

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ „МЕХАНИЗМ ПОДЪЕМА ГРУЗА – ГРУЗ – ТРАНСПОРТНОЕ СРЕДСТВО”

*Вячеслав Ловейкин, Юрий Ромасевич, Василий Голдун*

*Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины*

*Украина, г. Киев, ул. Героев Обороны, 15*

*Vyatcheslav Loveikin, Yuriy Romasevich, Vasilii Goldun*

*National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine*

*Str. Heroiv Oborony, 15, Kiev, Ukraine*

**Аннотация.** Построена динамическая модель системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”. На основании использования уравнений Лагранжа второго рода найдены уравнения движения отдельных элементов системы. Математическая модель системы является многоэтапной. Для всех элементов системы записаны начальные условия их движения, которые совместно с уравнениями движения позволяют провести динамический анализ работы исследуемой системы.

**Ключевые слова:** грузоподъемный кран, груз, моделирование, транспортное средство, уравнения движения.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Для того, чтобы определить наибольшие нагрузки в элементах некоторой динамической системы необходимо провести ее динамический анализ [1]. Для этого сначала нужно построить динамическую модель системы, а потом, на ее основе, – математическую.

Математическая модель исследуемой системы является системой дифференциальных уравнений, решая которые можно получить функции изменения усилий в элементах механизма подъема груза и транспортного средства.

Анализ найденных усилий дает возможность установить основные факторы их возникновения.

Меняя эти факторы можно целеустремленно уменьшать нежелательные динамические нагрузки в элементах механизма подъема груза, моста крана, и в элементах подвески транспортного средства.

В конечном итоге это приводит к повышению их надежности и долговечности.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В работах [2-8] проведены исследования динамики движения механизма подъема груза. Характерной чертой этих исследований является то, что динамическая модель системы не учитывает основание, на которое выполняется посадка груза или с которого груз поднимается. Это может привести к неоправданно большим расчетным динамическим усилиям в элементах механизма подъема груза. Уточнение расчетов требует уточненной динамической модели крана, которая отражала бы взаимодействие груза и основы.

### ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель приведенной работы – разработать математическую модель динамики движения системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”.

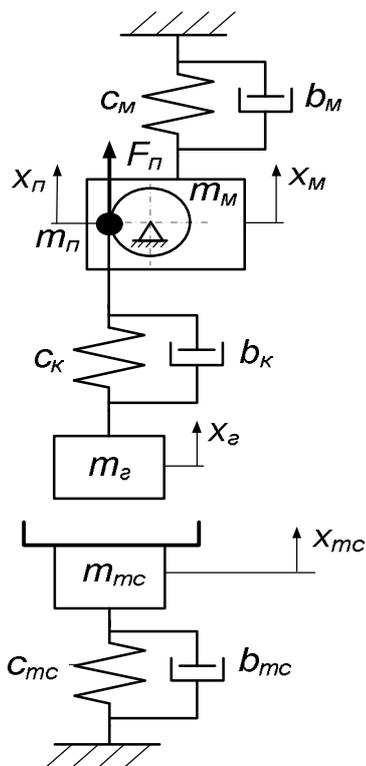
Для достижения поставленной цели ставятся такие задачи: 1) разработать динамическую модель исследуемой системы; 2) на основании уравнения Лагранжа второго рода синтезировать математическую модель движения системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Первым этапом в процессе динамического анализа любой механической системы есть построение ее динамической модели [9-11]. Для этого необходимо выделить наиболее существенные факторы, которые влияют на динамику системы. При этом должны выполняться два главных требования [12]: динамическая модель должна быть не очень сложной и в достаточной мере адекватной

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ „МЕХАНИЗМ ПОДЪЕМА ГРУЗА – ГРУЗ – ТРАНСПОРТНОЕ СРЕДСТВО”

