

Leon REMBEZA

Wyznaczanie czasu dopływu filtracyjnego zanieczyszczeń do studni przy swobodnym zwierciadle wody

Abstract

Determination of travel time of pollutants inflowing to well in unconfined aquifer. The problem of calculation of travel times of pollutants flowing to a well is vital because of possible contamination of water in the well. It must be known when a protective zone of the well is established.

The paper presents several relationships for calculation of the pollutant travel time to well in an unconfined aquifer. A comparison of these relationships and accomplished calculations allowed to determine their ranges of validity.

Key words: pollutants flow, wells, travel time.

Wstęp

Projektowanie terenów stref ochrony pośredniej ujęć wody oraz możliwości pojawienia się w studni zanieczyszczeń o koncentracji przekraczającej wartości dopuszczalne związane jest z zagadnieniem wyznaczenia czasu dopływu zanieczyszczeń od źródła zanieczyszczeń do ujęcia. Czas ten można określić wyznaczając czas przemieszczenia się cząstki wody od źródła zanieczyszczeń do ujęcia, przyjmując założenie o adwekcyjnym transporcie zanieczyszczeń (Luckner, Czestakow 1986). W tym celu potrzebna jest znajomość zmian prędkości filtracji

wzdłuż linii prądu. Prędkość tę można wyrazić zależnością

$$v = \varepsilon \frac{dl}{dt} \quad (1)$$

gdzie:

l – droga,

t – czas,

ε – porowatość efektywna.

Przekształcając związek (1), otrzymamy zależność do obliczenia czasu w postaci

$$t = \varepsilon \int \frac{dl}{v} \quad (2)$$

gdzie: v – prędkość filtracji.

Zależność (2) można przedstawić jeszcze w innej postaci biorąc pod uwagę związek pomiędzy prędkością filtracji a gradientem filtracyjnym (Luckner, Czestakow 1986)

$$t = -\frac{\varepsilon}{k} \int \frac{dh}{I^2} \quad (3)$$

gdzie:

I – gradient filtracyjny,

h – wysokość piezometryczna,

k – współczynnik filtracji.

Wyznaczenie czasu dopływu

Stosunkowo prosto daje wyznaczyć się czas dopływu do studni zupełnej, umieszczonej w warstwie wodonośnej z napiętym zwierciadłem wody.

Prędkość filtracji w tym wypadku określona jest zależnością

$$v = \frac{Q}{2\pi D \cdot r} \quad (4)$$

gdzie:

Q – wydatek studni,

D – miąższość warstwy wodonośnej,

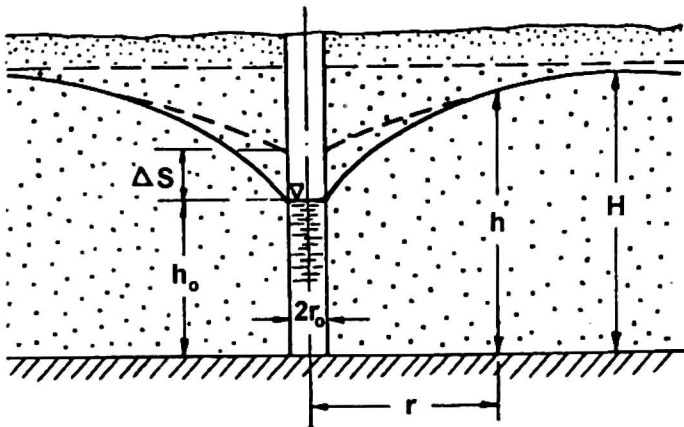
r – odległość od osi studni.

Uwzględniając związek (4) w zależności (2), po przekształceniach otrzymamy

$$t = \frac{2\pi D \varepsilon}{Q} \int_{r_0}^r dr = \frac{\pi D \varepsilon}{Q} (r^2 - r_0^2) \quad (5)$$

gdzie: r_0 – promień studni.

