MOTROL, 2012, 14 - №3, 158-163

УДК 621.873

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМА РАЗГОНА ОДНОМАССОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Вячеслав Ловейкин, Юрий Ромасевич

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
Украина, г. Киев, ул. Героев Обороны, 15

Аннотация. В данном исследовании приведено решение задачи оптимизации режима разгона одномассовой динамической системы. Оптимизация осуществляется с помощью методов вариационного исчисления. Для учета ограничений наложенных на режим движения системы используется метод множителей Лагранжа. Проводится анализ влияния величины множителя Лагранжа на показатели движения системы.

Ключевые слова: динамическая система, вариационное исчисление, множитель Лагранжа.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Основная проблема при создании разных машин и механизмов – обеспечить повышение их производительности, надежности, точности и экономичности по отношению к известным конструкциям. Удовлетворить эти высокие требования можно только при тщательном анализе режимов движения механизмов машин. От избранного режима движения механизма зависит продолжительность переходных процессов и всего цикла движения, которая влияет на производительность машины. Уменьшить продолжительность цикла движения машины можно путем выбора такого режима, при котором движение осуществлялось бы при максимально допустимых значениях кинематических характеристик и динамических нагрузках основных элементов.

Большинство механизмов имеют неизменный момент инерции или массу, потому их движение можно описать простейшим дифференциальным уравнением второго порядка. Для этого все массы и моменты инерций сводятся к валу двигателя, а в качестве обобщенной координаты выбирают угловое перемещение вала двигателя [1]. Однако приведение масс и моментов инерций можно выполнять также к элементам которые двигаются поступательно, в этом случае обобщенная координата будет линейным перемещением рабочего органа машины. Построив математическую модель машины можно оптимизировать ее режим движения.

На режимы движения механизмов накладываются ограничения интегрального и терминального типов. Терминальные ограничения характеризуют значение обобщенной координаты системы и ее высших производных по времени в определенные моменты времени. Эти ограничения можно удовлетворить постановкой краевых условий в процессе оптимизации режима движения.

Учет интегральных ограничений требует определенным образом модифицировать подынтегральную функцию критерия оптимизации с помощью использования множителей Лагранжа [2]. Эти множители показывают „цену" увеличения оптимизационного критерия по сравнению с величиной критерия без учета ограничений.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Существует несколько математических методов оптимизации переходных режимов движения динамических систем: классическое вариационное исчисление [3], принцип максимума Л.С. Понтрягина [4], динамическое программирование [5]. Кроме указанных методов используются также итерационные и приближенные процедуры оптимизации [6-14]. Для синтеза оптимального управления с учетом ограничений интегрального типа можно использовать любой из указанных методов.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью приведенного исследования является оптимизация режима разгона одномассовой динамической системы по интегральному оптимизационному критерию с учетом ограничений на среднее значение энергии ускорений. Для достижения поставленной цели необходимо выполнить такие задачи: 1) составить уравнение Эйлера-Пуассона для интегрального критерия с учетом принятых ограничений; 2) исследовать влияние величины множителя Лагранжа на показатели качества движения динамической системы.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Движение большого количества машин и механизмов может быть описано с помощью простейшего дифференциального неоднородного уравнения второго порядка:

$$m\ddot{x} = F - W, \tag{1}$$

где x – обобщенная координата (линейное перемещение машины); m – сведенная к поступательному движению масса машины и ее приводного механизма; F – приведенная к поступательному движению сила приводного механизма; W – сила сопротивления перемещению машины.

Будем рассматривать режим разгона динамической системы. В этом случае краевые условия можно представить таким образом [15]:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(T) = v; \quad \ddot{x}(T) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

где T – продолжительность движения динамической системы; $x(T)$ – координата динамической системы в конце разгона.

Для оптимизации режима движения динамической одномассовой системы используем такой интегральный критерий, который отображает среднее за время движения значение кинетической энергии системы:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{m}{2}\dot{x}^2 dt \to \min. \tag{3}$$

Минимизация этого критерия позволяет уменьшить энергетические затраты машины или механизма на протяжении разгона.

Наложим на оптимальный режим движения системы ограничения в виде среднего значения динамической составляющей момента приводного механизма. При этом экстремаль функционала (3) должна удовлетворять равенству:

$$\int_0^T \frac{m}{2}\ddot{x}^2 dt = \frac{2mv^2}{3T}k, \tag{4}$$

где k – некоторый коэффициент. При k=1 достигается минимум критерия (4). Очевидно, что одна и та самая экстремаль не может доставлять экстремум обеим интегралам (3) и (4). Итак, всегда $k > 1$.

