

## **MATEMATYCZNY OPIS CHARAKTERYSTYKI KSZTAŁTU 3D OWOCU CYTRYNY**

Leszek Mieszkalski

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono matematyczny opis charakterystyki kształtu 3D owoców cytryn z wykorzystaniem krzywych Béziera i elipsoidy. Do modelowania wybrano cytryny odmian Eureka i Genoa. Kontur cytryny, który jest jej południkiem, opisano trzema połączonymi krzywymi Béziera. Podstawą do opisu konturów cytryn są ich fotografie w 10 położeniach, zmieniających się co 36°. Do modelowania kształtu cytryn jako alternatywną metodę zastosowano elipsoidę. Krzywe Béziera aproksymujące południki leżące na powierzchni cytryn oraz elipsoida są ich modelami 3D. Przedstawiona metoda z wykorzystaniem krzywych Béziera może być stosowana do matematycznego modelowania kształtu cytryn, natomiast elipsoida nie jest dobrym modelem do aproksymacji kształtu cytryn.

**Słowa kluczowe:** cytryna, kształt, krzywe Béziera, elipsoida, opis matematyczny, modele 3D

### **WSTĘP**

Cytryny są cennym surowcem dla przemysłu spożywczego [Perez-Perez i in. 2005, Iglesias i in. 2007]. Są wartościowe po względem odżywczym i leczniczym, zawierają witaminę C, B, ryboflawinę, wapń, fosfor, magnez, a także białko i węglowodany. Spożywanie cytryn zmniejsza ryzyko chorób serca i nowotworów. Ponadto cytryny działają jako środek antyseptyczny, ściągający i pobudzający [Hrishikesh-Tavanandi i in. 2013].

Khojastehnazhand i in. [2010] uważają, że w systemach dokładnej klasyfikacji i sortowania owoców cytrusowych podstawowymi parametrami identyfikacji są wielkość, kolor, kształt i wady zewnętrzne. Kształt w ocenie owoców oraz ich klasyfikowaniu i sortowaniu odgrywa ważną rolę [Mieszkalski 2011]. Ma również znaczenie przy wy-

---

Adres do korespondencji – Corresponding author: Leszek Mieszkalski, Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, ul. Nowoursynowska 164, 02-787 Warszawa, e-mail: mieszko@poczta.fm

korzystaniu systemów wizyjnych. Moreda i in. [2012] oraz Kakadiya i in. [2015] również uważają, że kształt obiektów biologicznych jest ich kluczową cechą. Strother i in. [2015] twierdzą, że promienie krzywizny dają informacje o kształcie obiektu, jakim może być cytryna. Baradaran i in. [2014] określili model regresji masy cytryny na podstawie jej rzeczywistej objętości, która została obliczana przy założeniu, że kształt cytryny jest zbliżony do elipsoidy obrotowej wydłużonej. Uyar i Erdoğan [2009] do opisu kształtu owoców zastosowali technikę skanowania 3D. Technika skanowania 3D obiektów biologicznych wymaga wykonania wielu skanów, z których można złożyć pojedynczy obiekt [Anders i in. 2014]. Lino i in. [2008] zaproponowali wykorzystanie darmowego programu do analizy obrazu (Image J) do sortowania m.in. cytryn jako alternatywę drogiego komercyjnego programu komputerowego. Lalitha i in. [2015] zaproponowali system analizy obrazu do wykrywania chorób cytryn, polegający na wykrywaniu krawędzi, na powierzchni której rozwija się choroba.

Mebatsion i in. [2011] zaproponowali procedurę opisu kształtu symetrycznych owoców za pomocą konturów podłużnych, które opisano deskryptorami Fouriera, stosując algorytmy wygładzające powierzchnię owocu lub warzywa. Kontury przekrojów badanych obiektów opisywano krzywymi B-sklejkanymi. Mieszkalski [2014] do modelowania kształtu obiektów biologicznych proponuje stosowanie krzywych Béziera.