W przypadku dopływu do studni przy swobodnym zwierciadle wody wyznaczenie czasu dopływu nie jest już takie proste. Stosowany jest wzór przybliżony, określony przy przyjęciu średniego spadku krzywej depresji (rys. 1)



RYSUNEK 1. Schemat dopływu do studni przy swobodnym zwierciadle wody

$$I = \frac{h - h_0}{r - r_0} = const. \quad (6)$$

Podstawiając zależność (6) do związku (3), po przekształceniach otrzymamy

$$t = -\frac{\varepsilon}{kJ^2} \int_{h_0}^h dh = -\frac{\varepsilon}{k} \frac{(r - r_0)^2}{(h - h_0)^2} \int_{h_0}^h dh = \frac{\varepsilon}{k} \frac{(r - r_0)^2}{h - h_0} \quad (7)$$

przy czym wielkości h i h_0 wyrażone będą zależnościami

$$h = \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}} \quad (8)$$

$$h_0 = \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_0}}$$

gdzie: R – zasięg krzywej depresji.

Dokładniej czas dopływu można wyznaczyć następująco:

Prędkość filtracji można przedstawić w postaci

$$v = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{Q}{2\pi r \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}}} = \frac{Q}{2\pi r H \sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k h^2} \ln \frac{R}{r}}} \quad (9)$$

W związku (9) wysokość h wyrażono zależnością (8). W celu wykonania całkowania, związek (9) napiszmy w przybliżonej postaci rozwijając w szereg potęgowy wyrażenie

$$\sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{R}{r}} =$$

$$= 1 - \frac{Q}{2\pi k H} \ln \frac{R}{r} - \dots \quad (10)$$

i weźmy dwa wyrazy tego rozwinięcia. Związek (9) przyjmie postać

$$v = \frac{Q}{2\pi r H \left(1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{R}{r}\right)} \quad (11)$$

Podstawiając zależność (11) do związku (2) po wykonaniu całkowania otrzymamy

$$t = \frac{2\pi \epsilon H}{Q} \int_{r_0}^r \left(1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{R}{r}\right) dr =$$

$$= \frac{\pi \epsilon H}{Q} \cdot \left\{ r^2 \left[1 - \frac{Q}{2\pi k H^2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{R}{r}\right)\right] + \right.$$

$$\left. - r_0^2 \left[1 - \frac{Q}{2\pi k H^2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{R}{r_0}\right)\right] \right\} \quad (12)$$

Warto zaznaczyć, że przyjęcie przybliżonego związku (11) oznacza przyjęcie równania krzywej depresji postaci

$$h = H \left(1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{R}{r}\right) \quad (13)$$

w miejsce związku (8). Podstawiając do zależności (13) znany związek na wydatek filtracyjny Q otrzymamy

$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h_0^2}{H^2}\right) \frac{\ln \left(\frac{R}{r}\right)}{\ln \left(\frac{R}{r_0}\right)} \quad (14)$$

Z równania (14) wynika, że dla odciętej $r = r_0$ wzniesienie krzywej depresji będzie wynosić

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_0^2}{H^2}\right) \quad (15)$$

Wzniesienie zaś Δs krzywej depresji ponad poziomem wody w studni h_0 , zwane wysokością swobodnego dopływu lub tzw. uskokiem, będzie na podstawie związku (15) równe

$$\frac{\Delta s}{H} = \frac{h}{H} - \frac{h_0}{H} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_0^2}{H^2}\right) - \frac{h_0}{H} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h_0^2}{H^2}\right)^2 \quad (16)$$

Można więc stwierdzić, że krzywa depresji opisana równaniem (13) uwzględnia występowanie wysokości swobodnego dopływu Δs , wyrażonej związkiem (16). W literaturze podaje się szereg zależności do wyznaczania wielkości Δs (Castany 1967), (Kowalski 1987). Zależność (16) jest taka sama jak związek na wysokość Δs podany przez *Ehrenbergera* (Castany 1967), (Kowalski 1987).