реальной технической системе. Укажем основные предположения, которые были приняты для построения динамической модели: 1) все элементы механизма подъема груза и транспортного средства есть абсолютно жесткими телами; 2) все элементы системы движутся в том числе осуществляют колебательные движения в вертикальной плоскости (рассматривается плоская задача); 3) приведенная жесткость грузовых канатов при подъеме и опускании груза меняется мало и потому она принимается постоянной величиной; 4) пренебрегаем весом каната; 5) момент сопротивления холостого хода механизма подъема груза принимается постоянной величиной; 6) радиус канатного барабана является постоянной величиной; 7) считаем, что нагрузочно-разгрузочные процессы проходят в помещении и потому действие ветра и других факторов не учитываем. Используя указанные предположения, была разработана динамическая модель системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”, которая показана на рис. 1.



**Рис. 1.** Динамическая модель системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”

**Fig. 1.** The dynamic model of the system „lifting mechanism - cargo - vehicle”

На рис. 1 использованы такие обозначения:  $c_{mз}$ ,  $c_k$ ,  $c_m$  – приведенные коэффициенты жесткости транспортного средства, грузовых канатов и моста крана соответственно;  $b_{mз}$ ,  $b_k$ ,  $b_m$  – приведенные коэффициенты диссипации подвески транспортного средства, грузовых канатов и моста крана соответственно;  $m_{mз}$ ,  $m_e$ ,  $m_n$ ,  $m_m$  – приведенные массы транспортного средства, груза, приводного механизма подъема груза и кранового моста соответственно;  $x_{mз}$ ,  $x_e$ ,  $x_n$ ,  $x_m$  – обобщенные координаты соответствующих масс;  $F_n$  – приведенное к барабану усилие привода механизма подъема груза.

В таблице 1 приведены численные значения параметров динамической модели, которые отвечают мостовому крану грузоподъемностью 20 тон [13] и прицепа МАЗ-938662 грузоподъемностью до 23750 кг.

**Таблица 1.** Параметры динамической модели системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”

**Table 1.** Parameters of the dynamic model of the "lifting mechanism – cargo – vehicle"

Наименование динамического параметра	Значение
Приведенная жесткость транспортного средства $c_{mз}$ , Н/м	$3,055 \cdot 10^6$
Приведенная жесткость грузовых канатов $c_k$ , Н/м	$10,844 \cdot 10^6$
Приведенная жесткость кранового моста $c_m$ , Н/м	$15,452 \cdot 10^6$
Приведенный коэффициент диссипации транспортного средства $b_{mз}$ , Н·с/м	$10 \cdot 10^3$
Приведенный коэффициент диссипации грузовых канатов $b_k$ , Н·с/м	$25 \cdot 10^3$
Приведенный коэффициент диссипации моста крана $b_m$ , Н·с/м	$10 \cdot 10^3$
Приведенная масса транспортного средства $m_{mз}$ , кг	7250
Приведенная масса груза $m_e$ , кг	20000
Приведенная масса привода механизма подъема груза $m_n$ , кг	415520
Приведенная масса кранового моста $m_m$ , кг	19300

Заметим, что из рис. 1 видно, что масса груза и транспортного средства не взаимодействуют между собой. Однако, как будет показано ниже, указанный случай относится к одному из этапов движения динамической системы. Для других этапов груз и транспортное средство осуществляют динамическое взаимодействие. Для приведенного усилия привода механизма подъема груза справедливая формула:

$$F_n = \frac{(M_{\text{дв}} - M_o) i_n n_{\text{пол}} \eta_{\text{пол}}}{R_{\text{б}}}, \quad (1)$$

где:  $M_{\text{дв}}$  – момент электродвигателя механизма подъема груза;  $M_o$  – момент сопротивления холостого хода механизма подъема груза;  $i_n$  – передаточное число механизма подъема груза;  $n_{\text{пол}}$  – кратность полиспаста механизма подъема груза;  $\eta_{\text{пол}}$  – КПД полиспаста механизма подъема груза.