Поставленная задача относится к вариационным, а именно: необходимо исследовать на условный экстремум интегральный функционал с учетом ограничений (4). Для ее решения необходимо определенным образом сформировать подынтегральное выражение нового функционала и найти его экстремум без ограничений. Запишем подынтегральное выражение нового функционала:

$$f = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{\lambda^2}\frac{m}{2}\ddot{x}^2, \tag{5}$$

где λ - некоторый коэффициент (множитель $\frac{1}{\lambda^2}$ в выражении (5) есть не что иное как множитель Лагранжа).

Для нахождения минимума интегрального функционала с подынтегральным выражением (5) используем необходимое условие экстремума – уравнение Эйлера-Пуассона, которое в данном случае запишется таким образом:

$$\overset{IV}{x} - \lambda^2\ddot{x} = 0. \tag{6}$$

Решением данного однородного дифференциального уравнения при принятых краевых условиях (2) есть выражение:

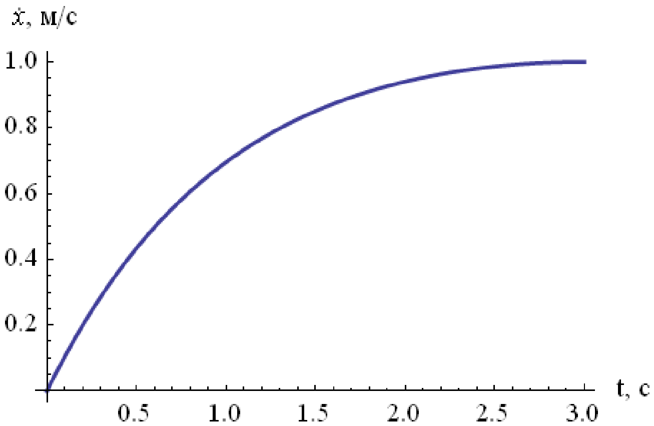
$$x = \frac{-vCosh\left(\frac{T\lambda}{2}\right)^2 \left(Sinh(T\lambda) + Sinh((t-T)\lambda) - t\lambda Cosh(T\lambda)\right)}{2\lambda}. \qquad (7)$$

Представим также высшие производные выражения (7) по времени:

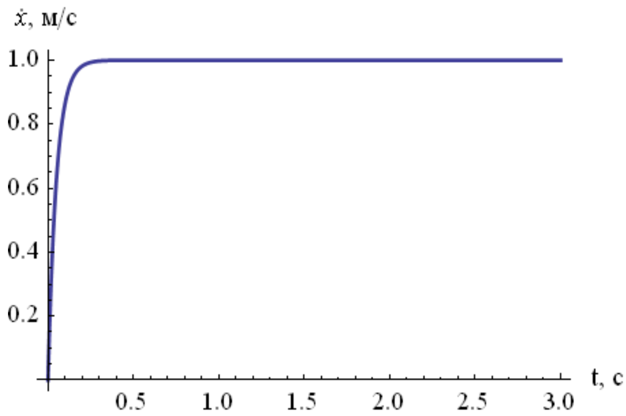
$$\ddot{x} = \frac{-vSinh((t-T)\lambda)}{1 - Cosh(T\lambda)}. \qquad (8)$$

$$\dot{x} = v + \frac{v - vCosh((t-T)\lambda)}{Cosh(T\lambda) - 1}, \qquad (9)$$

Приведем графики функций скорости и ускорения динамической системы при разных значениях коэффициента λ.

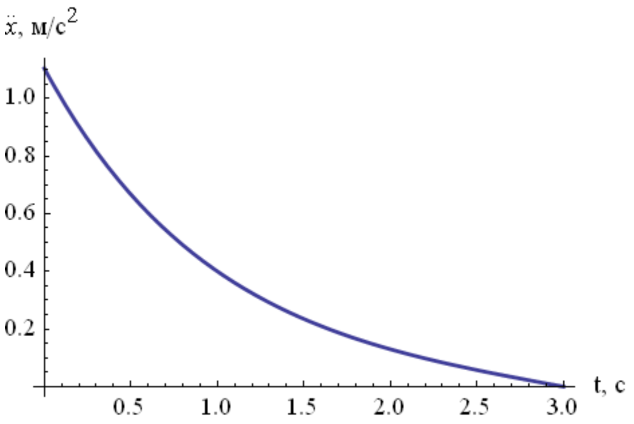


а)

