MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture – 2015. Vol.17. No.7. 39-44

# К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ ПО ПЛОТНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ РАБОЧИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

***Вадим Бредихин[1], Владимир Шевченко[2]***

*[1]Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко*

*ул. Артема 44, г. Харьков, 61002, Украина. E-mail: vadimbr76@mail.ru*

*[2]Государственное учреждение «Научно-методический центр информационно-аналитического обеспечения деятельности высших учебных заведений «Агрообразование»*

*ул. Смилянская, 11, Киев, Украина. E-mail: borhalenko@rambler.ru*

***Vadim Bredykhin[1], Volodymyr Shevchenko[2]***

*[1]Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture*

*St. Artem 44, Kharkiv, 61002, Ukraine. E-mail: vadimbr76@mail.ru*

*[2]State Institution "Scientific and methodical center of information and analytical support of higher educational institutions "Agreeducation"*

*St. Smilyanska, 11, Ukraine. E-mail: borhalenko@rambler.ru*

**Аннотация.** Рассмотрены элементы физико-математического моделирования процессов сепарации зерновых смесей по плотности семян вибропневмоцентробежными сепараторами. Определено, что процессы, происходящие в сепараторах, имеющих цилиндрическую рабочую поверхность существенно отличаются от процессов на рабочей поверхности пневмосортировальных столов [1].

При построении математических моделей полагаем, что под воздействием воздушного потока и колебаний опорной поверхности произошло расслоение псевдоожиженного зернового слоя по высоте (вдоль оси перпендикулярной опорной поверхности). В результате образовались $N$ - слоев частиц, обладающих различными аэрогравитационными и гидродинамическими свойствами. Движение каждого слоя частиц будем рассматривать как движение сплошных сред, а взаимодействие этих сред моделируется соответствующими краевыми условиями на границах раздела сред. Таким образом, в соответствии с основными концепциями механики многофазных систем, движение расслоенного по высоте псевдоожиженного слоя частиц будем моделировать как движение $N+1$ - фазной системы, состоящей из $N$ слоев частиц дискретных фаз и одной непрерывной фазы – газообразная среда (воздух).

Исследована круговая цилиндрическая поверхность, которая совершает равномерное вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью и колебательное гармоническое движение вдоль этой оси с круговой частотой, и амплитудой. Установлено, что в результате воздействия воздушного потока, поля центробежных сил и гравитационного поля образовалось $N$- кольцевых слоев частиц, обладающих различными аэрогравитационными и гидродинамическими свойствами. Исследование динамики такой $N$- фазной структуры будем производить относительно цилиндрической системы координат жестко связанной с движущейся цилиндрической поверхностью. Движение каждого $N$ слоя частиц рассматривается как движение сплошной среды. Исследование динамики такой - фазной структуры производится относительно цилиндрической системы координат жестко связанной с движущейся цилиндрической поверхностью. Определены граничные условия на цилиндрической поверхности. Скорости частиц, прилегающих к цилиндрической поверхности, не равны нулю и, следовательно, допускается проскальзывание. Это означает, что имеет место равенство касательных напряжений кольцевого слоя, примыкающего к цилиндрической поверхности, силе сопротивления этой поверхности, отнесенной к единице площади. Кроме того, граничные условия на цилиндрической поверхности и на границе кольцевого слоя с воздухом (свободная граница). На свободной границе, в пренебрежение действия воздуха на динамику зерновой смеси, напряжения обращается в нуль.

Составлены начальные и граничные условия и уравнения решение которых позволит смоделировать процессы, происходящие на рабочей поверхности вибропневмоцентробежного сепаратора.

**Ключевые слова**: цилиндрическая поверхность, кольцевой слой, непрерывная фаза, зерновая смесь.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Перед агропромышленным комплексом Украины поставлена задача выхода на первое место в ЕС в аграрном секторе, особенно, в вопросе экспорта зерна. Решение этой задачи невозможно без получения собственного высококачественного посевного материала, что неразрывно связано с модернизацией и разработкой инновационных машин для послеуборочной обработки зерна.

В настоящее время одним из универсальных и широко используемым в технологиях самосортирования зерновых смесей является метод вибропневматического псевдоожижения с постоянным по величине воздушным потоком.