Inna możliwość określenia zależności do obliczania czasu dopływu do studni przy swobodnym zwierciadle wody polega na wykorzystaniu związku (5) odnoszącego się do studni w warstwie wodonośnej pod ciśnieniem. Mianowicie w zależności (5) można wielkość D zastąpić przez średnią miąższością warstwy wodonośnej, czyli

$$D = \frac{1}{2} (H + h_0) \quad (17)$$

przy czym h_0 wyraża się związkiem (8). Podstawiając zależność (17) do wzoru (5) otrzymamy

$$\frac{tQ}{\epsilon HR^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{R}{r_0}} \right) \quad (18)$$

Jako średnią miąższość warstwy wodonośnej można przyjąć miąższość zastępczą równą np. wysokości położenia krzywej depresji w miejscu o odciętej r , czyli

$$D = \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}} \quad (19)$$

lub wysokość położenia krzywej depresji dla $r = 0,5 R$, czyli

$$D = \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln 2} \quad (20)$$

Podstawiając związki (19) i (20) do wzoru (5) otrzymamy w pierwszym przypadku

$$\frac{tQ}{\epsilon HR^2} = \pi \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k h^2} \ln \frac{R}{r}} \right) \quad (21)$$

w drugim zaś

$$\frac{tQ}{\epsilon HR^2} = \pi \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln 2} \right) \quad (22)$$

W celu porównania wyników otrzymywanych za pomocą poszczególnych wzorów, zależności (7) i (21) przedstawiono także w postaci bezwymiarowej

$$\frac{tQ}{\epsilon HR^2} = \pi \left(\frac{r}{R} - \frac{r_0}{R} \right)^2 \quad (23)$$

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{R}{r}} + \sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{R}{r_0}}}{\ln \frac{R}{r_0} - \ln \frac{R}{r}}$$

oraz

$$\frac{tQ}{\epsilon HR^2} = \pi \left\{ \frac{r^2}{R^2} \left[1 - \frac{Q}{2\pi k H^2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{R}{r} \right) \right] + \frac{r_0^2}{R^2} \left[1 - \frac{Q}{2\pi k H^2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{R}{r_0} \right) \right] \right\} \quad (24)$$

Obliczenia porównawcze

Wyniki obliczeń na podstawie związków (18), (21), (22), (23) i (24) przedstawiono na rys. 2, dla wartości relacji $r/R = 0,1$ oraz na rys. 3 i 4 dla $r/R = 0,5$ i $1,0$.

Poszczególne krzywe na rysunkach 2, 3 i 4 rozpoczynają się dla promienia studni $r_{0 \min}$, odpowiadającego wielkości $h_0 = 0$, obliczanego z zależności

$$\frac{r_{0 \min}}{R} = \exp \left(- \frac{\pi k H^2}{Q} \right)$$

Z przebiegu krzywych wynika, że najbardziej odbiegają od obliczeń według zależności (24), którą można uznać za najdokładniejszą, wyniki obliczeń na podstawie związku (23). Dobrą zgodność otrzymuje się dopiero dla bardzo dużych

wartości promienia studni, większych od ok. $0,5r$, czyli praktycznie rzadko występujących.

Zależność (18) daje duże rozbieżności ze wzorem (24) tylko dla małych wartości promienia r_0 , mniejszych od pewnej wartości granicznej, odpowiadającej w przybliżeniu ekstremum funkcji opisanej związkami (18), (rysunki 2, 3, 4).

Korzystając z warunku ekstremum funkcji opisanej związkami (18)

$$\frac{dt}{dr_0} = 0 \quad (25)$$

wyznaczamy graniczną wartość promienia $r_0 = r_z$, określającego zakres stosowania zależności (18), z następującego związku