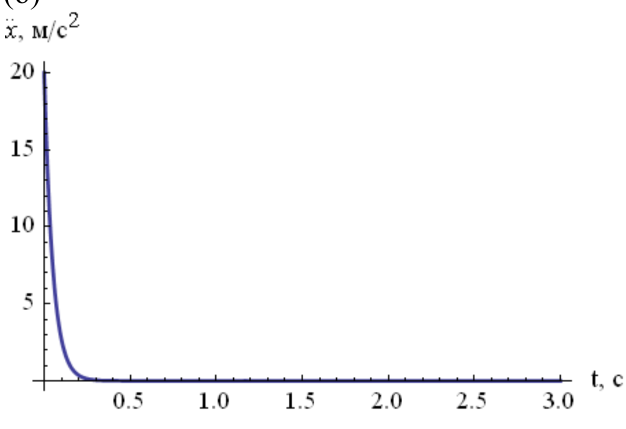


б)

Рис. 1. Графики функций скорости движения динамической системы при λ=1 (а) и при λ=20 (б)



а)



б)

Рис. 2. Графики функций ускорения динамической системы при λ=1 (а) и при λ=20 (б)

Недостатком синтезированного закона движения динамической системы есть большое значение ускорения в начале движения. Необходимо обеспечить такой закон движения системы, при котором начальное ускорение будет не больше заданного значения. Для этого необходимо решить уравнение:

$$\ddot{x}(0) = a_{доп}, \qquad (10)$$

где $a_{\ddot{a}\ddot{i}}$ – допустимое ускорение системы. Уравнение (10) в развернутом виде можно записать таким образом:

$$v\lambda Coth\left(\frac{T\lambda}{2}\right) = a_{доп}. \qquad (11)$$

Уравнение (11) является трансцендентным уравнением, поэтому для его решения используем приближенный метод (метод простых итераций) [16].

Алгоритм метода состоит в многократном выполнении циклов однотипных расчетов. Такие расчеты называются телом цикла. Ниже приведено тело цикла, которое используется для приближенного нахождения неизвестной величины λ:

1) расчеты

$\lambda^* = \dfrac{a_{äïî}\, v}{Coth\left(\dfrac{T\lambda}{2}\right)}$. ($\lambda^*$ – воображаемый коэффициент введен для выполнения ЭВМ логических и арифметических операций);

2) очистка λ;

3) $\lambda = \lambda^*$;

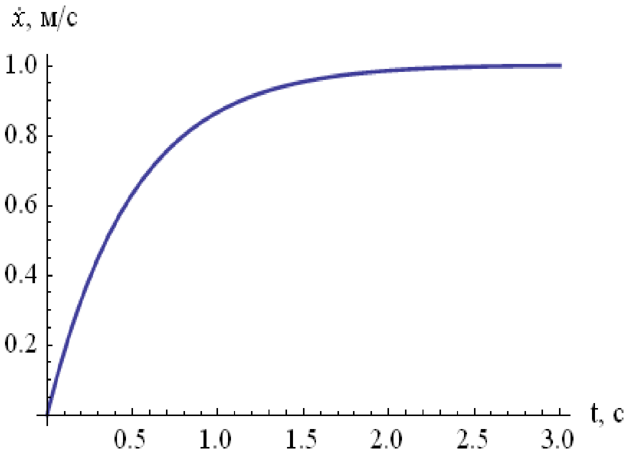
4) очистка λ^*.

После каждого прохождения тела цикла проверяется условие:

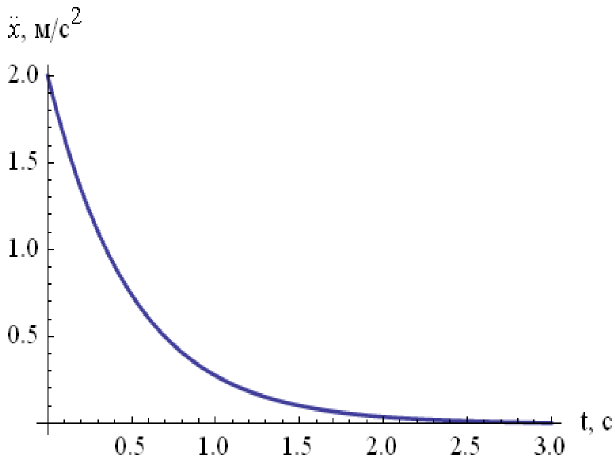
$$\lambda_i - \lambda_{i-1} > \Delta\lambda, \qquad (12)$$