Рядом исследователей созданы основы теории самосортирования частиц зерновых смесей в псевдоожиженном слое при воздействии колебаний различного типа. Определены условия начала внутрислоевых перемещений, закономерности протекания процесса самосортирования, связывающие свойства сыпучей смеси с динамическими и кинематическими характеристиками рабочей поверхности. Однако эти теоретические исследования внутрислоевых процессов, как правило, основывались на простейших физических моделях. Слой смеси частиц, различающихся по геометрическим, физико-механическим свойствам и находящейся на воздухопроницаемой поверхности, подвергается воздействию воздушного потока и/или виброколебаниям рабочей поверхности. В результате при определенных значениях скорости воздушного потока и величинах амплитуды и частоты колебаний опорной поверхности слой частиц может находиться в псевдоожиженном состоянии, т.е. приобретает свойство текучести. Это приводит к тому, что наблюдается расслаивание смеси частиц: частицы, отличающиеся по своим аэрогравитационным свойствам, могут погружаться или всплывать в псевдоожиженном слое. Этот физический механизм и лежит в основе процесса самосортирования

Математические модели, описывающие этот процесс, в основном, основываются на уравнениях движения отдельной частицы. При этом, воздействие псевдоожиженного слоя на частицу учитывается введением различного типа сил: сила тяжести, сила сопротивления среды в приближении Ньютона или Стокса, выталкивающая сила Архимеда и т.п. Такой подход хотя и позволяет определять влияние кинематических, технических и конструктивных параметров на внутрислоевые процессы в псевдоожиженном слое частиц, однако, имеет ограниченную область применения. Поскольку, введение в уравнение движения отдельной частицы, указанных выше сил, как правило, делается формально, без увязки с другими членами уравнения. Кроме того, физические модели, основанные на уравнении движения отдельной частицы, не могут описать в полной мере такие важные эффекты как внутреннее взаимодействие между частицами, обусловленное поперечным сдвигом, образование скоплений частиц, приводящее к снижению коэффициента сопротивления и др. Понятно, что эти эффекты оказывают существенное влияние на интенсивность процесса самосортирования слоя частиц и, в конечном счете, на эффективность использования этого процесса в соответствующих технологиях.

В этой связи актуальной является проблема разработки математических моделей, позволяющих в наиболее общем виде учесть взаимодействие частиц (а не отдельной частицы) с псевдоожиженной средой. Одним из эффективных подходов к решению возникающих при этом задач, является подход, использующий методы гидродинамики многофазных систем [10, 11]. При таком подходе смесь частиц (например, зерновая смесь), подвергающаяся воздействию воздушного потока и виброколебаниям воздухопроницаемой опорной поверхности, моделируется многофазной структурой, состоящей из дискретных компонент (множества частиц различающихся, например, по размерам или плотностям) и непрерывной компоненты (например, газообразная среда - воздух). С точки зрения механики эти дискретные и непрерывные компоненты смеси рассматриваются как “сплошные среды”, взаимодействующие между собой. В дальнейшем такой подход будет использован для моделирования процесса самосортирования зерновых смесей плоскими воздухопроницаемыми поверхностями.

Вопросы, связанные с физико-математическим моделированием процессов сепарации такими машинами изучены в не достаточной мере. Поэтому указанное направление исследований является актуальным.

## АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Вопросам получения высококачественного посевного материала посвящен ряд работ [1-3]. Авторами доказана важная составляющая процесса – получение здорового, биологически активного семенного материала [2]. Выявлено определяющее влияние таких факторов, как амплитуда, частота, колебаний рабочей поверхности, скорость воздушного потока [5-7].

Ранее авторами неоднократно моделировались процессы происходящие в вибропневмо-центробежном сепараторе. Однако они рассматривали частицу зернового материала, как материальную точку, которая движется по рабочей поверхности. Этот подход не позволял в полной мере описать все составляющие процесса. В работах [8-11] авторами рассматривалось движение псевдоожиженного слоя для решетных сепараторов с учетом просыпания зерен в отверстия решета. В указанных роботах не учитывалась плотность семян.

В работах [12-17] авторами приведены основы разделения зерновых смесей по плотности семян. В этих работах приводятся модели движения псевдоожиженного слоя, однако в них не учитывается послойное движение семян. В работах [18-20] приведен инструментарий, позволяющий решать уравнения послойного движения зерновых смесей.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Составить начальные и граничные условия для дальнейшего моделирования процессов вибропневмоцентробежного разделения зерновых смесей по плотности.

## ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

В основе математические модели послойного движения смеси частиц по внутренней поверхности вращающейся воздухопроницаемой цилиндрической деки, совершающей вдоль вертикальной оси гармонические колебания лежит подход, использующий методы гидродинамики многофазных систем. Этот подход предполагает, что смесь частиц, подвергающаяся воздействию воздушного потока и полю центробежных сил, моделируется многофазной структурой, состоящей из конечного числа слоев дискретных компонент и непрерывной компоненты (газообразная среда). Эти дискретные и непрерывная компоненты смеси частиц рассматриваются как сплошные среды, взаимодействующие между собой. Это взаимодействие моделируется соответствующими условиями сопряжения на границах раздела сред.

Рассмотрим круговую цилиндрическую поверхность радиуса *R*, которая совершает равномерное вращательное движение вокруг вертикальной оси (ось $z$) с угловой скоростью $\omega_1$ и колебательное гармоническое движение вдоль этой оси с круговой частотой $\omega_2$ и амплитудой *A*. Для описания движения смеси частиц введем две цилиндрические системы координат с осью $z$, совпадающей с осью симметрии цилиндрической поверхности. Пусть одна из этих систем координат жестко связана с движущейся цилиндрической поверхностью, а вторая является абсолютной. Будем полагать, что в результате воздействия воздушного потока, поля центробежных сил и гравитационного поля образовалось *N*- кольцевых слоев частиц, обладающих различными аэрогравитационными и гидродинамическими свойствами. Движение каждого слоя частиц рассматривается как движение сплошной среды. Введем приведенную плотность частиц $n$-го слоя $\rho_n$ и среднюю плотность частиц $\bar{\rho}_n$, образующий $n$-ый слой.

Имеем:

$$\rho_n = \delta_n \bar{\rho}_n, \tag{1}$$

где: $\delta_n$ – объемная доля частиц $n$-го слоя ($n$-ая дискретная фаза).

Далее введем $\rho$ – приведенная плотность непрерывной фазы, а $\bar{\rho}$ – среднюю плотность газообразной среды, образующую эту фазу. Тогда, как следует из [11], получаем:

$$\rho = \bar{\rho}\left(1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n}\right) = \bar{\rho}\left(1 - \sum_{n=1}^{N} \delta_N\right). \tag{2}$$

Обозначим среднюю толщину $n$-го кольцевого слоя частиц через $h_n$, $n = 1,2,\ldots,N$. Значение индекса $n = 1$ отвечает кольцевому слою находящемуся на цилиндрической поверхности, а $n = N$ – кольцевому слою, одна из границ которого граничит с воздухом.

Исследование динамики такой $N$- фазной структуры будем производить относительно цилиндрической системы координат жестко связанной с движущейся цилиндрической поверхностью.

Пусть $\vec{\omega}_1$ – вектор угловой скорости цилиндрической поверхности, направленной вдоль оси $z$ цилиндрической системы координат $r, \varphi, z$ с ортами $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$. Согласно [16], абсолютные ускорение $\vec{a}_n$ и скорость $\vec{V}_n$ элемента $n$-го кольцевого слоя ($n$-ой дискретной фазы) можно выразить через относительные ускорение $\vec{b}_n$ и скорость $\vec{u}_n$ с помощью следующих формул:

$$\vec{a}_n = \vec{b}_0 + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{u}_n + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) + \vec{b}_n, \tag{3}$$

$$\vec{V}_n = \vec{u}_0 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{u}_n, \tag{4}$$

где: $\vec{b}_0 = -A\omega_2^2 \sin\omega_2 t \vec{e}_z$, $\vec{u}_0 = A\omega_2 \cos\omega_2 t \vec{e}_z$ – соответственно ускорение и скорость продольных (вдоль оси $z$) колебаний цилиндрической поверхности; $\vec{r} = r\vec{e}_r$ – вектор, соответствующий радиусу рассматриваемого элемента $n$-го цилиндрического слоя частиц.