$$r = r_z \sqrt{1 + \frac{4\pi kH^2}{Q} (A + \sqrt{A})},$$

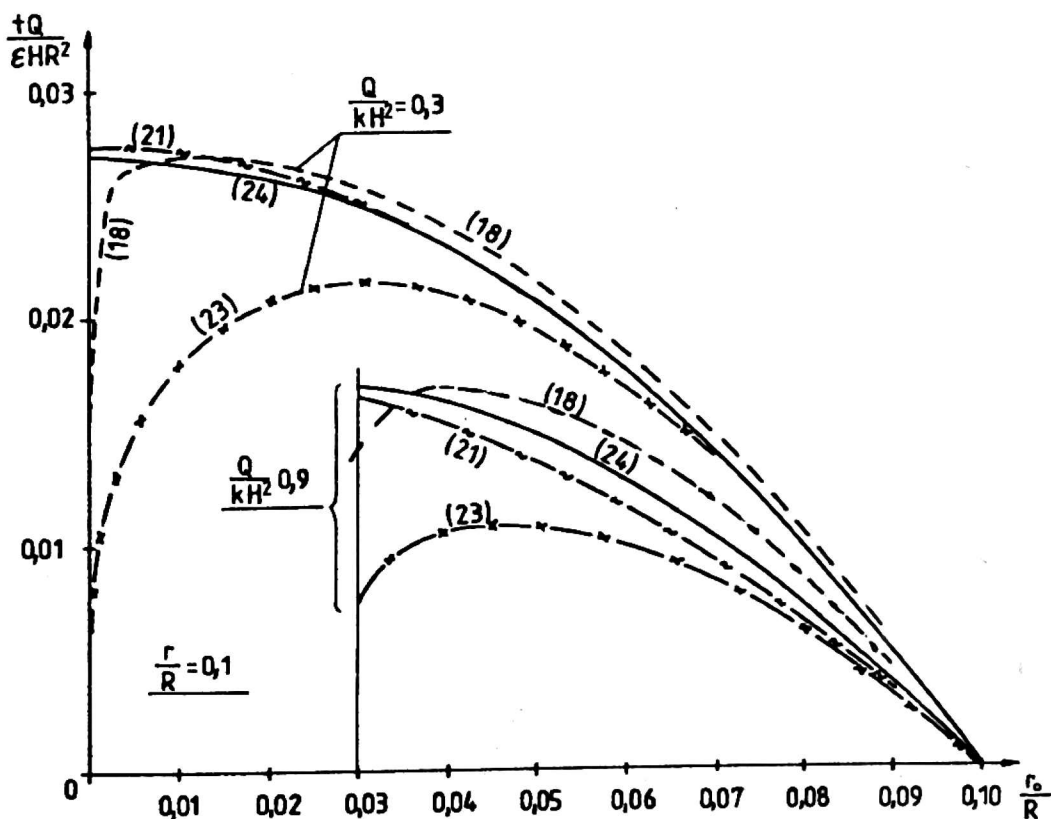
$$A = 1 - \frac{Q}{\pi kH^2} \ln \frac{R}{r_z} \quad (26)$$

Wielkość r_z ze związku (26) oblicza się metodą kolejnych przybliżeń.