где λ_i, λ_{i-1} – значение неизвестного коэффициента на i-том и на (i-1)-м прохождении тела цикла; $\Delta\lambda$ – заведомо установленная абсолютная погрешность определения неизвестного коэффициента. Если условие (12) выполняется, то необходимо продолжать выполнение расчетов. Если условие (12) не выполняется, то это означает, что получено достаточно точное значение коэффициента λ.

Приведем графики функций скорости движения и ускорение динамической системы, которые получены с учетом условия (11) (рис. 3).



а)



б)

Рис. 3. Графики функций скорости (а) и ускорения (б) динамической системы при выполнении условия (11) при $a_{доп} = 2\ м/с^2$

Нахождение неизвестного множителя Лагранжа λ можно также выполнять другим способом. Приведем описание этого способа. Для этого необходимо решить следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{1}{32} mv^2 \lambda \mathrm{Cosh}\left(\frac{T\lambda}{2}\right)^2 (\mathrm{Sinh}(2T\lambda) - 2T\lambda) = \frac{2mv^2}{3T} k. \qquad (13)$$

Выясним сущность данного уравнения. Левая часть уравнения (13) показывает величину интеграла (4) при условии, что для его нахождения используется функция (9). Правая часть равенства (13) показывает произведение минимума интеграла (4) на некоторый коэффициент k. Таким образом, выражение (13) показывает во сколько раз необходимо увеличить минимум интеграла (4), чтобы получить значение этого же интеграла, но при использовании другой функции (не экстремали функционала (4)). Уравнение (13) решается аналогично предыдущему (11) численным методом. В результате получим соответствие между значением коэффициента k и величиной λ. На основе расчетов построим фазовый портрет движения динамической системы (рис. 4).

Для осуществления оптимального управления, которое в даном случае являється программным, необходимо использовать регулируемый привод [17, 18], который есть элементом мехатронной системы машины [19, 20]. Синтезированный оптимальный режим разгона одномассовой динамической системы можно использовать для различных производственных машин и механизмов, внешняя среда которых является детерминированной (сварочные роботы, краны-манипуляторы, экскаваторы и другие грузоподъемные и транспортирующие машины).

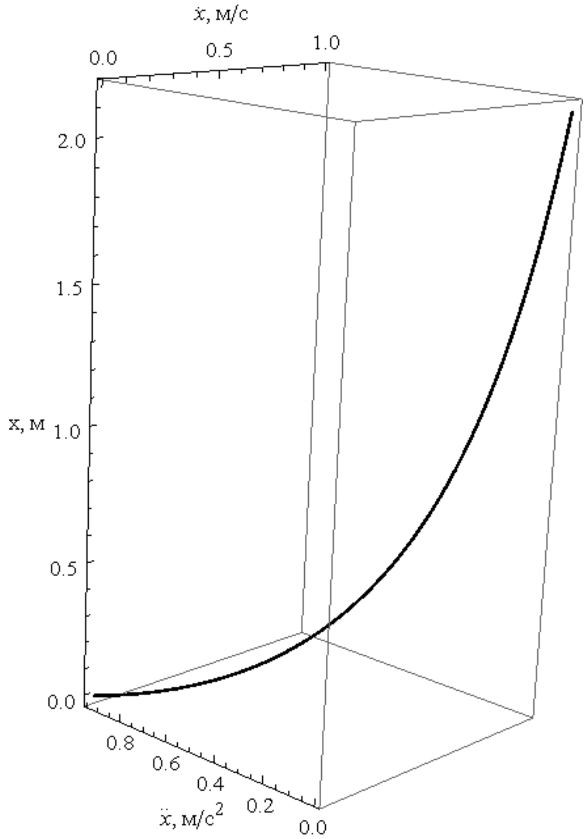


Рис. 4. Неклассический фазовый портрет динамической системы при выполнении условия (13)