С учетом выше изложенного, уравнения описывающие относительное движение $n$-го кольцевого слоя смеси частиц, [1] можно представить в виде:

$$\rho_n\left(\frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t} + (\vec{u}_n, \nabla)\vec{u}_n\right) = -\nabla P_n + \mu_n \Delta(\vec{u}_n + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}) + \rho_n \vec{F}_n + \vec{G}_n, \tag{5}$$

$$div \vec{u}_n = 0 \tag{6}$$

$$n = 1,2,\ldots,N.$$

где: $\mu_n$ – эффективный коэффициент динамической вязкости $n$-го слоя частиц.

$$\vec{F}_n = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_n}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{V} - \vec{u}_n) + (\vec{V} - \vec{u}_n, \nabla)(\vec{V} - \vec{u}_n) + 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{V} - \vec{u}_n) + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})\right] +$$
$$F_n(\vec{V} - \vec{u}_n) + \frac{9\bar{\rho}\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi} a_n \bar{\rho}_n} \int_0^t \left[\frac{\partial(\vec{V} - \vec{u}_n)}{\partial t} + (\vec{V} - \vec{u}_n, \nabla)(\vec{V} - \vec{u}_n) + 2\vec{\omega}_1 \times (\vec{V} - \vec{u}_n) + \right.$$
$$\left. + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})\right](t - r)^{-1/2} dr, \tag{7}$$

$$\vec{G}_n = -\rho_n g \vec{e}_z - \vec{b}_0 \rho_n - 2\rho_n (\vec{\omega}_1 \times \vec{u}_n) - \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})\rho_n, \tag{8}$$

где: $\vec{V}$ – относительная скорость непрерывной фазы; $P_n$ – давление в $n$-ом кольцевом слое; $\nu$ – эффективный коэффициент кинематической вязкости непрерывной фазы; $a_n$ – эквивалентный средний радиус по объему частиц $n$-го слоя; $F_n$ – коэффициент, характеризующий взаимодействие непрерывной фазы с частицами $n$-го слоя, который можно представить в следующем виде [11]:

$$F_n = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_n (1 - \delta_n)^2 a_n}\left(1.75 V_{0n} + \frac{75\nu\delta_n}{a_n}\right), \tag{9}$$

где: $V_{0n}$ – средняя скорость непрерывной фазы на границе $n$-го слоя $\left(r = R - \sum_{p=1}^{n} h_p\right)$.

Кроме уравнений (5), (6), описывающих относительное движение $n$-ой дискретной фазы ($n$-ый кольцевой слой смеси частиц), следует рассматривать уравнение относительно движения непрерывной фазы. Ограничимся линейным приближением, тогда эти уравнения для $n$-го кольцевого слоя, можно представить в следующей форме:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -(1 - \delta)\nabla P + \mu\Delta(\vec{V} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}) - \rho_n \vec{F}_n + \vec{G}, \tag{10}$$

$$div\vec{u}_n = 0, \tag{11}$$

где: $\mu$ – эффективный коэффициент динамической вязкости непрерывной фазы, $P$ – избыточное давление, $\delta = \sum_{n=1}^{N} \delta_n$:

$$G = -\rho\, g\, \vec{e}_z - \vec{b}_0 \rho - 2\rho(\vec{\omega}_1 \times \vec{V}) - \omega_1 \times (\omega_1 \times \vec{r})\rho. \tag{12}$$

Легко заметить, что основное отличие этих уравнений состоит в появлении для массовой силы дополнительных слагаемых в (5). Действительно, переход к относительному движению приводит в дополнение к реальной массовой силе (сила тяжести) появление сил инерции: $\vec{b}_0 \rho_n$ – сила инерции поступательного движения цилиндрической поверхности; $2(\vec{\omega}_1 \times \vec{u}_n)\rho_n$ – кариолисова сила, $\vec{\omega}_1 \times (\omega_1 \times \vec{r})\rho_n$ – центробежная сила.

В уравнениях (5) и (10) слагаемое $\Delta(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) = 0$, поскольку функция $\vec{\omega}_1 \times \vec{r}$ является гармонической [16]. Кроме уравнений (5), (6) и (10), (11), поля скоростей $\vec{u}_n, \vec{V}$ и давления $P_n$ и $P$ должны удовлетворять начальным условиям и граничным условиям – условия сопряжения на границах раздела дискретных фаз и условиям на поверхности воздухопроницаемой цилиндрической поверхности. Не ограничивая общности, будем полагать, что для моментов времени $t \le 0$, поле скоростей $\vec{u}_n$ и $\vec{V}$ и избыточные давления $P_n$ и $P$ обращаются в нуль:

$$P|_{t\le0} = P_n|_{t\le0} = 0, \quad \vec{u}_n|_{t\le0} = \vec{V}|_{t\le0} = 0. \tag{13}$$

Изменение $\vec{u}_n$, $\vec{V}$, $P_n$, $P$ для моментов времени $t > 0$ моделируется уравнениями (5) и (10).