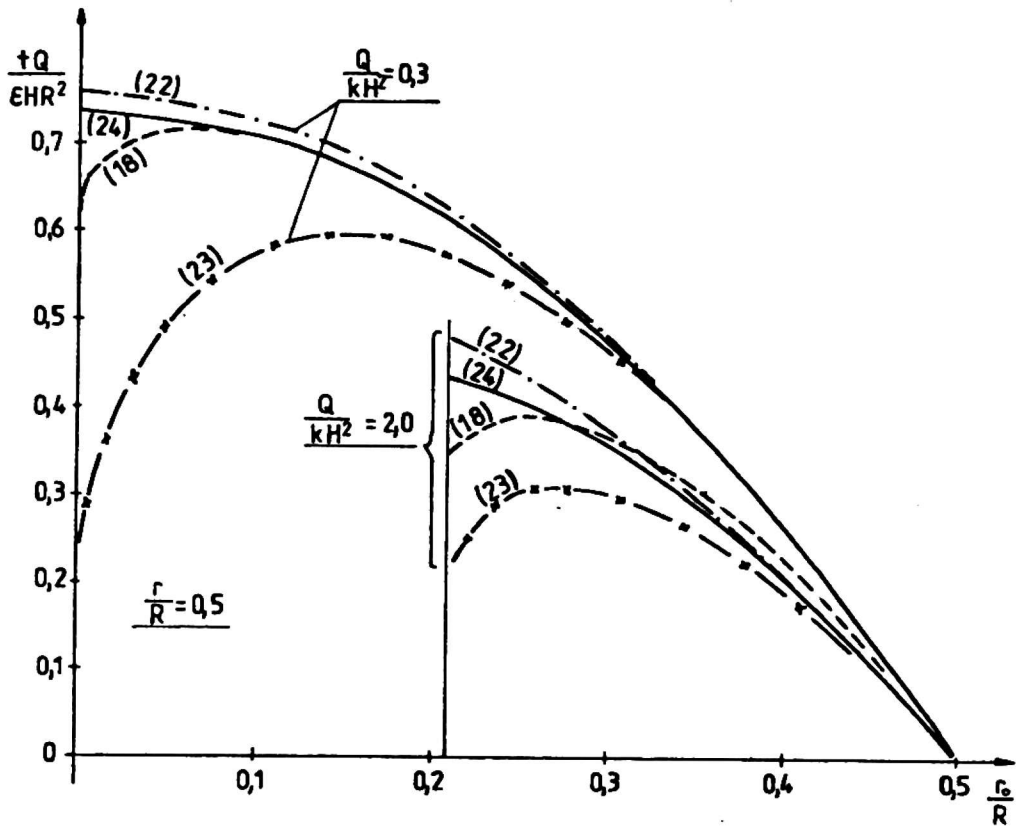
Jeśli promień studni r_0 jest większy od promienia r_z , to można stosować do obliczeń związki (18). Gdy zaś r_z wypadnie większe od r_0 , to w przybliżeniu można wykorzystać do obliczeń związki (18) zastępując w nim promień r_0 przez r_z .

Dobłą zgodność ze związkami (24) daje zależność (21) dla relacji $r/R \leq 0,5$ (rys. 2, 3). Obliczenia na podstawie zaś związku (22) dają dobrą zgodność z zależnością (24) dla relacji $r/R \geq 0,5$ oraz dla małych wartości wyrażenia $Q/(kH^2)$, por. rysunek 4.

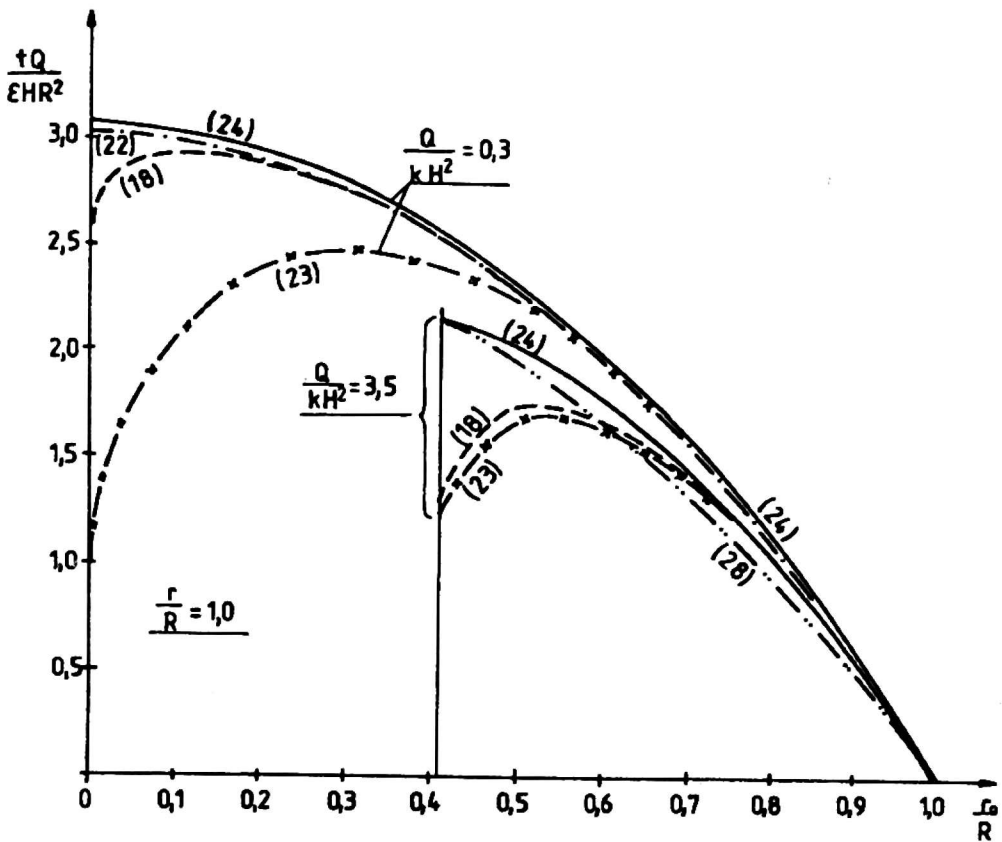
W celu dokładniejszego określenia zakresu stosowania wzoru (22) na rysunku 5 przedstawiono przebieg krzywych wyznaczonych na podstawie związków (24) i (22) w zależności od zmiany wielkości