По известной динамической модели системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство” составим ее математическую модель. Сначала найдем математическую модель для режима подъема груза. Для этого используем уравнение Лагранжа второго рода [1]. Для динамической модели, показанной на рис. 1, имеем:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mn}}{\partial \dot{x}_n} \right) - \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_n} = F_n - \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial x_n} - \frac{\partial R_{mn}}{\partial \dot{x}_n}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mn}}{\partial \dot{x}_m} \right) - \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_m} = F_m - \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial x_m} - \frac{\partial R_{mn}}{\partial \dot{x}_m}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mn}}{\partial \dot{x}_g} \right) - \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_g} = F_g - \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial x_g} - \frac{\partial R_{mn}}{\partial \dot{x}_g}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mc}}{\partial \dot{x}_{mc}} \right) - \frac{\partial T_{mc}}{\partial x_{mc}} = F_{mc} - \frac{\partial \Pi_{mc}}{\partial x_{mc}} - \frac{\partial R_{mc}}{\partial \dot{x}_{mc}}, \end{cases} \quad (2)$$

где:  $T_{mn}$ ,  $T_{mc}$  – кинетические энергии механизма подъема груза и колебаний транспортного средства соответственно;  $\Pi_{mn}$ ,  $\Pi_{mc}$  – потенциальные энергии механизма подъема груза и транспортного средства соответственно;  $R_{mn}$ ,  $R_{mc}$  – диссипативные функции Релея механизма подъема груза и транспортного средства соответственно;  $F_m$ ,  $F_g$  и  $F_{mc}$  – обобщенные силы, которые действуют на мост крана, груз и транспортное средство соответственно.

Найдем функции, которые входят в систему уравнений (2):

$$\begin{cases} T_{mn} = \frac{1}{2} (m_n \dot{x}_n^2 + m_m \dot{x}_m^2 + m_g \dot{x}_g^2), \\ T_{mc} = \frac{1}{2} m_{mc} \dot{x}_{mc}^2. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \Pi_{mn} = \frac{1}{2} (c_m x_m^2 + c_k (x_n + x_m - x_g)^2), \\ \Pi_{mc} = \frac{1}{2} c_{mc} x_{mc}^2. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} R_{mn} = \frac{1}{2} (b_m \dot{x}_m^2 + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_g)^2), \\ R_{mz} = \frac{1}{2} b_{mc} \dot{x}_{mc}^2. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} F_m = -m_m g, \\ F_g = -m_g g, \\ F_{mz} = -m_{mc} g. \end{cases} \quad (6)$$

Найдем отдельные члены уравнений в системе (2):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mn}}{\partial \dot{x}_n} \right) = m_n \ddot{x}_n, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mn}}{\partial \dot{x}_m} \right) = m_m \ddot{x}_m, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mn}}{\partial \dot{x}_g} \right) = m_g \ddot{x}_g, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{mc}}{\partial \dot{x}_{mz}} \right) = m_{mc} \ddot{x}_{mz}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\partial T_{mn}}{\partial x_n} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_m} = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_g} = \frac{\partial T_{mz}}{\partial x_{mz}} = 0. \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial x_n} = -\frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial x_g} = c_k (x_n + x_m - x_g), \\ \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial x_m} = c_k (x_n + x_m - x_g) + c_m x_m, \\ \frac{\partial \Pi_{mc}}{\partial x_{mc}} = c_{mc} x_{mc}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{mn}}{\partial \dot{x}_n} = -\frac{\partial R_{mn}}{\partial \dot{x}_g} = b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_g), \\ \frac{\partial R_{mn}}{\partial \dot{x}_m} = b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_g) + b_m \dot{x}_m, \\ \frac{\partial R_{mc}}{\partial \dot{x}_{mc}} = b_{mc} \dot{x}_{mc}. \end{cases} \quad (10)$$

