \cos(\omega t + \alpha) \right]^2 dt \Rightarrow \min \quad (3)$$

Уравнения Лагранжа-Эйлера для (3) [19] имеет вид:

$$X^{(IV)} + 2\Omega^2 \cdot \ddot{x} + \Omega^4 X = \Omega^2 \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) \cdot \frac{Q}{M} \cdot \cos(\omega t + \alpha); \quad (4)$$

$$x(0) = X_o; \dot{x}(0) = 0; \ddot{x}(0) = 0; \dot{x}(t_p) = V_p; \Omega^2 = \frac{k}{M}, \quad (5)$$

где V_p – скорость движения зерновой частицы в конце пуска (при $t = t_p$).

Решение (4) имеет вид:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot \sin \Omega t + (C_3 + C_4 t) \cdot \cos \Omega t + \frac{\Omega^2 \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) \cdot \frac{Q}{M} \cdot \cos(\omega t + \alpha)}{(\omega^4 - 2\Omega^2 \omega^2 + \Omega^4)}, \quad (6)$$

или

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot \sin \Omega t + (C_3 + C_4 t) \cdot \cos \Omega t + \frac{Q \cdot \cos(\omega t + \alpha)}{M \cdot (\Omega^2 - \omega^2)}. \quad (7)$$

Взяв производную по времени из выражения (7) получим:

$$\dot{x}(t) = C_2 \sin \Omega t + (C_1 + C_2 t) \Omega \cos \Omega t + C_4 \cos \Omega t - (C_3 + C_4 t) \Omega \sin \Omega t - \frac{Q \omega \sin(\omega t + \beta)}{M(\Omega^2 - \omega^2)}. \quad (8)$$

Константы C_i , $i = \overline{1,4}$ рассчитываем движения (1) в зависимости (7) и (8), будем иметь: подставив начальные и конечные условия

$$C_1 = \frac{\sin \Omega t_1 + \Omega t_1 \cos \Omega t_1}{\Omega^2 t_1^2 - \sin^2 \Omega t_1} \left\{ X_0 (1 - \cos \Omega t_1) + \frac{Q}{M(\Omega^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t_1 + \beta) + (\omega t_1 \sin \beta - \cos \beta) \cos \Omega t_1] \right\} + \frac{t_1 \sin \Omega t_1}{\Omega^2 t_1^2 - \sin^2 \Omega t_1} \left\{ X_0 \Omega \sin \Omega t_1 + \frac{Q \omega}{M(\Omega^2 - \omega^2)} [\sin(\omega t_1 + \beta) - \sin \beta (\cos \Omega t_1 - \Omega t_1 \sin \Omega t_1)] \right\}; \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{C_1}{t_1 \sin \Omega t_1} (\Omega t_1 \cos \Omega t_1 - \sin \Omega t_1) - \frac{1}{t_1 \sin \Omega t_1} \left\{ (1 - \cos \Omega t_1) X_0 + \frac{Q}{M(\Omega^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t_1 + \beta) + (\omega t_1 \sin \beta - \cos \beta) \cos \Omega t_1] \right\};$$

$$C_3 = X_0 - \frac{Q \cos \beta}{M(\Omega^2 - \omega^2)}; \quad C_4 = \frac{Q \omega \sin \beta}{M(\Omega^2 - \omega^2)} - C_1 \Omega.$$

Результаты оптимального режима движения зерновой частицы представлены на рис 1-3. 2. Рассмотрим далее собственные колебания системы при наличии сил сухого трения ($Q \equiv 0$).

Решение (1) имеет в этом случае вид:

$$x(t) = X_0 \cdot \cos \Omega t - \frac{F \cdot \text{sign}(\dot{x})}{M \cdot \Omega^2} \cdot (1 - \cos \Omega t). \quad (10)$$

Заменим обобщенную функцию $\text{sign}(\dot{x})$ на следующую

$$\text{sign}(\dot{x}) \approx \frac{2}{\pi} \cdot \text{arctg} \dot{x}. \quad (11)$$

