

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОДА ТОМАТА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ СДАВЛИВАНИИ

**Виктор Мельник**

*Харьковский национальный технический университет  
сельского хозяйства имени Петра Василенка  
Ул. Артема 44, Харьков, Украина. E-mail: khstua@lin.com.ua*

**Victor Melnik**

*Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture  
St. Artem 44, Kharkiv, Ukraine. E-mail: khstua@lin.com.ua*

**Аннотация.** Целью работы является изучение механизмов повреждения плодов томатов при их транспортировании и хранении. Используются методы теорий пластичности и предельного равновесия сплошных сред. Плоды томатов рассматриваются как округлые модельные тела, состоящие из сплошной среды, которая характеризуется удельным весом, пластической постоянной и внешним трением. В рассматриваемой задаче модельное тело располагается на горизонтальной жесткой плоской поверхности и прижимается к ней таким же деформатором. При этом изучаются напряженное состояние и деформации модельного тела.

**Ключевые слова:** плоды томатов, пластичность, пятно контакта, напряжение, деформация, взаимодействие, квазилинейная система уравнений, гиперболический тип, характеристика, соотношение, производная.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Чтобы минимизировать потери плодов томатов при транспортировании и хранении, прежде необходимо изучить механизмы их повреждений, а, затем, на основе знаний таких механизмов, создавать новые соответствующие технологии и технику.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Следующий далее материал является результатом изучения механизмов повреждения плодов томатов в процессе их транспортирования и хранения. По своей сути настоящая статья является логическим продолжением ранее опубликованной работы [5] и базируется на применении уже известных наработок в области объемного напряженного состояния, пластичности и теории предельного равновесия [1-4, 6-20].

Материал, составляющий плод томата,

считаем пластическим, характеризующимся удельным весом  $\gamma$  и пластической постоянной  $k$ , а состояние материала, находящегося под статическим силовым воздействием, понимаем как состояние пластичности и/или предельного равновесия. При этом мы имеем ввиду, что на уровне математических моделей теории пластичности сплошных неупругих пластических сред и предельного равновесия сплошных неупругих идеально-связных сред совпадают. Все применяющиеся далее обозначения и соглашения соответствуют работам [5-15].

Предлагаемая к решению задача в дальнейшем, с использованием правой двумерной декартовой системы координат  $Oxy$ , сведена к плоской постановке. Ориентацию векторов главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  (наименьшего) и  $\sigma_3$  (наибольшего) определим посредством угла  $\varphi$ , который составляет линия действия вектора  $\sigma_3$  с осью абсцисс координатной системы  $Oxy$ , а ориентацию самой координатной системы определим такой, когда ее ось абсцисс ориентирована горизонтально справа налево, а ось ординат по направлению совпадает с вектором силы веса среды.

Учитывая выше изложенное, и применив полусумму главных нормальных напряжений  $s = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)$ , интересующие нас напряженные состояния среды в пределах области пластичности можно описать системой:

$$\begin{aligned} & \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial s}{\partial x} + \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial s}{\partial y} \pm \\ & \pm 2k \left[ \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = (1) \\ & = \gamma \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Квазилинейная система уравнений (1) относится к гиперболическому типу. Ее характеристическое решение известно [14, 15]. Кроме

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОДА ТОМАТА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ СДАВЛИВАНИИ

того, в работах [6-15] для системы (1) получен ряд удовлетворяющих ей соотношений, которые выполняются на координатных прямых, т.е. линиях, параллельных осям принятой координатной системы.

Соотношения на абсциссе (выполняются вдоль прямых, параллельных оси  $Ox$  системы координат, в которой решается задача):

$$x|_{y=\text{const}} = 2k \exp \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \text{ctg} \varphi + C_y^*, \quad (2)$$

$$s|_{y=\text{const}} = 2k \ln(\sin^2 \varphi) + C_y^+, \quad (3)$$

где:

$$\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2}\pi[, \quad \varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (4)$$

$$C_y^+ = \tilde{C}_y + k \ln(2(C^y)^2), \quad (5)$$

$\tilde{C}_y$ ,  $C_y^*$ ,  $C_y^+$  и  $C^y$  – постоянные величины.

Соотношения на ординате (выполняются вдоль прямых, параллельных оси  $Oy$  системы координат, в которой решается задача):

$$y|_{x=\text{const}} = (-1)^r 2k \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \text{tg} \varphi + C_x^*, \quad (6)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \ln(\cos^2 \varphi) + \gamma y + k \ln(2(C^y)^2) + \tilde{C}_x, \quad (7)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \left[ \ln(\cos^2 \varphi) + (-1)^r 2\gamma \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \text{tg} \varphi \right] + C_x^+, \quad (8)$$

где:

$$\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2}\pi[, \quad \varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (9)$$

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > \varphi_{x_0}, \\ 2 & \text{при } \varphi < \varphi_{x_0}, \end{cases} \quad (10)$$

$$C_x^+ = \gamma C_x^* + k \ln(2(C^y)^2) + \tilde{C}_x \quad (11)$$

где:  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^*$ ,  $C_x^+$  — постоянные величины.