Подставляя выражения из систем (7) – (10) в систему уравнений (2) получим окон-

чательно уравнение движения динамической системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”:

$$\begin{cases} m_n \ddot{x}_n + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_2) + \\ + c_k (x_n + x_m - x_2) = F_n, \\ m_m (\ddot{x}_m + g) + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \\ - \dot{x}_2) + b_m \dot{x}_m + c_k (x_n + x_m - \\ - x_2) + c_m x_m = 0, \\ m_z (\ddot{x}_z + g) - b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \\ - \dot{x}_2) - c_k (x_n + x_m - x_2) = 0, \\ m_{mc} (\ddot{x}_{mc} + g) + b_{mc} \dot{x}_{mc} + c_{mc} x_{mc} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Полученная математическая модель справедлива для нулевых начальных условий, когда упруго-вязкие связи не нагружены. Однако, на практике это невозможно, поскольку на эти связи всегда действует сила веса отдельных масс системы. Кроме того, система дифференциальных уравнений (11) справедлива для тех случаев, когда груз и транспортное средство не взаимодействуют между собой. Это случаи колебаний транспортного средства после отрыва от него массы груза (подъем груза), а также этап опускания груза к моменту посадки его на транспортное средство.

Итак, будем использовать систему дифференциальных уравнений (11) как „опорную”. Она дает возможность определить направление действия усилий в системе. С ее помощью можно выявлять и исправлять грубые ошибки в обобщенной математической модели системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”, которая будет разработана ниже. Для построения полной динамической картины процессов опускания и поднимания груза необходимо разделить эти процессы на определенные этапы. Дадим детальное описание этих этапов.

Первый этап подъема груза происходит пока идет выборка слабины каната. При этом движется лишь приведенная масса привода. Этот этап характеризуется нулевыми начальными условиями:

$$x_n(0) = \dot{x}_n(0) = 0. \quad (12)$$

Математическая модель первого этапа записывается таким образом:

$$m_n \ddot{x}_n = F_n. \quad (13)$$

На втором этапе происходит натяжение каната до усилия веса груза. На этом этапе движутся все массы динамической системы. Однако, поскольку груз находится на транспортном средстве, то приведенные массы груза и транспортного средства движутся синхронно, то есть для этого этапа справедливо уравнение:

$$x_z = x_{mc}. \quad (14)$$

Запишем начальные условия для движения приведенных масс груза и моста:

$$\begin{cases} x_z(t_1) = -\frac{(m_z + m_{mc})g}{c_{mc}}, \\ \dot{x}_z(t_1) = 0, \\ x_m(t_1) = -\frac{m_m g}{c_m}, \\ \dot{x}_m(t_1) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где:  $t_1$  – продолжительность первого этапа.

Конечные условия движения приведенной массы привода для первого этапа являются начальными условиями для второго. Математическая модель движения масс на втором этапе состоит из трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_n \ddot{x}_n + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_z) + c_k \times \\ \times ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - \\ - (x_z - x_z(t_1))) = F_n, \\ m_m (\ddot{x}_m + g) + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_z) + \\ + b_m \dot{x}_m + c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - \\ - x_m(t_1)) - (x_z - x_z(t_1))) + c_m x_m = 0, \\ (m_z + m_{mc})(\ddot{x}_z + g) - b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \\ - \dot{x}_z) - c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - \\ - (x_z - x_z(t_1))) + b_{mc} \dot{x}_z + c_{mc} x_z = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Третье уравнение системы (16) отображает тот факт, что на груз действует упруго-вязкое усилие подвески транспортного средства. В системе уравнений (16) присутствуют начальные условия движения груза, привода и моста. Действительно, на этом этапе усилие натяжения каната начинает возрастать от нулевого значения. Для обеспечения этого условия обобщенные координаты груза, привода и моста отнимаются от их начальных условий (15).