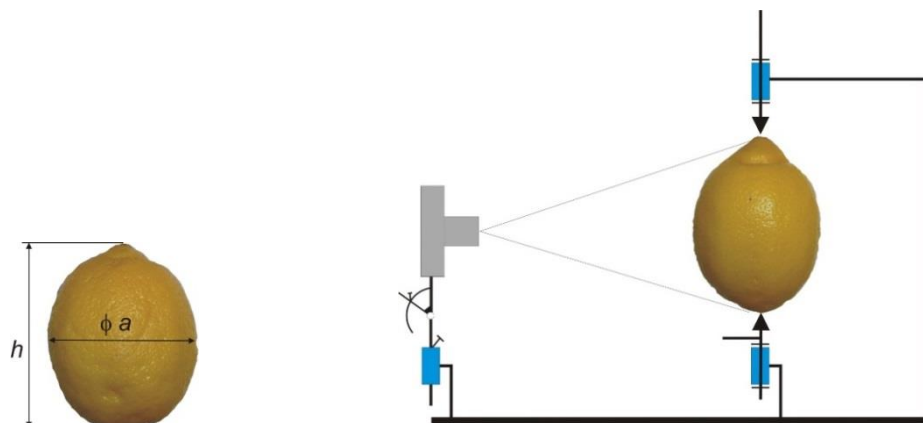
Należy opracować prostą i tanią metodę odwzorowania, która z wystarczającą dokładnością dostarczy danych o cechach geometrycznych cytryn.

Celem pracy jest opis matematyczny kształtu 3D cytryn z wykorzystaniem krzywych Béziera i elipsoidy.

## MATERIAŁ I METODY

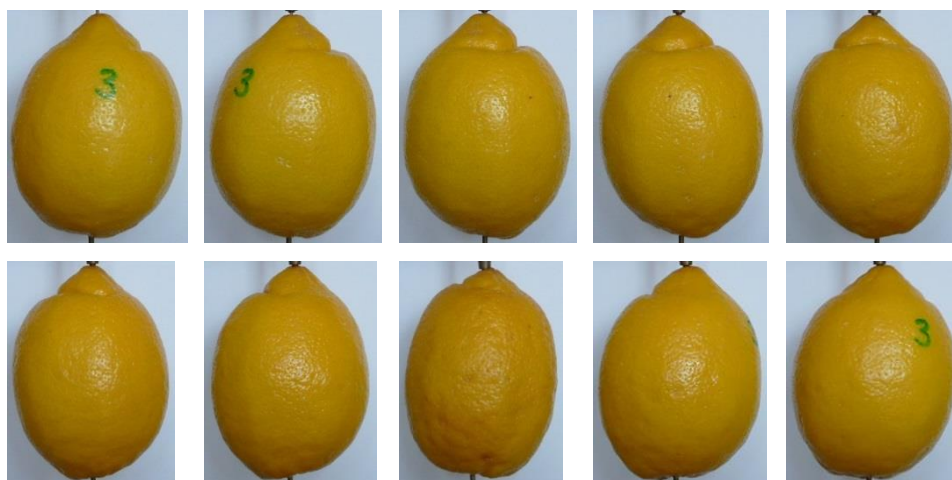
Materiałem do badań były cytryny odmian Eureka i Genoa. Cytryny zakupiono w hurtowni w Broniszach. Przechowywano je w pomieszczeniu o stałej temperaturze 20°C i wilgotności powietrza 65%. Cytryny wybrane do modelowania były nieuszkodzone, o średnich wymiarach charakterystycznych dla tych odmian. Podstawowe wymiary cytryny i stanowisko badawcze zamieszczono na rycinie 1. Długość cytryny, jej szerokość i grubość zmierzono suwmiarką z dokładnością do 0,1 mm. Trzy podstawowe wymiary cytryny odmiany Eureka wynosiły 94 mm, 69 mm, 68 mm, a cytryny odmiany Genoa – 66 mm, 67 mm, 66 mm.

W celu wykonania fotografii 10 położeń każdą cytrynę umieszczano na stanowisku badawczym (ryc. 1). Stanowisko badawcze umożliwiało obrót cytryny co 36° względem jej naturalnej osi symetrii. Do wykonania fotografii posłużono się aparatem Panasonic LUMIX DMC-TZ3. Odległość obiektywu od cytryny była stała i wynosiła 400 mm. Zdjęcia o wymiarach 2560 × 1712 pikseli zapisywano w formacie JPEG. Położenia cytryn do wyznaczenia krzywych Béziera zamieszczono na rycinach 2 i 3.