ВЫВОД

Для оптимизации движения одномассовой динамической системы с учетом ограничений интегрального типа использовано вариационное исчисление, поскольку при этом задача на условный экстремум квадратичного функционала сводится к решению краевой задачи. Величину множителя Лагранжа можно определять разными способами в зависимости от того, какие условия ставятся к движению динамической системы. Однако следует заметить, что определение множителя Лагранжа связано с решением трансцендентного уравнения, которое выполняется численным методом и не дает универсального результата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oleg Litvinov. К динамическому расчету машин / Oleg Litvinov, Wojciech Tanaś // Motrol. Tom 2 A. 2006. – Lublin. – С. 210–223.
2. Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие для студентов факультета ВМиК МГУ. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. – 270 с.
3. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебн. для вузов / под ред. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. – 466 с.
4. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума

Понтрягина. Доказательство и приложения. – М.: Изд-во Факториал Пресс, 2006. – 144 с.
5. Щербина О.А. Методологические аспекты динамического программирования / Щербина О.А. // Динамические системы. Межведомственный научный сборник. – Вып. 22, 2007. – С. 21–36.
6. Ловейкін В.С. Синтез оптимальних режимів руху механізмів і машин прямим варіаційними методами / Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. – Вип. 144. Частина 3. Серія „Техніка та енергетика АПК". – 2010. – С. 32–42.
7. Сеньо П.С. Прямые интервальные методы решения вариационных задач и задач оптимального управления. // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – С. 44–50.
8. В. И. Гурман, И. В. Расина, А. О. Блинов. Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления // Программные системы: теория и приложения : электрон. научн. журн. 2011. № 2(6), с. 11–29. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2011_2_11-29.pdf.
9. Гурман В. И., Квоков В. Н., Ухин М. Ю. Приближенные методы оптимизации управления летательным апаратом // Автоматика и телемеханика, 2008, № 4. – С. 191–201.
10. Гурман В.И., Трушкова Е.А. Приближенные методы оптимизации управляемых процессов // Программные системы: теория и приложения, 2010. 1, № 4, http://psta.psiras.ru/read/psta2010_4_85-104.pdf
11. Улдаев А. С., Моржин О. В. Улучшение управлений в нелинейных системах на основе краевых задач // Известия Иркутского государственного университета. Математика, 2009. 2, № 1, с. 94–107.
12. Блинов А.О., Фраленко В.П. Многомерная аппрокимация в задачах моделирования и оптимизации // Автоматика и телемеханіка, 2009, № 4, С. 98–109.
13. Ловейкін В.С. Оптимізація керування рухом одномасових механічних механічних систем / Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. // Motrol. Tom 12 B. 2010. – Lublin. – С. 91–96.
14. Ловейкін В.С. Дискретний метод синтезу оптимальних керувань технічними системами / Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. – Вип. 107. – Том 2. – 2011. – С. 119–125.
15. Ловейкін В.С. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом / Ловейкін В.С., Ловейкін А.В., Ромасевич Ю.О. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2010. – № 1. – Т. 1. – С. 7–13.
16. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк Численные методы. Использование MATLAB / М.: Издательство: Вильямс, 2001. – 716 с.
17. Самосейко В.Ф. Теоретические основы управления электроприводом. – СПб.: Элмор, 2007. – 464 с.
18. Белов М.П. Автоматизированный електропривод типовых производственных механизмов и технологических комплексов / М.П. Белов, В.А. Новиков, Л.Н. Рассудов. – 3-е изд., испр. – М.: Издательский центр „Академия", 2007. – 576 с.
19. Губарев А.П. Механотроника: от структуры системы к алгоритму управления / А.П. Губарев, О.В. Левченко. – К.: НТУУ „КПИ", 2007. – 180 с.
20. Карнаухов Н.Ф. Электромеханические и мехатронные системы / Н.Ф. Карнаухов. – Ростов н/Дону: Феникс, 2006. – 320 с.

OPTIMIZATION OF REGIME OF ACCELERATION OF ONE-MASS DYNAMIC SYSTEM WITH INTEGRAL LIMITATIONS

Summary. In the given research the solution of problem of optimisation of regime of acceleration of one-mass dynamic system is resulted. Optimisation is carried out by means of variational calculus methods. For the account of limitations superimposed on regime of driving of system the Lagrangian multiplier method is used. The analysis of agency of magnitude of factor of Lagrange on parametres of driving of system is carried out.

Key words: dynamic system, variational calculus, multiplier of Lagrange.