Рассмотрим теперь условия сопряжения на границе раздела кольцевых слоев зерновой смеси (дискретные фазы). Для этого необходимо ввести тензор напряжений $\sigma^n = (\sigma_{ij}^n)_{i,j=1}^3$ для $n$-го кольцевого слоя зерновой смеси. В соответствии с [10, 11], компоненты тензора напряжений можно представить в виде:

$$\sigma_{ij}^n = -P_n \delta_{ij} + 2\mu_n e_{ij}^n, \quad n = 1,2,\ldots N,\ i,j = 1,\ldots,3. \tag{14}$$

где: $e^n = (e_{ij}^n)_{i,j=1}^3$ – тензор скоростей деформации, $\delta_{ij}$ – символ Кронекера.

В цилиндрической системе координат имеем [16]:

$$e_{11}^n = \frac{\partial u_z^n}{\partial z}, \quad e_{22}^n = \frac{\partial u_r^n}{\partial r}, \quad e_{33}^n = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^n}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{23}^n = e_{32}^n = \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi^n}{r}\right) + \frac{1}{2r}\frac{\partial u_r^n}{\partial \varphi},$$

$$e_{31}^n = e_{13}^n = \frac{1}{2r}\frac{\partial u_z^n}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_\varphi^n}{\partial z}, \tag{15}$$

$$e_{12}^n = e_{21}^n = \frac{1}{2}\frac{\partial u_r^n}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_z^n}{\partial r}.$$

Подставляя (15) в (14) получаем следующее выражения для компонент тензора напряжений в цилиндрической системе координат:

$$\sigma_{11}^n = -P_n + 2\mu_n \frac{\partial u_z^n}{\partial z}, \quad \sigma_{22}^n = -P_n + 2\mu_n \frac{\partial u_r^n}{\partial r},$$

$$\sigma_{33}^n = -P + \frac{2\mu_n}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi^n}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{23}^n = \sigma_{32}^n = \mu_n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^n}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial r} - \frac{u_\varphi^n}{r}\right), \tag{16}$$

$$\sigma_{31}^n = \sigma_{13}^n = \mu_n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^n}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{12}^n = \sigma_{21}^n = \mu_n\left(\frac{\partial u_r^n}{\partial z} + \frac{\partial u_z^n}{\partial r}\right).$$

В (15) и (16) $u_z^n, u_r^n, u_\varphi^n$ – компоненты относительной скорости $\vec{u}_n$.

Условия сопряжения на границах кольцевых слоев состоят в непрерывности скоростей и напряжений. Следовательно, на границе раздела $n$-го и $n+1$-го слоев должны быть непрерывны скорости:

$$\vec{u}_n|_{r=\bar{h}_n} = \vec{u}_{n+1}|_{r=\bar{h}_n}, \quad n = 1,2,\ldots,N-1, \tag{17}$$

где: $\bar{h}_n = R - \sum_{p=1}^{n} h_p$.

На этих же границах должны быть непрерывны касательные и нормальные компоненты тензоров напряжений дискретных фаз:

$$\mu_n e_{ij}^n \tau_i n_j|_{r=\bar{h}_n} = \mu_{n+1} e_{ij}^{n+1} \tau_i n_j|_{r=\bar{h}_n}, \tag{18}$$

$$(P_n - 2\mu_n e_{ij}^n n_i n_j)|_{r=\bar{h}_n} = (P_{n+1} - 2\mu_{n+1} e_{ij}^{n+1} n_i n_j)|_{r=\bar{h}_n}. \tag{19}$$

Здесь, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, а через $n_i$ и $\tau_i$ обозначены компоненты единичных векторов нормальных и касательных к границе раздела слоев. Кроме условий сопряжения (18), (19) следует поставить граничные условия на цилиндрической поверхности и на границе кольцевого слоя с воздухом (свободная граница). На свободной границе, в пренебрежение действия воздуха на динамику зерновой смеси, напряжения должно обращаться в нуль:

$$\vec{n} \cdot \sigma^N \Big|_{r=R-\sum\limits_{p=1}^{n} h_p}^{=0}, \tag{20}$$

где: $\vec{n}$ – орт нормали к свободной границе; $\sigma^N$ – тензор напряжений $N$-го кольцевого слоя.