## ПОСТАНОВКА ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ

Округлый плод томатов 1 (рис. 1) зажат между двумя горизонтальными жесткими поверхностями (деформатором 2 и опорной поверхностью 3), расстояние между которыми равно  $h$ .

Интенсивность сжимающего воздействия определяется силой  $P$ . Величина трения покоя между деформатором 2 и плодом 1 определяется коэффициентом внешнего трения  $f$ . Диаметр (ширина)  $d$  пятна контакта томата 1 с деформатором 2 и диаметр (ширина)  $D$  плода томата в его центральном

горизонтальном сечении меняются соразмерно величине расстояния  $h$  между деформатором 2 и опорной поверхностью 3. Криволинейные части  $L^d L^u$  и  $R^d R^u$  контура осевого (по  $Oy$ ) сечения плода томата не определены, т.е. радиус их кривизны  $r$ , вероятно, не имеет фиксированной точки приложения и не является постоянным значением для различных участков  $L^d L^u$  и  $R^d R^u$ .

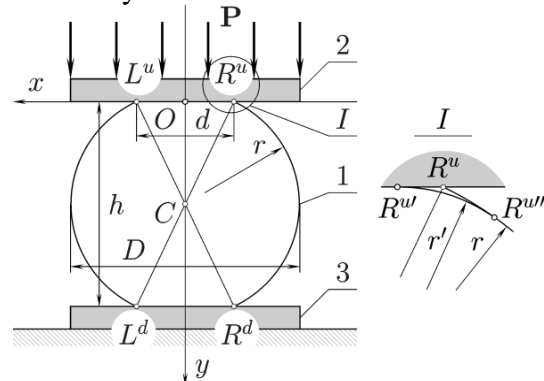


Рис. 1. Схема взаимодействия плода томата с жестким плоским деформатором:

1 – плод; 2 – деформатор; 3 – опорная поверхность

Fig. 1. Chart of co-operation of fruit of tomato with hard flat deformers : 1 – is a fruit; 2 – deformer ; 3 – is an underlayment

### Принятые допущения:

а) округлый плод томата условимся подменять модельным телом изначально (до нагружения) цилиндрической формы. Предполагается, что цилиндр имеет бесконечную длину и ориентирован горизонтально;

б) геометрия модельного тела (плода томата) и поле его напряжений остаются симметричными относительно горизонтального сечения, проходящего через центральную точку;

в) несмотря на то, что фактически свободные криволинейные поверхности модельного тела (плода томата)  $L^d L^u$  и  $R^d R^u$  с радиусом кривизны  $r$  сопрягаются с плоскими пятнами контакта  $L^u R^u$  и  $L^d R^d$ , например, в окрестностях точки  $R^u$  по некоторой дуге  $R^{u'} R^{u''}$  существенно меньшего радиуса  $r' \ll r$ , мы этим обстоятельством пренебрегаем и в дальнейшем считаем, что точки  $R^{u'}$ ,  $R^{u''}$  сливаются в одну точку  $R^u$ , когда  $r' \rightarrow \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — бесконечно малая положительная величина. Но, тем не менее, радиус сопряжения  $r'$  существует, а значит, со-

пряжение между свободными поверхностями  $R^u R^d$  и пятном контакта  $L^u R^u$  выполняется по касательной, т.е. без явного излома. Также обстоят дела и с другими точками  $L^u$ ,  $L^d$  и  $R^d$  сопряжения свободных криволинейных поверхностей  $L^d L^u$  и  $R^u R^d$  с плоскими пятнами контакта  $L^u R^u$  и  $L^d R^d$ ;

г) при увеличении интенсивности силового воздействия  $\mathbf{P}$  и соответствующего уменьшения расстояния  $h$  согласованное изменение величин  $r$ ,  $d$  и  $D$  происходит таким образом, что площадь  $S_0$  поперечного сечения модельного тела (плода томата) и его объем  $V_0$  остаются неизменными.

*Начальные значения* (до нагружения, когда  $\mathbf{P} = 0$ ) величин  $h$ ,  $r$ ,  $d$  и  $D$  обозначим соответственно  $h_0$ ,  $r_0$ ,  $d_0$  и  $D_0$ . Очевидно, что  $h_0 = D_0 = 2r_0$ , а  $d_0 = 0$ .