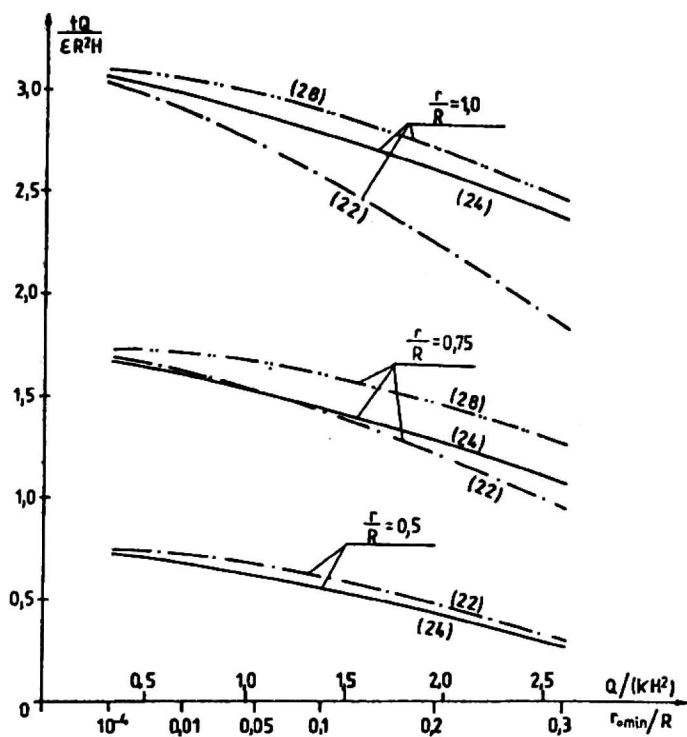
RYSUNEK 2. Przebieg zmian czasu przepływu dla relacji $r/R = 0,1$



RYСУNEK 3. Przebieg zmian czasu przepływu dla $r/R = 0,5$



RYСУNEK 4. Przebieg zmian czasu przepływu, dla $r/R = 1,0$



RYSUNEK 5. Przebieg zmian czasu przepływu w zależności od zmian wielkości $Q/(kH^2)$

$Q/(kH^2)$, odpowiadającej $r_{0 \min}$. Widoczna jest, w przyjętym zakresie zmian, dobra zgodność obliczeń na podstawie związku (22) i (24), dla relacji r/R zmieniającej się od 0,5 do 0,75. Natomiast dla relacji $r/R = 1,0$ dobra zgodność występuje jedynie dla wartości wyrażenia $Q/(kH^2) \leq \sim 1,0$. Na rysunku 5 podano jeszcze wyniki obliczeń według związku (5) przy przyjęciu zastępczej miąższości warstwy wodonośnej równej wysokości położenia krzywej depresji dla $r = 0,75 R$, czyli

$$D = \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{4}{3}}$$

oraz

$$\frac{tQ}{\epsilon HR^2} = \pi \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2} \right)$$

$$\sqrt{1 - \frac{Q}{\pi k H^2} \ln \frac{4}{3}} \quad (28)$$

Z przebiegu krzywych wyznaczonych na podstawie związku (28) wynika, że wzór ten może być stosowany dla wartości r/R zmieniających się od 0,75 do 1,0. Wyniki obliczeń według związku (28) wykonane dla $Q/(kH^2) = 3,5$, przedstawione na rysunku 4 potwierdzają zgodność ze związkiem (24), dla relacji $R/r = 1,0$.