Если улучшить приближения (11) в том отношении, чтобы контур графика приближения лучше отвечал контуру функции $\text{sign}(\dot{x})$, то можно применить улучшенное приближение последней:

$$\text{sign}(\dot{x}) \approx 2^{2n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \text{arctg} \dot{x} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \cdot \left\{ \text{arctg} \dot{x} \right\}^{\frac{1}{2n+1}}, \quad n \in N. \quad (12)$$

Для случая $\left| \dot{x} \right| < \frac{\pi}{2}$, i / \tilde{n} , $\text{arctg} \dot{x} \approx \dot{x}$, и

для $n \gg 1$ можно приближенно (12) представить в виде:

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2n+1}} \cdot \left\{ \text{arctg} \dot{x} \right\}^{\frac{1}{2n+1}} \approx \left(\dot{x}\right)^{\frac{1}{2n+1}}. \quad (13)$$

Тогда из (10) получим:

$$(x(t) - X_0 \cos \Omega t)^2 = \frac{F^2}{M^2 \cdot \Omega^4} \cdot \dot{x}^{\frac{2}{2n+1}} \cdot 4 \cdot \sin^4 \left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (14)$$

Теперь критерий качества движения зерновой частицы выглядит следующим образом:

$$\int_0^T (x(t) - X_0 \cos \Omega t)^2 dt \Rightarrow \min, \quad (15)$$

где $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, т.е. за период собственных колебаний системы квадрат отклонения массы M от положения равновесия,

вызванные действием силы трения (сухого),
должен быть минимальным.