*Требуется* определить пластическую постоянную  $k$  и смоделировать напряженное состояние, которое возникает в объеме плода во взаимосвязи с величиной интенсивности внешнего воздействия (распределенной нагрузки  $\mathbf{P}$ ), или с величиной  $h$ , которая обратно пропорционально связана с  $\mathbf{P}$ . В конечном итоге, необходимо построить кривые  $R^u R^d$  и/или  $L^u R^u$  свободного контура нагруженного плода.

## ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Начнем с анализа закономерностей ориентации главных нормальных напряжений и главных площадок на внешних поверхностях плода томата.

В первую очередь констатируем, что на площадках свободного контура гарантированно отсутствуют касательные напряжения. А мы знаем, что касательные напряжения отсутствуют на главных площадках, а, значит, именно они и составляют свободный контур. Этого обстоятельства достаточно, чтобы утверждать, что на свободном контуре векторы двух главных нормальных напряжений ориентированы всегда по касательной к поверхности, а векторы третьего — по нормали к ней, правда, формально, ведь его модуль равен нулю. В отношении ориентации главных площадок, на которых действуют главные нормальные напряжения, ориенти-

рованные по касательной к поверхности свободного контура, можно однозначно утверждать только то, что эти площадки ориентированы по нормали к свободному контуру.

На рис. 2 цилиндрическое модельное тело представлено в основной ортогональной системе координат  $Oxyz$ , а местные его вырезы соотнесены с локальной (вспомогательной) также ортогональной системой координат  $Ox'y'z'$ .

Как соотносятся между собой главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  иллюстрируют диаграммы Мора. На них нормальные напряжения соотнесены с осью  $\sigma_{vv}$ , а касательные с  $\sigma_{vr}$ .

Поскольку плоское напряженное состояние может формулироваться как не зависящее от одной из координат [14, 15], например,  $z$ , то очевидно, что в случае бесконечного нагруженного цилиндра условия плоской задачи соблюдаются. Иначе просто не может быть. По этой причине на рис. 2 иные случаи не рассматриваются и вектор среднего главного нормального напряжения  $\sigma_2$  всегда изображается нормальным по отношению к плоскости  $Oxy$ .

Размеры элементарного кубика  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  на рисунках не показаны. В случае предельного перехода, т.е. когда  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  и  $\Delta z \rightarrow 0$ , предполагается, что кубик согласованно стягивается в точку  $O'$ .

Группа рис. 2А иллюстрируют напряженное состояние среды в центральной точке  $O'$  на поверхности пятна контакта модельного тела. Больше из главных нормальных напряжений  $\sigma_3$  в этом случае ассоциируется с возмущающим воздействием. Равенство  $\sigma_2 = \sigma_1$  скорее всего не достигается. Ведь в процессе сплющивания цилиндра материалу некуда смещаться в направлении оси  $Oz$ , а в перпендикулярных направлениях есть куда. Именно это и обуславливает неравенство  $\sigma_2 \geq \sigma_1$ . Материал смещается вдоль поверхностей скольжения (в сечении с  $Oxy$  линий скольжения), для которых параллельные  $Oz$  прямые являются образующими. Таким образом, физически достоверным является только второй случай (рис. 2А2), в соответствии с которым большее из главных напряжений  $\sigma_3$  действует вертикально.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОДА ТОМАТА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ СДАВЛИВАНИИ

Ситуацию в окрестностях точек, составляющих боковые поверхности модельного тела, в частности, в точках дуги  $AB$ , иллюстрирует группа рисунков 2В. Поскольку с ростом внешней нагрузки  $P$  дуга  $AB$  все больше выгибается в направлении от центра  $O$ , то наиболее вероятным является вариант с растягивающими напряжениями (рис. 2В2), но  $\sigma_2$  может быть равным нулю. Другой вариант напряженного состояния (рис. 2В1) в физическом смысле является нереальным.

(рис. 2С) полностью повторяет таковое для уже рассмотренной центральной точки  $O'$  пятна контакта (рис. 2А). Разница состоит только в том, что интенсивность действующих в  $O$  (рис. 2С) напряжений несколько ниже, чем тех, которые действуют в  $O'$  (рис. 2А). Физически достоверным для точки  $O$  также является последний вариант напряженного состояния (рис. 2С2). Первый вариант (рис. 2С1) является нереальным.