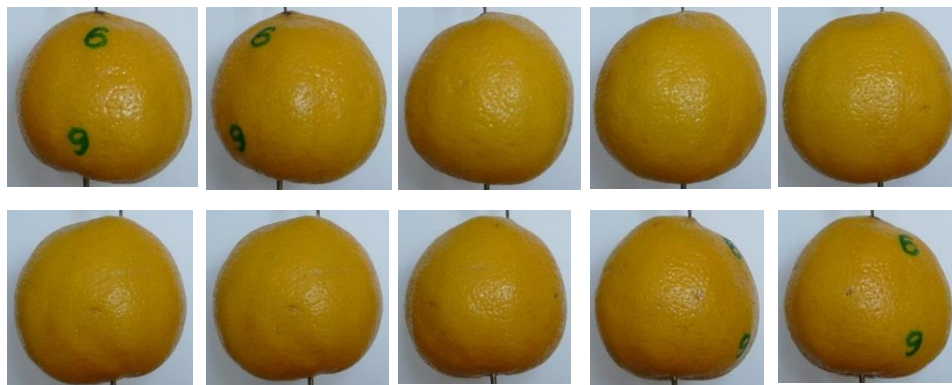
Ryc. 1. Podstawowe wymiary cytryny (wymiar grubości jest prostopadły do wymiaru szerokości) i stanowisko badawcze

Fig. 1. Basic dimensions of lemon (thickness is perpendicular to the width dimension) and the test stand

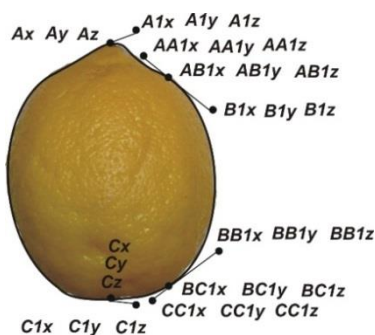


Ryc. 2. Cytryna odmiany Eureka w 10 położeniach do opisanie konturów krzywymi Béziara

Fig. 2. An lemon variety Eureka in 10 positions to describe the contours by Bézier curves



Ryc. 3. Cytryna odmiany Genoa w 10 położeniach do opisanie konturów krzywymi Béziera  
 Fig. 3. An lemon variety Genoa in 10 positions to describe contours by Bézier curves



Ryc. 4. Oznaczenia punktów węzłowych i kontrolnych trzech krzywych Béziera opisujących kontur cytryny  
 Fig. 4. Designation of nodal and control points of three Bézier curves describing the lemon contour

Fotografie cytryn kadrowano i wczytywano do programu graficznego, np. Inkscape. Po naniesieniu na fotografię układu współrzędnych dokonano skalowania, następnie do konturów cytryn dopasowywano trzy gładko połączone krzywe Béziera (ryc. 4).

Na podstawie podstawowych wymiarów cytryn wyznaczono elipsoidę, która była modelem cytryny. W celu porównania modeli z cytryną określono maksymalne różnice odległości współrzędnych  $x$  między modelami a cytryną.

## WYNIKI

**Model konturów bryły cytryny reprezentowany krzywymi Béziera.** Kontur cytryny opisano krzywymi Béziera za pomocą macierzowych równań współrzędnych  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $z_n$  punktów należących do konturu cytryny. Równania krzywej Béziera dla górnej części konturu cytryny są podobne jak w pracy Mieszkalskiego [2015].

Równania krzywej Béziera dla środkowej części konturu cytryny są następujące:

$$x B n_t = A B n_x \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^3 + B n_x \cdot \cos \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \frac{t}{N} \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^2 +$$

$$+ B B n_x \cdot \cos \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^2 \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right] + B C x \cdot \cos \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^3 \quad (1)$$

$$y B n_t = A B y \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^3 + B n_y \cdot \sin \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \frac{t}{N} \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^2 +$$

$$+ B B n_y \cdot \sin \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^2 \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right] + B C y \cdot \sin \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^3 \quad (2)$$

$$z B n_t = A B z \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^3 + B n_z \cdot 3 \frac{t}{N} \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^2 + B B n_z \cdot 3 \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^2 \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right] + B C z \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^3 \quad (3)$$