Векторное равенство (20) эквивалентно трем скалярным равенствам, а именно:

$$\sigma_{22}^N|_{r=h} = \sigma_{12}^N|_{r=h} = \sigma_{32}^N|_{r=h} = 0, \tag{21}$$

где: $h = R - \sum_{p=1}^{N} h_p$ – суммарная толщина кольцевых слоев зерновой смеси.

Рассмотрим теперь граничные условия на цилиндрической поверхности. Будем полагать, что скорости частиц прилегающих к цилиндрической поверхности не равны нулю и, следовательно, допускается проскальзывание. Это означает, что имеет место равенство касательных напряжений кольцевого слоя, примыкающего к цилиндрической поверхности, силе сопротивления этой поверхности, отнесенной к единице площади. Таким образом, будем полагать, что на цилиндрической поверхности $(r = R)$ выполняется условие:

$$\sigma_{12}^1\Big|_{r=R} = fN, \quad \sigma_{32}^1\Big|_{r=R} = fN, \tag{22}$$

где: $N$ – нормальное давление; $f$ – коэффициент трения скольжения.

Нормальное давление на единицу площади будет равно:

$$N = \left|\vec{n}\sigma^1\vec{n}\right|\Big|_{r=R} = \left|\sigma_{22}^1\right|\Big|_{r=R} \tag{23}$$

Учитывая (23) имеем:

$$\sigma_{12}^1\Big|_{r=R} = f\left|\sigma_{22}^1\right|\Big|_{r=R}, \quad \sigma_{32}^1\Big|_{r=R} = f\left|\sigma_{22}^1\right|\Big|_{r=R} \tag{24}$$

На основании выше изложенного задача о моделировании послойного движения зерновой смеси по вращающейся цилиндрической воздухопроницаемой поверхности состоит в построении решения системы интегро-дифференциальных нестационарных уравнений (6), (10) удовлетворяющих начальным уравнениям (13) и краевым условиям (18), (19), (21), (24).

Для дальнейшего исследования системы уравнений (6), (10) представим ее в цилиндрической системе координат. После ряда преобразований будем иметь:

$$\frac{\partial u_z^n}{\partial t} + \vec{u}_n \nabla u_z^n = -\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P_n}{\partial z} + \nu_n \nabla u_z^n + F_z^n - g - A\omega_2^2 \sin\omega_2 t. \tag{25}$$

$$\frac{\partial u_r^n}{\partial t} + \vec{u}_n \nabla u_r^n - \frac{u_\varphi^{n^2}}{r} = -\frac{1}{\rho_n}\frac{\partial P_n}{\partial z} + \nu_n\left(\Delta u_r^n - \frac{u_r^n}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi^n}{\partial \varphi}\right) +$$

$$+ F_r^n + 2\omega_1 u_\varphi^n + r\omega_1^2. \tag{26}$$

$$\frac{\partial u_\varphi^n}{\partial t} + \vec{u}_n \nabla u_\varphi^n + \frac{u_r^n u_\varphi^n}{r} = -\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial P_n}{\partial \varphi} + \nu_n\left(\Delta u_\varphi^n + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r^n}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^n}{r^2}\right) +$$

$$+ F_\varphi^n - 2u_r^n\omega_1. \tag{27}$$

$$\frac{\partial u_z^n}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r u_r^n\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi^n}{\partial \varphi} = 0. \tag{28}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{(1-\delta)}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\Delta V_z - \frac{\rho_n}{\rho} F_z^n - g - A\omega_2^2 \sin\omega_2 t. \tag{29}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} = -\frac{(1-\delta)}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right) -$$

$$-\frac{\rho_n}{\rho} F_r^n + 2\omega_1 V_\varphi + r\omega_1^2. \tag{30}$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} = -\frac{(1-\delta)}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r^2}\right) - \frac{\rho_n}{\rho} F_\varphi^n - 2V_r\omega_1. \tag{31}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r V_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \tag{32}$$