Напряженное состояние среды в точке  $O$

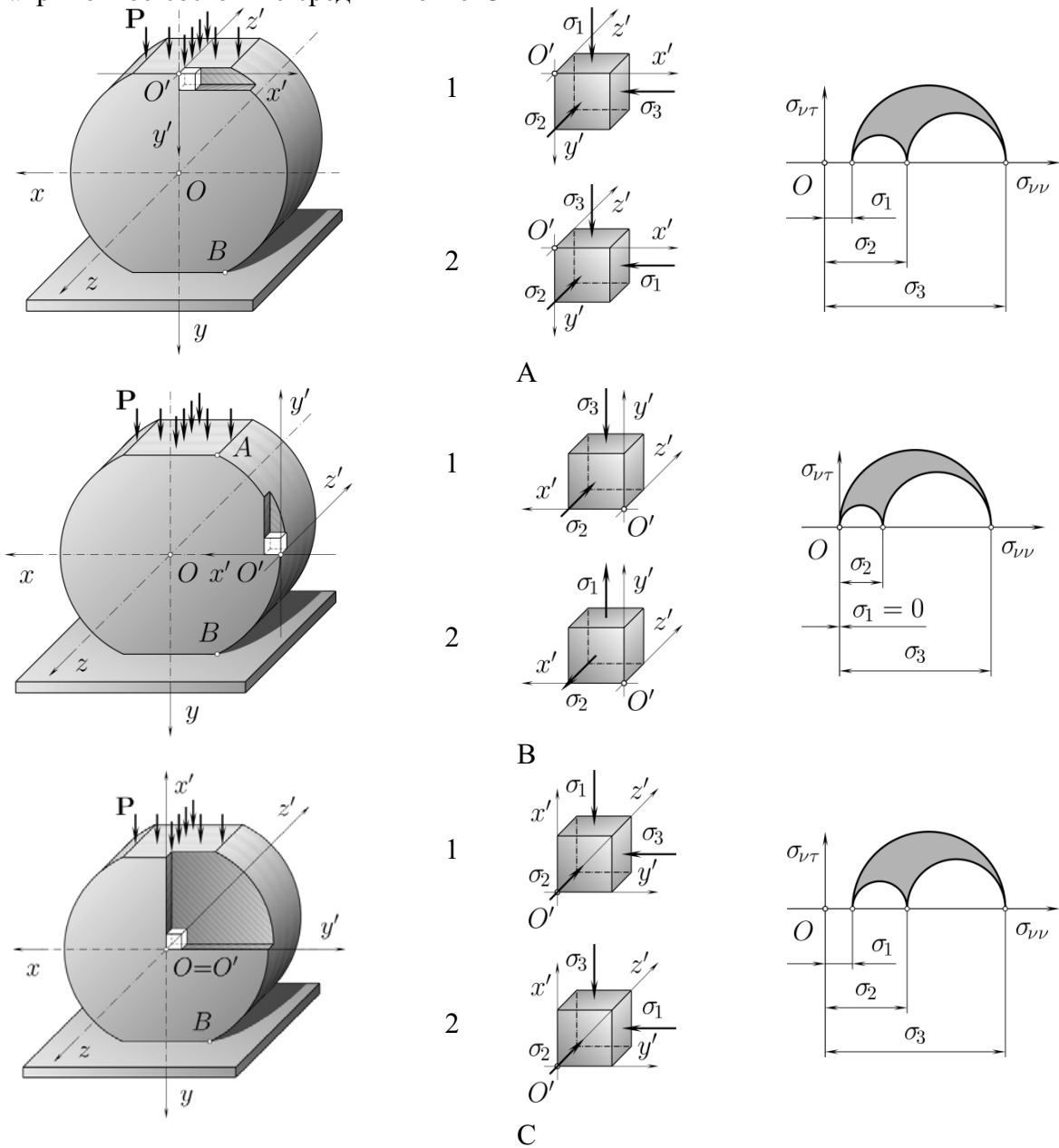


Рис. 2. Ориентация главных площадок и векторов главных напряжений в различных точках объема цилиндрического модельного тела, находящегося в состоянии пластичности  
 Fig. 2. An orientation of main grounds and vectors of main tensions is in the different points of volume of cylindrical model body being in a state of plasticity

Общий вывод в отношении цилиндрического модельного тела таков. Его напряжен-

ное состояние подчинено условиям плоской постановки задачи, а, значит, предложенная выше модель пластичности может быть задействована для дальнейшего анализа и затем расчетов без каких-либо ограничений.

Из работ [5, 7-12, 14, 15] известно, что в пределах пятна контакта  $L^u R^u$  (рис. 3) возможные значения угла  $\varphi$  укладываются в интервал  $\varphi \in ]0, \pi[$ . Определяется  $\varphi$  соотношениями ((2)-(11)) и условиями трения:

$$s \geq k \left( \frac{|\sin 2\varphi|}{f} + \cos 2\varphi \right). \quad (12)$$

Вдоль свободного контура (например, в точке  $R$  (рис. 3В)) величина угла  $\varphi = \varphi|_R$  определяется геометрией первого. Как уже говорилось, свободный контур полностью состоит из главных площадок, а нормальные напряжения  $\sigma_3$ , действующие на них, равны нулю, т.е.  $\sigma_3 = \sigma_3|_R = 0$ . Наименьшее главное нормальное напряжение  $\sigma_1$ , действующее в направлении касательной к свободному контуру, является растягивающим.