Równania krzywej Béziera dla dolnej części konturu cytryny są następujące:

$$x C n_t = B C n_x \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^3 + C C n_x \cdot \cos \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \frac{t}{N} \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^2 +$$

$$+ C n_x \cdot \cos \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^2 \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right] + C x \cdot \cos \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^3 \quad (4)$$

$$y C n_t = B C y \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^3 + C C n_y \cdot \sin \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \frac{t}{N} \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^2 +$$

$$+ C n_y \cdot \sin \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot 3 \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^2 \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right] + C y \cdot \sin \left( \frac{\alpha n \cdot \pi}{180} \right) \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^3 \quad (5)$$

$$z C n_t = B C z \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^3 + C C n_z \cdot 3 \frac{t}{N} \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right]^2 + C n_z \cdot 3 \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^2 \cdot \left[ 1 - \frac{t}{N} \right] + C z \cdot \left[ \frac{t}{N} \right]^3 \quad (6)$$

Dla  $N = 23$ ,  $t = 0 \dots N$ ,  $n$  – numer krzywej Béziera,  $n = 1, 2, 3, \dots, 11$ .  $\alpha n = 0^\circ, 36^\circ, \dots, 360^\circ$ .

Podobne równania zastosowano do opisu środkowej i górnej części konturu cytryny.

Połączone w punktach węzłowych trzy krzywe Béziera są gładkie, ponieważ leżą na płaszczyźnie, a punkty kontrolne łączonych krzywych leżą na wspólnej prostej. Zbudowane na podstawie wcześniej zamieszczonych równań połączone krzywe Béziera leżące wzdłuż południków cytryny tworzą jej model 3D.

**Model bryły cytryny reprezentowany elipsoidą.** Macierzowe równania parametryczne elipsoidy aproksymującej bryłę cytryny mają postać:

$$X_{ce\ i, j} = \frac{a}{2} \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \theta_j \quad (7)$$

$$Y_{ce\ i, j} = \frac{b}{2} \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \theta_j \quad (8)$$

$$Z_{ce\ i, j} = \frac{h}{2} \cdot \sin \varphi_i + \frac{h}{2} \quad (9)$$

Gdzie:

$$\varphi_i = \frac{2 \cdot i \cdot \pi}{N} \quad (10)$$

$$\theta_j = \frac{2 \cdot j \cdot \pi}{N} \quad (11)$$

Zmienne zakresowe:

$$i = 0 \dots N \quad (12)$$

$$j = 0 \dots N \quad (13)$$

**Wyniki współrzędnych punktów węzłowych i kontrolnych krzywych Béziera.**

Współrzędne punktów węzłowych i kontrolnych krzywych Béziera dla cytryny odmiany Eureka zamieszczono w macierzach ukazanych niżej.

Współrzędne węzłów wspólnych dla krzywych Béziera

$$\begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 94 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Współrzędne węzłów łączących krzywe Béziera:

$$\begin{pmatrix} AB1x & AB1y & AB1z & BC1x & BC1y & BC1z \\ AB2x & AB2y & AB2z & BC2x & BC2y & BC2z \\ AB3x & AB3y & AB3z & BC3x & BC3y & BC3z \\ AB4x & AB4y & AB4z & BC4x & BC4y & BC4z \\ AB5x & AB5y & AB5z & BC5x & BC5y & BC5z \\ AB6x & AB6y & AB6z & BC6x & BC6y & BC6z \\ AB7x & AB7y & AB7z & BC7x & BC7y & BC7z \\ AB8x & AB8y & AB8z & BC8x & BC8y & BC8z \\ AB9x & AB9y & AB9z & BC9x & BC9y & BC9z \\ AB10x & AB10y & AB10z & BC10x & BC10y & BC10z \\ AB11x & AB11y & AB11z & BC11x & BC11y & BC11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -22.2 & -22.2 & 78 & -20.1 & -20.1 & 8 \\ -21.9 & -21.9 & 78 & -19.2 & -19.2 & 8 \\ -23 & -23 & 78 & -18 & -18 & 8 \\ -22 & -22 & 78 & -17.5 & -17.4 & 8 \\ -23.6 & -23.6 & 78 & -18.3 & -18.3 & 8 \\ 22 & 22 & 78 & 17.8 & 17.8 & 8 \\ 21.8 & 21.8 & 78 & 19.9 & 19.9 & 8 \\ 23.4 & 23.4 & 78 & 24.1 & 24.1 & 8 \\ 22.9 & 22.9 & 78 & 25 & 25 & 8 \\ 21.9 & 21.9 & 78 & 23.7 & 23.7 & 8 \\ -22.2 & -22.2 & 78 & -20.1 & -20.1 & 8 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Współrzędne punktów kontrolnych krzywej Béziera dla górnej części cytryny (A):