где:

$$F_z^n = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_n}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(V_z - u_z^n\right) + \left(\vec{V} - \vec{u}_n\right)\nabla\left(V_z - u_z^n\right)\right] + F_n\left(V_z - u_z^n\right) +$$

$$+ \frac{9\bar{\rho}\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}a_n\bar{\rho}_n}\int_0^t\left[\frac{\partial\left(V_z - u_z^n\right)}{\partial t} + \left(\vec{V} - \vec{u}_n\right)\nabla\left(V_z - u_z^n\right)\right](t-\tau)^{-1/2}d\tau \tag{33}$$

$$F_r^n = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_n}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(V_r - u_r^n\right) + \left(\vec{V} - \vec{u}_n\right)\nabla\left(V_r - u_r^n\right) - \frac{\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right)}{r} - 2\omega_1\left(V_r - u_r^n\right) - \omega_1^2 r\right] +$$

$$+ F_n\left(V_r - u_r^n\right) + \frac{9\bar{\rho}\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}a_n\bar{\rho}_n}\int_0^t\left[\frac{\partial\left(V_r - u_r^n\right)}{\partial t} + \left(\vec{V} - \vec{u}_n\right)\nabla\left(V_r - u_r^n\right) - \frac{\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right)^2}{r} - \tag{34}$$

$$-2\omega_1\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right) - r\omega_1^2\right](t-\tau)^{-1/2}d\tau$$

$$F_\varphi^n = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_n}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right) + \left(\vec{V} - \vec{u}_n\right)\nabla\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right) + \frac{\left(V_r - u_r^n\right)\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right)}{r} +$$

$$+ 2\left(V_r - u_r^n\right)\omega_1\right] + F_n\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right) + \frac{9\bar{\rho}\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\pi}a_n\bar{\rho}_n}\int_0^t\left[\frac{\partial\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right)}{\partial t} + \left(\vec{V} - \vec{u}_n\right)\nabla\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right) + \tag{35}$$

$$+ \frac{\left(V_r - u_r^n\right)\left(V_\varphi - u_\varphi^n\right)}{r} + 2\left(V_r - u_r^n\right)\omega_1\right](t-\tau)^{-1/2}d\tau.$$

$$\vec{u}_n = u_z^n\vec{e}_z + u_r^n\vec{e}_r + u_\varphi^n\vec{e}_\varphi,$$

где: $\vec{V} = V_z\vec{e}_z + V_r\vec{e}_r + V_\varphi\vec{e}_\varphi$, – осевая, радиальная $u_z^n, u_r^n, u_\varphi^n$ $\left(V_z, V_r, V_\varphi\right)$ и окружная проекции скорости $n$-го кольцевого слоя (осевая, радиальная и окружная проекции скорости непрерывной фазы).

На основе решений системы уравнений (25) – (32) будут построены математические модели, описывающие различные режимы движения зерновой смеси по воздухопроницаемой цилиндрической поверхности.

## ВЫВОДЫ

В соответствии с полученными результатами, возможно, констатировать, что подход к решению поставленной задачи является адекватным и дальнейшее моделирование процессов актуально.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. **Бредихин В., Тищенко Л., Пивень М. 2013.** Определение эффективного коэффициента динамической вязкости зерновой смеси, находящейся на рабочей поверхности пневмосортировального стола. MOTROL «Determination of effective coefficient of dynamic viscosity of the grain mix which is on a working surface of a pneumosorting table.» – Poland: Lublin,– Vol. 15 D. – 21-30.
2. **Фадеев Л.В. 2015.** Зерно. Очистка. Производство семян. Щадящие технологии Фадеева. Харьков, 96.
3. **Мачихина Л.И. 1983.** Очистка риса – зерна / Л.И. Мачихина. – М.: Колос, 136.
4. **Суконкин Л.М.** 1997**.** Разделение зерновых материалов на решетных сепараторах / Л.М. Суконкин, В.М. Дринча. Тракторы и с.-х. Машины.- №1.- 28-33.
5. **Clark B. 1983.** Cleaning seeds by fluidized bed medium / B.Clark Transactions of the ASAE. - Vol. 26.- N 4. 987-990.
6. **Clark B. 1985.** Cleaning seeds by fluidized bed medium / B.Clark Journal of Agricultural Engineering Research. - Vol. 31.- N 3.- 231-242.