Praktycznie największe zastosowanie będą miały wzory ważne dla małych wartości r_0/R . Średnice studni szybowych zwykle stosowane wynoszą 1,5–2,5 m, lecz wykonywane są też studnie o większych średnicach (Wieczysty 1982).

Studnie wiercone mają mniejsze średnice, najczęściej stosowane wynoszą od ok. 0,1 do 0,5 m. Zasięgi krzywych depresji są tym większe im większa jest depresja studni tj. wielkość $(R - h_0)$ oraz im większy jest współczynnik filtracji gruntu warstwy wodonośnej. Małe wartości zasięgu R wystąpią więc w przypadku małych wartości depresji studni i jednocześnie małych przewodności gruntu warstwy wodonośnej.

Podsumowanie i wnioski

Wykonane obliczenia pozwalają na ustalenie zakresu stosowania poszczególnych zależności. I tak zależność uzyskaną przy założeniu stałego średniego spadku krzywej depresji w postaci związku (7) lub (23) można stosować dla stosunkowo dużych wartości promienia studni tak, by spełniony był warunek $r_0/R > 0,5$.

Związek (18), otrzymany z zależności (5), przy przyjęciu miąższości warstwy wodonośnej jako średniej z wysokości h_0 i H , ma zastosowanie, gdy promień studni

$r_0 > r_z$, przy czym wielkość r_z wyznacza się ze związku (26). W przypadku $r_0 < r_z$ można w przybliżeniu przyjąć we wzorze (18) $r_0 = r_z$.

Zależność (21) uzyskana także z zależności (5), lecz przy założeniu miąższości warstwy wodonośnej równej wysokości położenia krzywej depresji w odległości r od studni, z której oblicza się czas dopływu, daje dobre rezultaty dla relacji $r/R \leq 0,5$.

Wzory (22) i (28) powstałe przy przyjęciu miąższości warstwy wodonośnej równej wysokości położenia krzywej depresji odpowiednio w odległości $0,5R$ i $0,75R$ od studni mogą być stosowane przy spełnieniu warunku $0,5 \leq r/R \leq 0,75$ w przypadku związku (22) i $0,75 < r/R \leq 1,0$ w przypadku zależności (28).

Praktycznie największe zastosowanie będą miały wzory ważne dla małych wartości relacji r_0/R . Średnice studni szybowych zwykle stosowane wynoszą $1,5 \div 2,5$ m, lecz wykonywane są studnie o większych średnicach (Wieczysty 1982).

Studnie wiercone mają mniejsze średnice, najczęściej stosowane wynoszą od

ok. 0,1 do 0,5 m. Zasięgi krzywych depresji są tym większe, im większa jest depresja studni tj. wielkość $(H-H_0)$ oraz im większy jest współczynnik filtracji gruntu warstwy wodonośnej. Małe wartości zasięgu R wystąpią więc w przypadku większych depresji wartości studni i jednocześnie małych porowatości gruntu warstwy wodonośnej.

Literatura

- CASTANY G. 1967: *Traité pratique des eaux souterraines*, Dunod, Paris.
- KOWALSKI J. 1987: *Hydrogeologia z podstawami geologii*. PWN, Warszawa.
- LUCKNER L., SZESTAKOW W.M. 1986: *Modelowanie migracji podziemnych wód*. Nedra, Moskwa.
- MACIOSZCZYK T., RODZUCH A., FRĄCZEK E. 1993: *Projektowanie stref ochronnych źródeł i ujęć wód podziemnych*. MOSZNIŁ, Warszawa.
- WIECZYSTY A. 1982: *Hydrogeologia inżynierska*. PWN, Warszawa.

Adres autora

L. Rembeza
Katedra Budownictwa Wodnego, AR Poznań
60-625 Poznań, ul. Wojska Polskiego 73A