Концом второго этапа полагается момент отрыва груза от поверхности транспортного средства. Этот же момент означает начало

третьего этапа. Начальными условиями для этого этапа есть конечные условия для второго этапа. Уравнение движения, которые описывают движение всех четырех элементов динамической системы, с точностью до начальных условий совпадает с „опорной” системой дифференциальных уравнений (11):

$$\begin{cases} m_n \ddot{x}_n + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_z) + c_k \times \\ \times ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - \\ - (x_z - x_z(t_1))) = F_n, \\ m_m (\ddot{x}_m + g) + b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_z) + \\ + b_m \dot{x}_m + c_k ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - \\ - x_m(t_1)) - (x_z - x_z(t_1))) + c_m x_m = 0, \\ m_z (\ddot{x}_z + g) - b_k (\dot{x}_n + \dot{x}_m - \dot{x}_z) - c_k \times \\ \times ((x_n - x_n(t_1)) + (x_m - x_m(t_1)) - \\ - (x_z - x_z(t_1))) = 0, \\ m_{mc} (\ddot{x}_{mc} + g) + b_{mc} \dot{x}_{mc} + c_{mc} x_{mc} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

На четвертом этапе движения динамической системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство” происходит выключения электродвигателя и наложение тормозов. При этом считаем, что усилие  $F_n$  меняется скачкообразно, поскольку продолжительность наложения тормозов с электромагнитами переменного тока не превышает 0,015-0,02 секунды [14, 15]. Тормозной момент, который пропорциональный тормозному усилию, для четвертого этапа определяется по формуле [16]:

$$M_m = K_3 M_g \eta_{mex}, \quad (18)$$

где:  $K_3$  – коэффициент запаса (для среднего режима работы 5М механизма подъема груза  $K_3=2$ );  $M_g$  – статический момент при опускании номинального груза (20 тонн) приведенный к валу двигателя ( $M_g=834$  Нм);  $\eta_{mex}$  – номинальный КПД механизма ( $\eta_{mex}=0,9$ ).

Полученная многоэтапная математическая модель будет использована для нахождения наиболее значимых динамических факторов при движении элементов системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”.

Как и процесс подъема, который состоит с четырех этапов, опускание груза на транспортное средство – это также четырех-этапный процесс. На первом этапе происходит пуск двигателя и его работа со скоро-

стью большей, чем скорость идеального холостого хода. Этот этап характеризуется движением приведенных масс привода, кранового моста и груза. Начальные условия для этого этапа:

$$\begin{cases} x_m(0) = -\frac{(m_z + m_{mc})g}{c_{mc}}, \\ \dot{x}_m(0) = 0; \\ x_z(0) = x_m(0) - \frac{m_z g}{c_k}, \\ \dot{x}_z(0) = 0, \\ x_n(0) = 0, \\ \dot{x}_n(0) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Уравнение движения приведенных масс на первом этапе записаны в виде системы уравнений (17) за исключением последнего уравнения, поскольку полагаем, что транспортное средство находится в состоянии покоя. Концом первого этапа является момент времени, когда груз дотронется к поверхности транспортного средства. На втором этапе подвеска транспортного средства нагружается силой веса груза (все приведенные массы двигаются). Начальными условиями движения приведенных масс груза, привода и кранового моста для второго этапа есть конечные условия для первого. Поскольку движение груза и транспортного средства есть синхронным, то для второго, третьего и четвертого этапов справедливо уравнение (14). Математическая модель этапа является системой дифференциальных уравнений (16). Во время этого этапа сила веса груза полностью „передается” от грузовых канатов на подвеску транспортного средства.

Третий этап движения характеризуется сбеганием каната с барабана для того, чтобы можно было снять груз с крюка (создание слабины каната).