7. **Дринча В.М.** 2006. Исследование сепарации семян и разработка машинных технологий их подготовки Воронеж: Изд-во НПО "МОДЭК",– 384.
8. **Тищенко Л.Н.** 2010. Моделирование процессов зерновых сепараторов / Л.Н. Тищенко, Д.П. Мазаренко, М.В. Пивень, С.А. Харченко, В.В. Бредихин.- Харьков: ХНТУСХ, "Мисьдрук", – 360.
9. **Тищенко Л.Н. 2012.** Вибросепарирование плоским решетом неоднородного слоя зерна. друк. MOTROL «Motorization and power industry in agriculture». – Poland: Lublin,– Vol. 14 D. – P. 21-30.
10. **Тищенко Л.Н. 2012.** Колебательные процессы в зерновых смесях на решетах виброцентробежных сепараторов. друк. MOTROL «Motorization and power industry in agriculture». – Poland: Lublin,– Vol. 14 D. – 30-39.
11. **Тищенко Л.Н. 2012.** Моделирование потока зернового слоя на решете с учетом просеивания. друк. MOTROL «Motorization and power industry in agriculture». – Poland: Lublin,– Vol. 14 D. – 39-48.
12. **Тищенко Л.Н. 2004.** Интенсификация сепарирования зерна / Л.Н. Тищенко.- Харьков: Основа, 224.
13. **Дулаев В.Г.** 1986. Анализ вибрационного и вибропневматического процессов разрешения зерновок пшеницы различной плотности и стекловидности / В.Г. Дулаев, Г.В. Яцевич, В.В. Гортинский // Труды ВНИИЗ.- М., Вып. 107.- 84-91.
14. **Кизильвальтер Б.В. 1979.** Теоретические основы гравитационных процессов обогащения / Б.В. Кизильвальтер .- М.: Недра, 295.
15. **Нигматулин Р.И. 1978.** Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин.- М.: Наука, 336.
16. **Соус С. 1971.** Гидродинамика многофазных систем / С. Соус.- М.: Мир, 536.
17. **Тищенко Л.Н. 2010.** Виброрешетная сепарация зерновых смесей "Мисьдрук".- 360.
18. **Крылов В.И. 1976.** Вычислительные методы. Т. 2 / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский.- М.: Наука, 399.
19. **Лаврентьев М.А. 1958.** Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.- М.: Изд-во физико-математической литературы, 674.
20. **Корн Г. 1970.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 720.


## TO MATHEMATICAL MODEL OF DIVISION OF GRAIN MIXES ACCORDING TO DENSITY CYLINDRICAL WORKING SURFACES


Elements of physical and mathematical modeling of separation processes of grain mixes on specific gravity of seeds by vibro- and pneumocentrifugal separators are considered. It is defined that the processes happening in the separators having a cylindrical working surface significantly differ from processes on a working surface of pneumosorting tables [1].

While working out the mathematical models we believe that under influence of an air stream and fluctuations of a basic surface there was a stratification of a fluidized grain layer on height (along an axis which is perpendicular basic surface). The N - layers are formed as a result of various aero gravitational and hydrodynamic properties of the particles. The movement of each layer of particles are considered as the movement of continuous environments, and the interaction of these media is modelled by the corresponding edge conditions at the limits of the environments section. Thus, according to the main concepts of mechanics of multiphase systems the movement of the fluidized layer of particles stratified on height is simulated as the movement of the N+1 phase system consisting of N layers of particles of discrete phases and one continuous phase – the gaseous environment (air).

The circular cylindrical surface which makes a uniform rotary motion round a vertical axis with an angular speed and the oscillating harmonious motion along this axis with a circular frequency and amplitude is studied. It is established that as a result of influence of an air stream, a field of centrifugal forces and a gravitational field N-of ring layers of the particles possessing various aero gravitational and hydrodynamic properties was formed. The dynamics of such N-of phase structure is researched according to cylindrical system of coordinates which is rigidly connected with a moving cylindrical surface. The movement of each N layer of particles is considered as the movement of the continuous environment. Boundary conditions on a cylindrical surface are defined. Speeds of the particles adjacent to a cylindrical surface aren't equal to zero and, therefore, slipping is allowed. It means that equality of tangent tension of the ring layer adjoining a cylindrical surface, force of resistance of this surface carried to unit of area takes place. On free border the effect of air on dynamics of grain mix on tension is zero.

Entry and boundary conditions as well the equations are worked out. Solving of the equations will allow to simulate the processes happening on a working surface of a vibration pneumatic sorting machine.


**Key words:** cylindrical surface, ring layer, continuous phase, grain mix.