Рис. 3 иллюстрирует наиболее общие закономерности изменения угла  $\varphi$  в зависимости от положения на пятне контакта или свободном контуре модельного тела. Предположительно, при переходе от точки  $L^c$  к  $R^c$  значения угла  $\varphi$  полностью пробегают интервал от 0 до  $\frac{1}{2}\pi$ . Процесс изменения значений  $\varphi$  является монотонным. Возможно, что в ближайших окрестностях точек  $L^u, R^u$

и  $L^d, R^d$  перехода от пятен контакта к свободным поверхностям, например, в пределах дуги  $R^{uu} R^{uu}$  (рис. 1), изменение значений угла  $\varphi$  происходит существенно быстрее, чем где бы то ни было на пятне контакта или свободном контуре.

Ситуация на обеих частях (левой и правой) свободного контура всегда одинакова, значит, текущая задача является осесимметричной (по отношению к  $Oy$ ), и для произвольного горизонтального сечения  $LR$  плода томата справедливо равенство:

$$\frac{1}{2}\pi - \varphi^l = \varphi^r - \frac{1}{2}\pi = \Delta_{\varphi^r}, \quad (13)$$

где:  $\Delta_{\varphi^r}$  – полуинтервал изменения угла  $\varphi$ , а  $\varphi^l$  и  $\varphi^r$  – значения углов  $\varphi = \varphi|_L$  и  $\varphi|_R$  в крайних точках  $L$  и  $R$  с координатами  $(x^l y^l)$  и  $(x^r y^r)$  произвольного сечения  $LR$ .

В частном случае, когда сечение  $LR$  совпадает с верхним  $L^u R^u$  или  $L^d R^d$  нижним пятном контакта, выражение (13) преобразуется к виду:

$$\text{или} \quad \begin{aligned} \Delta_{\varphi^u} &= \frac{1}{2}\pi - \varphi^{lu} = \varphi^{ru} - \frac{1}{2}\pi, \\ \Delta_{\varphi^d} &= \frac{1}{2}\pi - \varphi^{ld} = \varphi^{rd} - \frac{1}{2}\pi, \end{aligned} \quad (14)$$

где:  $\Delta_{\varphi^u}$  и  $\Delta_{\varphi^d}$  – полуинтервал изменения угла  $\varphi$ , а  $\varphi^{lu}, \varphi^{ru}$  и  $\varphi^{ld}, \varphi^{rd}$  – значения углов  $\varphi = \varphi|_{L^u}, \varphi = \varphi|_{R^u}$  и  $\varphi = \varphi|_{L^d}, \varphi = \varphi|_{R^d}$  крайних точках  $L^u, R^u$  и  $L^d, R^d$  с координатами  $(x^{lu} y^{lu}), (x^{ru} y^{ru})$  и  $(x^{ld} y^{ld}), (x^{rd} y^{rd})$  верхнего  $L^u R^u$  и нижнего  $L^d R^d$  пятен контакта.

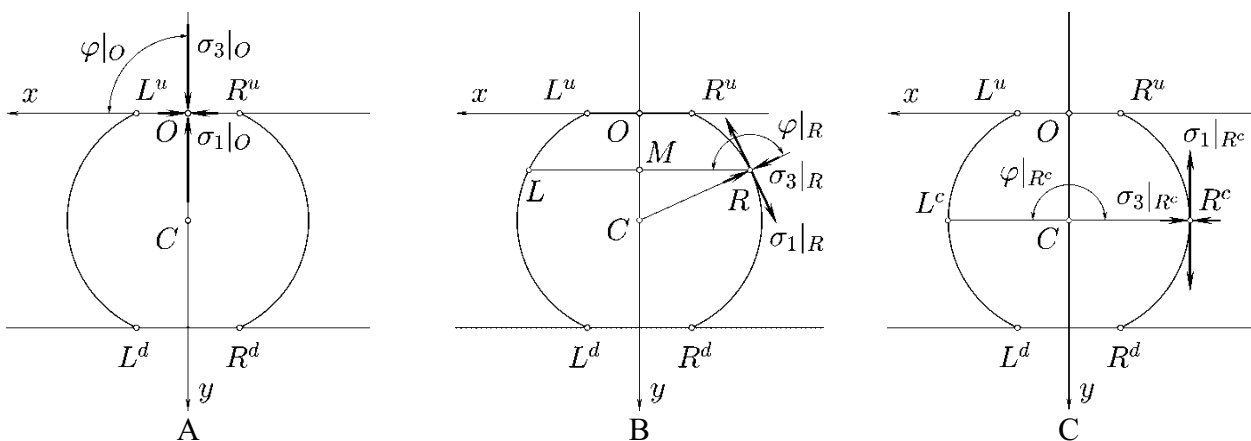


Рис. 3. Схема нагружения модельного тела  
Fig. 3. Chart of ladening of model body