Начальными условиями движения приведенных масс для третьего этапа есть конечные условия для второго. Движение масс исследуемой динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_n \ddot{x}_n = F_n, \\ m_m (\ddot{x}_m + g) + b_m \dot{x}_m + c_m x_m = 0, \\ (m_z + m_{mc})(\ddot{x}_z + g) + b_{mc} \dot{x}_z + \\ + c_{mc} (x_z - x_z(t_1)) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ „МЕХАНИЗМ ПОДЪЕМА ГРУЗА – ГРУЗ – ТРАНСПОРТНОЕ СРЕДСТВО”

где:  $x(t_1)$  – положение груза в конце первого этапа.

На четвертом этапе происходит наложение тормозов и остановка двигателя. На протяжении этого этапа осуществляют движение все приведенные массы. Начальными условиями движения приведенных масс для четвертого этапа есть конечные условия для третьего. Динамика движения масс на этом этапе описывается системой дифференциальных уравнений (20) при условии, что приводное усилие  $F_n$  меняется на тормозное. Момент окончания четвертого этапа определяется условием остановки двигателя.

Для проведения анализа движения исследуемой динамической системы необходимо задать характер изменения приводного усилия. Механизм подъема груза крана, который принят в расчетах, оборудованный асинхронным электродвигателем МТВ611-10.

Крутящий момент такого двигателя, без учета составляющих электромагнитного момента, которые вызваны свободными токами в двигателе, описывается уравнением Клосса [17]:

$$M_{\partial} = \frac{2M_{\max} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} s_{кр}\right)}{\frac{\omega_0 - \omega}{s_{кр} \omega_0} + \frac{s_{кр} \omega_0}{\omega_0 - \omega} + 2 \frac{R_1}{R_2} s_{кр}}, \quad (21)$$

где:  $M_{\max}$  – максимальный (критический) момент двигателя;  $\omega$  – угловая скорость двигателя;  $R_1$  и  $R_2$  – статорный и роторный приведенные активные сопротивления двигателя соответственно;  $s_{кр}$  – критическое скольжение двигателя;  $\omega_0$  – скорость идеального холостого хода двигателя.

Для двигателя МТВ611–10 в таблице 2 приведем его характеристики [18].

Анализ выражения (21) показывает, что крутящий момент зависит от угловой скорости ротора двигателя нелинейно.

Аналитическое интегрирование систем дифференциальных уравнений (13), (16), (17) поэтому невозможно.

Для того, чтобы найти решение систем этих уравнений целесообразно использовать численный метод Рунге-Кутты [19], который реализован в программном продукте Mathematica [20].

**Таблица 2.** Основные характеристики двигателя МТВ611-10 механизма подъема груза

**Table 2.** Main characteristics of the engine MTV611-10 load lifting mechanism

Наименование параметра	Значение
Номинальная мощность $P_{ном}$ , кВт	45
Номинальная скорость $n_{ном}$ , об/мин	575
Статорное приведенное активное сопротивление двигателя $R_1$ , Ом	0,087
Роторное приведенное активное сопротивление двигателя $R_2$ , Ом	0,027
Статорное приведенное индуктивное сопротивление двигателя $X_1$ , Ом	0,189
Роторное приведенное индуктивное сопротивление двигателя $X_2$ , Ом	0,046

## ВЫВОД

В приведенной работе построена четырехмассовая динамическая модель системы „механизм подъема груза – груз – транспортное средство”, в которой учтено упругие и вязкие свойства кранового моста, каната и подвески транспортного средства. Разработаны математические модели процессов подъема и опускания груза на транспортное средство. Математические модели каждого процесса состоят из четверых этапов. Для каждого из этапов найдены дифференциальные уравнения, которые описывают движение отдельных элементов исследуемой системы и их начальные условия движения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Litvinov O. 2006: Towards the dynamic calculation of machines / O. Litvinov // MOTROL. – 8A – 210–223.
2. Komarov M.S. 1969: Dinamika gruzopodnyomnih machin / M.S. Komarov – M.: Mashinostroenie. – 206.
3. Kazak S.A. 1968: Dinamika mostovykh kranov / S.A. Kazak – M.: Mashinostroenie. – 331.