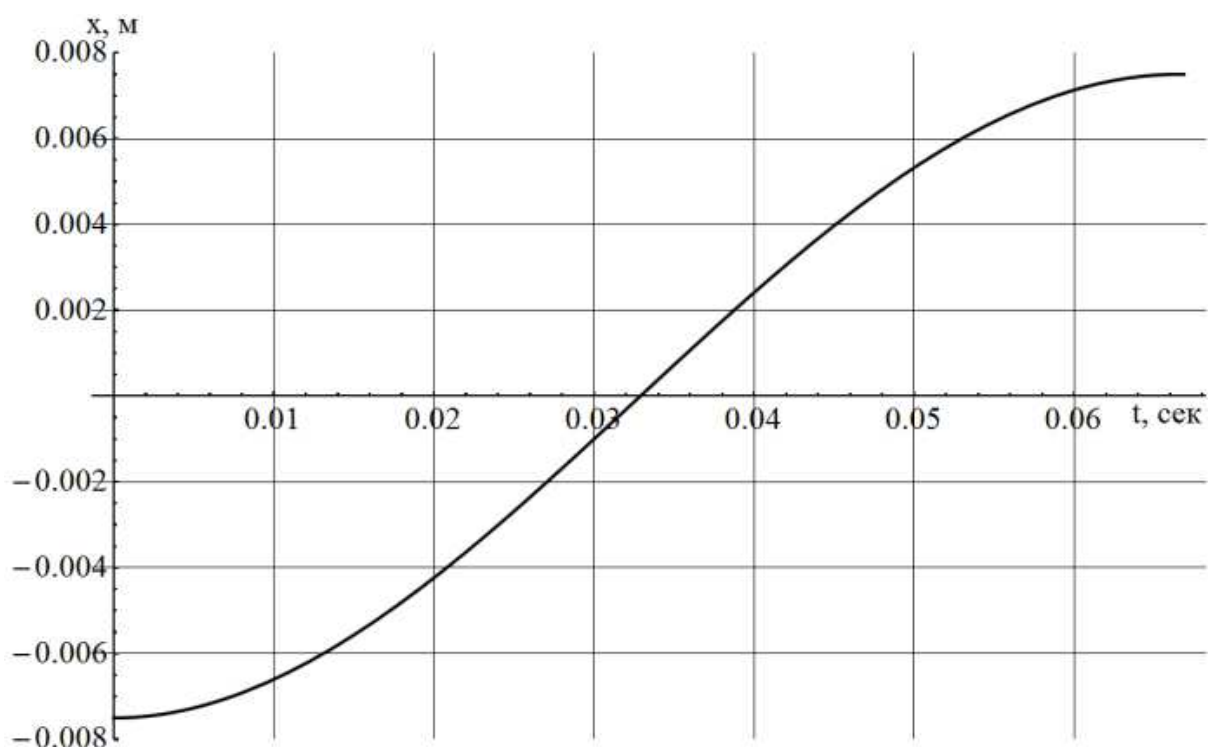


Рис. 1. График оптимального перемещения зерновой частицы по наклонному решете

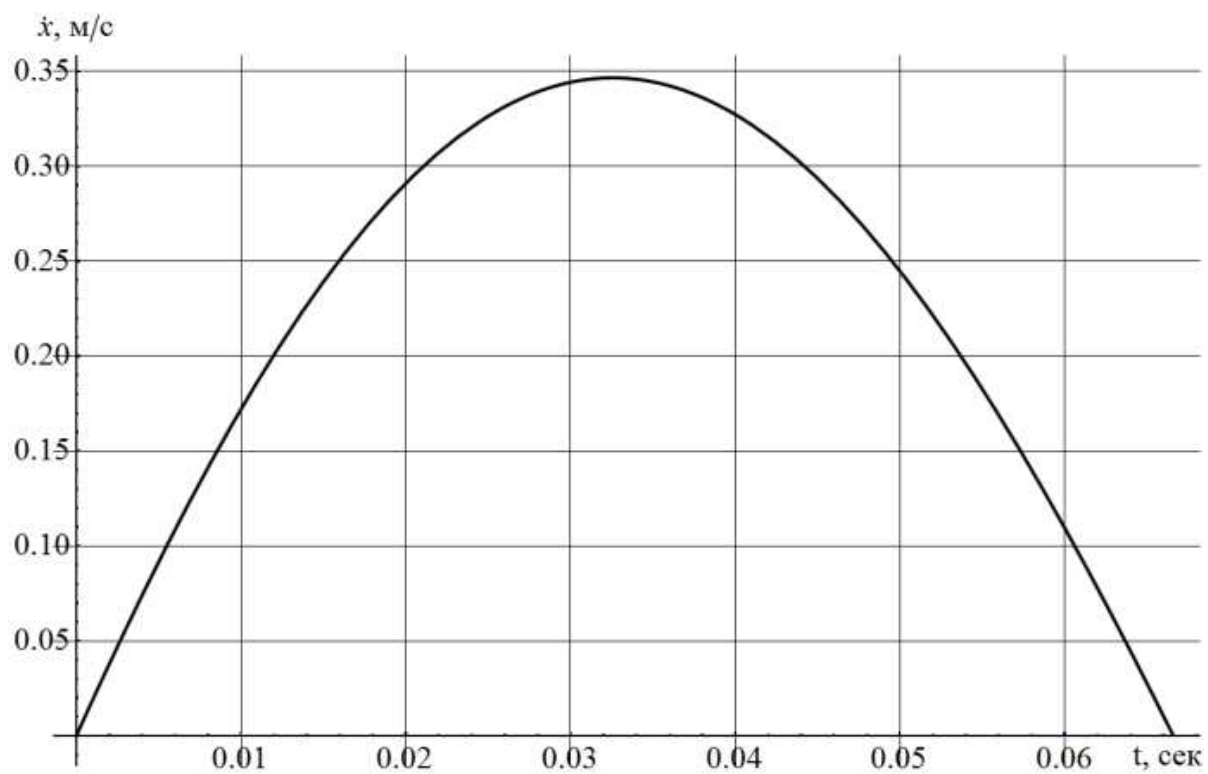


Рис. 2. График оптимальной скорости зерновой частицы по наклонному решете

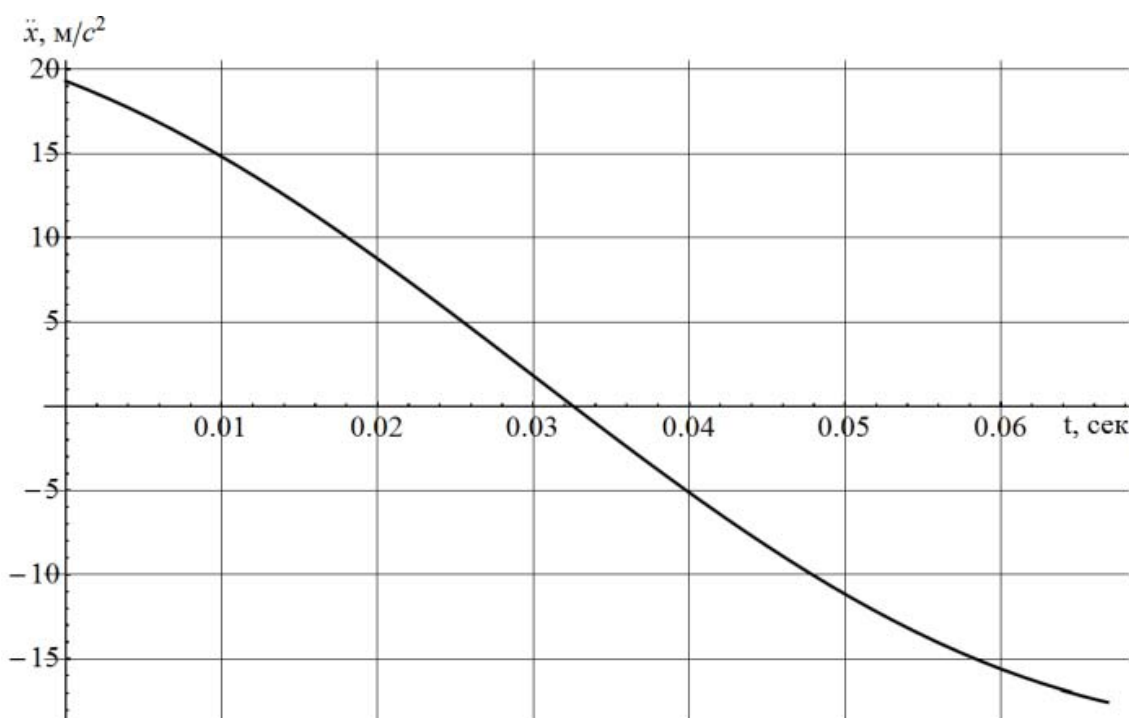


Рис. 3. График оптимального ускорения зерновой частицы по наклонному решетке

Учитывая (14), критерий (15) можно представить в виде:

$$\int_0^T \dot{x}^{2n+1} \cdot \sin^4\left(\frac{\Omega t}{2}\right) dt \Rightarrow \min. \quad (16)$$

Уравнения Лагранжа-Эйлера для функционала (16) можно представить следующим образом [19]:

$$\sin^3\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \cdot \dot{x}^{\left(\frac{1-2n}{2n+1}\right)-1} \cdot \left\{ x \cdot \frac{(1-2n)}{(1+2n)} \cdot \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \dot{x} \cdot 2\Omega \cdot \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\} = 0. \quad (17)$$

При начальных условиях:

$$x(0) = X_0; \quad \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (18)$$

решение (17) имеет вид:

$$x(t) = \frac{3}{2} C_1 \cdot t - \frac{2C_1}{\Omega} \cdot \sin \Omega t + \frac{C_1}{4\Omega} \cdot \sin 2\Omega t + X_0, \quad C_1 = const. \quad (19)$$

Если необходимо выяснить закон движения зерновой частицы, при котором указано “качество колебаний” (качество движения) будет реализована период времени, а скорость движения достигнет

заданного значения после окончания переходного процесса, т.е. $\dot{x}(t=t_p) = V_0$, тогда:

$$x(t) = \frac{V_0}{\left\{ \frac{3}{2} - 2 \cos(\Omega t_p) + \frac{1}{2} \cos(2\Omega t_p) \right\}} \cdot \left\{ \frac{3}{2} t - \frac{2}{\Omega} \sin(\Omega t) + \frac{1}{4\Omega} \sin(2\Omega t) \right\} + X_0. \quad (20)$$

Следует отметить, что подобный закон движения (18) позволяет удовлетворить условию:

$$\ddot{x}(t=t_p) = 0, \quad (21)$$

если $\Omega t_p = \pi n, \quad n \in N$.

быть созданы машины для сепарации зерна с использованием методических подходов, представленных в работе [20] и обоснования конструктивно-технологических параметров сепарирующих поверхностей, как это изложено в [21].