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОДА  
ТОМАТА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ СДАВЛИВАНИИ

Учитывая симметричность плода в деформированном состоянии, можно также определить ординату  $y^{lr}$  произвольного сечения  $LR$ :

$$y^{lr} = y^l = y^r, \quad (15)$$

и ординаты  $y^u, y^d$ ,

$$y^u = y^{lu} = y^{ru}, \quad y^d = y^{ld} = y^{rd}, \quad (16)$$

двух пятен контакта  $L^u R^u, L^d R^d$ .

Понятно, что при отождествлении плода томата с бесконечно длинным цилиндрическим модельным телом, затруднительно определиться как с величиной начального значения  $I_{u0}$  интеграла внешней нагрузки  $I_u$ , так и с величиной интегрального значения  $I$  нагрузки, действующей в некотором горизонтальном сечении  $LR$ . Естественно, что любой из интегралов  $I_u, I_{u0}$  или  $I$  нельзя соотносить с бесконечно длинным пятном контакта или сечением, а, значит, следует ограничиться какой-то их частью. Очевидно, что удобнее всего выбрать отрезок модельного тела единичной длины.

В таком случае заданное (скорректированное) интегральное значение  $I'_{u0}$  внешней нагрузки должно составлять лишь некоторую долю от фактического интегрального значения  $I_{u0}$ . Используя материалы работ [5, 14, 15], в частности, два выражения для вычисления интегрального значения внешней нагрузки, действующей в некотором горизонтальном сечении  $I_u$ :

$$I(\Delta_{\phi^{lr}}) = 4k \exp\left(\frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k}\right) \times \quad (17)$$

$$\times [k \ln(\cos^2 \Delta_{\phi^{lr}}) + C_y^+ + k] \operatorname{tg} \Delta_{\phi^{lr}}$$

$$\text{и} \quad I = I_u + \gamma \Delta_V, \quad (18)$$

где:  $\Delta_V$  – объем верхнего фрагмента модельного тела  $L^u R^u LR$ , т.е. той его части, которая располагается между верхним пятном контакта  $L^u R^u$  и секущей плоскостью  $LR$ , а также, определив объем отрезка цилиндрического модельного тела единичной длины:

$$V_0 = \frac{1}{4} \pi D_0^2, \quad (19)$$

получаем:

$$I'_{u0} = \frac{4I_{u0}}{\pi D} + \gamma D_0^2 \left( \frac{D_0}{3D} - \frac{\pi}{8} \right). \quad (20)$$

Теперь непосредственно из (17) получаем выражения для постоянной  $C_y^+$

$$C_y^+ = \frac{I(\Delta_{\phi^{lr}})}{4k \operatorname{tg} \Delta_{\phi^{lr}}} \exp\left(\frac{\tilde{C}_y - \gamma y}{2k}\right) - k[\ln(\cos^2 \Delta_{\phi^{lr}}) + 1] \quad (21)$$

Если значения абсцисс  $x^l$  и  $x^r$  считать известными, то, воспользовавшись работами [5, 14, 15], выражение (21) можно свести к следующему виду:

$$C_y^+ = \frac{I(\Delta_{\phi^{lr}})}{x^l - x^r} - k[\ln(\cos^2 \Delta_{\phi^{lr}}) + 1]. \quad (22)$$

Выражения для вычисления постоянных  $C_y^*$  и  $\tilde{C}_y$ , вошедших в соотношения ((2)-(5)), приводим без вывода также воспользовавшись работами [5, 14, 15]:

$$C_y^* \Big|_{L^u R^u} = C_y^* \Big|_{LR} = 0, \quad (23)$$

$$\tilde{C}_y(\Delta_{\phi^{lr}}) \Big|_{LR} = \gamma y^{lr} + 2k \ln \frac{4k \operatorname{tg} \Delta_{\phi^{lr}}}{x^l - x^r}. \quad (24)$$

Порядок расчета формы свободного контура плода томата, находящегося в нагруженном состоянии, иллюстрирует рис. 4. Итерации начинаются с центрального сечения  $L^c R^c$  модельного тела и далее следуют вниз к пятну контакта  $L^d R^d$  в соответствии с разработанным алгоритмом.