4. Gohberg M.M. 1969: Metallicheskie konstruksii podemno-transportnyh mashin / M.M. Gohberg. – M. Mashinostroenie – 520.
5. Shefler M. 1981: Gruzopodyomnie krany / M. Shefler, H. Dresing, F. Kurt. – Kniga 2. – M.: Mashinostroenie. – 287.
6. Gaidamaka V.F. 1989: Gruzopodyomnie machiny / V.F. Gaidamaka – K.: Vyscha shkola. – 328.
7. Lobov N.A. 1987: Dinamika gruzopodyomnih kranov / N.A. Lobov. – M.: Mashinostroenie. – 160.
8. Grigorov O.V. 1995: Sovershenstvovanie rabochih karakteristik kranovyh mehanizmov: diss. na soisk. step. doktora tehn. nauk / Grigorov Otto Vladimirovich. – H. – 386.
9. Chovnyuk Yu.V. 2011: Utochnena dynamichna model ruhu vizka z vantazhem na gnuchkomu pidvisi / Yu.V. Chovnyuk // MOTROL. – 13B – 130–137.
10. Chovnyuk Yu.V. 2011: Bagatomasova model dymaniki ruhu kormozmishuvacha gvintovogo typu zi zminnym oporom / Yu.V. Chovnyuk, A. Yavorska // MOTROL. – 13B – 124–129.
11. Loveikin V.S. 2011: Doslidzenny dinamiki pusku skrebkovogo konveera zi zminnym navantazhenniam v protsesi pusku / V.S. Loveikin, O. Kostyna // MOTROL. – 13B – 42–48.
12. Loveikin V.S. 1998: Teoria tehnychnykh sistem / V.S. Loveikin, I.I. Nazarenko, O.G. Onischenko. – K.– Poltava: IZMN-PDTU. –175.
13. Budikov L.Ya. 1997: Mnogoparametricheskii analiz dynamiky gruzopodemnykh kranov mostovogo tipa / L.Ya. Budikov – Lugansk: VUGU. – 210.
14. Aleksandrov M.P. 1985: Tormoznye ustroystva: spravochnik / M.P. Aleksandrov, A.G. Lysiakov, V.N. Fadeev. – M.: Mashinostroenie. – 312.
15. Yaure A.G. 1988: Kranoviy elektroprivod: spravochnik / A.G. Yaure, E.M. Pevzner. – M.: Energoatomizdat. – 344.
16. Gerasymiak R.P. 2008: Analiz i sintez kranovykh elektromehanycheskikh sistem / R.P. Gerasymiak, V.A. Lestchev. – Odessa: SMIL. – 192.
17. Chilikin M.G. 1981: Obschiy kurs elektroprivoda / M.G. Chilikin, A.S. Sandler. – M.: Energoizdat. – 576.
18. Veshenevsky S.N. 1977: Harakteristiki dvigatelei v elektroprivode / S.N. Veshenevsky. – M.: Energia – 432.
19. Formalev V.F. 2004: Chislennyye metody / V.F. Formalev, D.L. Reviznikov. – M.: Fizmatlit. – 400.
20. Diakonov V.P. 2004: Mathematica 4.1/4.2/5.0 v matematychnykh i nauchno-tehnychnykh paschetah / V.P. Diakonov. – M.: SOLON–Press. – 696.

**MATHEMATICAL MODELING SYSTEMS  
„HOISTING MECHANISM - LOAD -  
VEHICLE”**

**Summary.** The dynamic models of the system „lifting mechanism – cargo – vehicle” have been developed. The equations of motion of the system components have been found with using of the Lagrange equations of the second kind. A mathematical model of the system is a multi-stage. For the movement of all elements of the system recorded the initial conditions of their movement, which, together with the motion equations allow carry out a dynamic analysis for a studied system.

**Key words:** load-lifting crane, load, modeling, vehicle, equation of movement.