На основе полученных результатов могут

ВЫВОДЫ

1. Предложенная математическая модель, описывающая движение зерновых частиц при наличии сил сухого трения.
2. Установлены основные характеристики режимов движения зерновых частиц в указанных условиях, при которых минимизирован силовой и кинематический влияние сил сухого трения на движение зерновой частицы в переходных процессах.
3. Полученные результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчета подобных систем в условиях их свободных и вынужденных колебаний при наличии сил сухого трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курдюмов А.А. Вибрация корабля. – Л., 1961.
2. Сакович В.Л. Об учете сил сопротивления в вибраторах для бетона// Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1961. – № 6.
3. Сакович В.Л. Исследование машин вибрационного действия // Научные труды Киевского инженерно-строительного института. – 1961. – Вып. 17.
4. Сакович В.Л. Метод решения уравнений динамически нелинейных вибросистем // Научные труды Киевского инженерно-строительного института. – 1964. – Вып. 20. – С. 91-105.
5. Сакович В.Л. Вынужденные колебания вибратора при наличии сухого трения // Научные труды Киевского инженерно-строительного института. – 1964. – Вып. 20. – С. 116-127.
6. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания – М.: Физматгиз, 1960. – 260 с.
7. Den-Hartog I.P. Forced Vibrations With Combined Conlomb and Viscons Friction // Transactions of ASMEю – 1931.–Vol. 53, No. 9. – P. 107-115.
8. Стрекис А.М. Вынужденные колебания с одной степенью свободы при наличии сухого трения и при произвольной возмущающей силе // Сб. “Вопросы динамики и динамической прочности”.– Рига: РПИ, 1956.– Вып. IV. – С. 102.
9. Карнов Б.А. Технология послеуборочной обработки и хранения зерна / Б.А. Карпов. М.: Агропромиздат, 1987. – 288 с.
10. Кленин Н.И., Сакун В.А. Сельскохозяйственные и мелиоративные машины – М.: Колос, 1994. – 751 с.
11. Сільськогосподарські машини. Основи теорії та розрахунку: Підручник / Д.Г. Войтюк, В.М. Барановський, В.М. Булгаков та ін.; за ред. Д.Г. Войтюка. – К.: Вища освіта, 2005. – 464 с.
12. П.И.Макаров и др. Механизация послеуборочной обработки зерна: Учебное пособие / Мар. Гос. Ун-т; П.И.Макаров, Г.С.Юнусов, И.И.Казанков, С.И.Казанков, Г.В.Богданов, Х.С.Хайнанов, Н.Ф.Маслова. – Йошкар-Ола, 2007. – 284 с.
13. Халанский В. М., Горбачев И. В. Сельскохозяйственные машины. – М.: Колосс, 2004. – 624 с.
14. Сепаратор воздушно-решетный предварительной очистки СБП-100. Руководство по эксплуатации. ОАО “Воронежсельмаш”. – 64 с.
15. Тиц З.Л. Машины для послеуборочной поточной обработки семян. – М., 1967. – 477 с.
16. Гортинский В.В., Демской А.В., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. – М.: Колос, 1980. – 304 с.
17. Захарченко И.В. Послеуборочная обработка семян в Нечерноземной зоне – М.: Россельхозиздат, 1983. – 263 с.
18. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики.– М. –Л., 1950. – 240 с.
19. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
20. Natalya Ratushna, IiKhom Mahmudov, Andriy Kokho. Methodical approaches to creation of new agricultural machinery according to market requirements for technological product // Motrol. – Tom 9, Lublin, 2007. – P. 119-123.
21. Болтянська Н.І. Обґрунтування конструктивно-технологічних параметрів сепаруючих поверхонь жалюзійних решет зернозбиральних комбайнів // Motrol. – Tom 13B, Lublin, 2011. – С. 111-116.

OPTIMIZATION OF VIBRATION GRAIN
MIXES WITH DRY FRICTION

Summary. The optimal oscillation regimes of grain mixture's motions for coulomb friction are discussed with the help of variation calculations which can minimize the system's oscillations during transitive processes.

Key words: optimum behavior, oscillations, grain mass, dry friction, calculus of variations, transients.