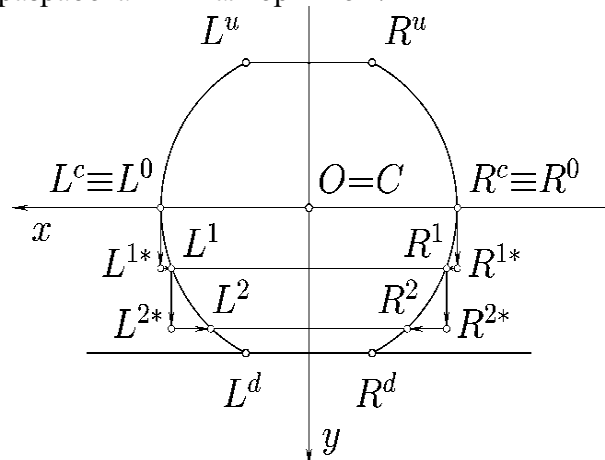


Рис. 4. Схема расчета геометрии свободного контура плода томата

Fig. 4. Chart of calculation of geometry of free contour of fruit of tomato

Основная особенность разработанного алгоритма (тут его не приводим) состоит в том, что в нем заложена возможность расчета величины пластической постоянной  $k$ .

Для оценки адекватности разработанного алгоритма расчета формы свободного контура плода томата (рис. 5), использовали начальные данные, которые соответствуют результатам реальных испытаний в ходе физического эксперимента. Исходные величины равно, как и промежуточные, и конечные цифровые данные, не приводим в виду ограничений на объем статьи.

На рис. 5 жирной линией изображена правая верхняя четверть  $R^u R^c$  свободного контура нагруженного модельного тела, а более тонким пунктиром – соответствующая часть свободного контура модельного тела до приложения силового воздействия. Тонкими стрелками показаны направления действия большего из главных нормальных напряжений  $\sigma_3$ . Тут, как и ранее (рис. 3), слово «направление» применяется формально, поскольку  $\sigma_3 = 0$ .

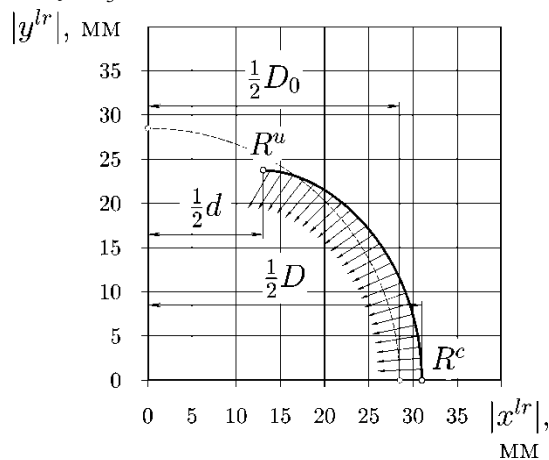


Рис. 5. Правая верхняя часть  $R^u R^c$  свободного контура нагруженного модельного тела до (тонкий пунктир) и после (жирная сплошная линия) нагружения

Fig. 5. Right overhead part  $R^u R^c$  of free contour of the loaded model body before and after (fat continuous line) a lading

В идеальном случае эти стрелки должны всегда быть ориентированными по нормали к свободному контуру. В данном случае мы имеем незначительное отклонение от нормали, однако, такой результат следует считать вполне приемлемым, поскольку реальный объект — плод томата, очевидно, отличается

от пластического тела. Во-первых, он имеет упругую оболочку, а, во-вторых, например, плоды сорта «Кременец» – воздушные пространства внутри.

## ВЫВОДЫ

Свободный контур плода томата (отрезок  $R^u R^c$  на рис. 5) по форме в точности соответствует реальному объекту. Такой же вывод можно сделать и в отношении всей предлагаемой математической модели. Рассматривая плод томата как пластическое тело, представляющее собой единичный отрезок бесконечно длинного горизонтального цилиндра с соответствующим начальным диаметром, и воспользовавшись описанной выше методикой, можно со значительной точностью рассчитать как параметры напряженного состояния плода томата в процессе его нагружения, так и его геометрические параметры в деформированном состоянии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chakrabarty J. 2006. Theory of Plasticity. – [third edition] – Oxford: Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier. – 896.
2. Chausov N., Vil'demann V., Pilipenko A. 2012. Modelirovanie povedenija plasticheskikh materialov pri slozhnyh nagruzkah. Motrol. Motoryzacija i energetyka rolnictwa, – Lublin, – Tom 14, №3, 191 - 199.
3. Hill R. 1998. The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford : Oxford University Press. – 355.
4. Jones R. M. 2009. Deformation Theory of Plasticity. – Blacksburg: Bull Ridge Publishing, – 640.
5. Mel'nik V. I. Cyganenko M. A. 2005. Plody tomatov kak plasticheskoe telo. Mehanizacija sil's'kogospodars'kogo virobniictva: Visnik Harkivs'kogo nacional'nogo tehnicnogo universitetu sil's'kogo gospodarstva im. Petra Vasilenka. Vipusk 41, - Harkiv: Vidavnictvo SPDFO Chervjak V. E., - 283 - 299.
6. Melnik V. I. 1996. On connection between the plane limiting equilibrium problem for a non-ideally coherent medium and the plasticity theory. Functional materials. Vol. 3. No. 4. – 566 - 570.
7. Mel'nik V. I. 2000. Tehnologicheskie zadachi povyshenija vibrotermostojkosti kristallicheskih scintilljacionnyh detektorov. avtoref. dis. na

- soiskanie nauchn. stepeni kand. tehn. Nauk. – Har'kov, – 20.
8. Mel'nik V. I. 2001. Preobrazovanie nezavisimyh peremennyh po harakteristicheskomu resheniju giperbolicheskikh kvazilinejnyh sistem dvuh uravnenij. Visnik Nacional'nogo tehničnogo universitetu «Harkivs'kij politehničnij institut». Zbirnik naukovih prac'. Tematičnij vipusk: Dinamika i mičnist' mashin. – Harkiv: NTU «HPI», № 25. 118 - 125.
9. Mel'nik V. I. 2002. Sootnošenija na dekartovyh koordinatah dlja uslovij predel'nogo ravnovesija ideal'no svjaznoj sredy. Vibracija v tehniči ta tehnologijah. №3(24). 72 - 81.
10. Mel'nik V. I. 2003. Uplotnenie ideal'no-svjaznoj sredy mezhdu parallel'nymi vertikal'nymi stenkami – vyvod osnovnyh uravnenij. Vibracija v tehniči ta tehnologijah. – № 6(32), 68 - 76.
11. Mel'nik V. I. 2004. Uplotnenie ideal'no-svjaznoj sredy mezhdu parallel'nymi vertikal'nymi stenkami – analiz granichnyh uslovij i algoritm rasčeta. Vibracija v tehniči ta tehnologijah. № 4(36), 81 - 90.
12. Mel'nik V. I. 2006. Uplotnenie ideal'no-svjaznoj sredy mezhdu parallel'nymi vertikal'nymi stenkami – postroenie setki linij skol'zhenija. Vibracija v tehniči ta tehnologijah. № 1(43). 79 - 86.
13. Mel'nik V. I. 2005. K voprosu o znakah kasetel'nyh naprjazhenij. Mehanizacija sil's'kogospodars'kogo virobništva : Visnik Harkivs'kogo nacional'nogo tehničnogo universitetu sil's'kogo gospodarstva im. Petra Vasilenka. Vipusk 41, Harkiv : Vidavništvo SPDFO Chervjak V. E., - 259 - 264.
14. Mel'nik V. I. 2006. Predel'noe ravnovesie sploshnyh neuprugih sred. Monografija – Har'kov : Izdatel'stvo KP «Tipografija № 13», – 367.
15. Mel'nik V. I. 2012. Predel'noe ravnovesie svjaznyh i sypuchih sred: Monografija. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, – 357.
16. Osakada K. 2010. History of plasticity and metal forming analysis. Journal of Materials Processing Tech. Vol. 210. Issue 11. 1436 - 1454
17. Popov A., Butakov B., Marchenko D. 2011. Determination of the tensely-deformed state of bodies at their pin cooperation. Motrol. Motoryzacija i energetyka rolnictwa. Lublin, – Tom 13A. – 13-24.
18. Vasilenko P. M. 1950. K teorii kachenija kolesa so seldom. Sel'hozmashina. №9 –11 - 14.
19. Vasilenko G. A. 1950. Do teorii sil's'kogospodars'kih kotkiv. Trudi Laboratorii mashinobuduvannja ta problem sil's'kogospodars'koï mehaniki. – K. : Vid-vo AN URSR, T. 1. 64 - 99.
20. Vasilenko P. M. 1996. Vvedenie v zemledel'českuju mehaniku. – K.: Sil'gosposvita, – 252.

#### MATHEMATICAL SIMULATION OF THE TENSE STATE OF FRUIT OF TOMATO AT VERTICAL SQUEEZING

**Summary.** The aim is to study the mechanisms of damage to tomato fruits during transportation and storage. The methods of the theory of plasticity and limit equilibrium of continuous media. Tomato fruits are regarded as spherical body modeling, consisting of the continuous medium is characterized by specific weight of plastic and a constant external friction. In this problem the model body is rigid, flat on a horizontal surface and is pressed against it in the same warp. In this study the state of stress and deformation of the model of the body.

**Key words:** tomato fruit, plasticity, contact patch, stress, strain, interaction, a quasi-linear system of equations of hyperbolic type, characteristics, value, the derivative.