$$\begin{pmatrix} A1x & A1y & A1z & AA1x & AA1y & AA1z \\ A2x & A2y & A2z & AA2x & AA2y & AA2z \\ A3x & A3y & A3z & AA3x & AA3y & AA3z \\ A4x & A4y & A4z & AA4x & AA4y & AA4z \\ A5x & A5y & A5z & AA5x & AA5y & AA5z \\ A6x & A6y & A6z & AA6x & AA6y & AA6z \\ A7x & A7y & A7z & AA7x & AA7y & AA7z \\ A8x & A8y & A8z & AA8x & AA8y & AA8z \\ A9x & A9y & A9z & AA9x & AA9y & AA9z \\ A10x & A10y & A10z & AA10x & AA10y & AA10z \\ A11x & A11y & A11z & AA11x & AA11y & AA11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -5.3 & -5.3 & 93 & -13.8 & -13.8 & 83.9 \\ -5.5 & -5.5 & 93 & -13.6 & -13.6 & 83.8 \\ -9.3 & -9.3 & 94 & -13.2 & -13.2 & 83.9 \\ -9 & -9 & 94 & -13.1 & -13.1 & 83.7 \\ -9.5 & -9.5 & 94 & -14.7 & -14.7 & 83.2 \\ 10.5 & 10.5 & 93 & 13.7 & 13.7 & 81 \\ 10.8 & 10.8 & 93.8 & 13.7 & 13.7 & 80.8 \\ 8.1 & 8.1 & 93.8 & 12.1 & 12.1 & 81.2 \\ 6.1 & 6.1 & 94 & 10.7 & 10.7 & 81.9 \\ 3.9 & 3.9 & 94 & 13.2 & 13.2 & 84 \\ -5.3 & -5.1 & 93 & -13.8 & -13.8 & 83.9 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Współrzędne punktów kontrolnych krzywej Béziera dla środkowej części cytryny (B):

$$\begin{pmatrix} B1x & B1y & B1z & BB1x & BB1y & BB1z \\ B2x & B2y & B2z & BB2x & BB2y & BB2z \\ B3x & B3y & B3z & BB3x & BB3y & BB3z \\ B4x & B4y & B4z & BB4x & BB4y & BB4z \\ B5x & B5y & B5z & BB5x & BB5y & BB5z \\ B6x & B6y & B6z & BB6x & BB6y & BB6z \\ B7x & B7y & B7z & BB7x & BB7y & BB7z \\ B8x & B8y & B8z & BB8x & BB8y & BB8z \\ B9x & B9y & B9z & BB9x & BB9y & BB9z \\ B10x & B10y & B10z & BB10x & BB10y & BB10z \\ B11x & B11y & B11z & BB11x & BB11y & BB11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -41.7 & -41.7 & 60.8 & -39 & -39 & 22.3 \\ -38.2 & -38.2 & 61.5 & -38.2 & -38.2 & 20.8 \\ -38.4 & -38.4 & 61.7 & -38.1 & -31.8 & 22.9 \\ -40 & -40 & 60 & -37.3 & -37.3 & 24.5 \\ -41.6 & -41.6 & 59.9 & -38.2 & -38.2 & 24.3 \\ 48 & 48 & 55 & 27.8 & 27.8 & 12.4 \\ 46.3 & 46.3 & 56.7 & 32.5 & 32.5 & 17.1 \\ 47.1 & 47.1 & 57 & 32.6 & 32.6 & 17.4 \\ 46.2 & 46.2 & 57.2 & 32.6 & 32.6 & 17.4 \\ 34.8 & 34.8 & 67.5 & 40.7 & 40.7 & 23.7 \\ -41.7 & -41.7 & 60.8 & -39 & -39 & 22.3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Współrzędne punktów kontrolnych krzywej Béziera dla dolnej części cytryny (C):

$$\begin{pmatrix} CC1x & CC1y & CC1z & C1x & C1y & C1z \\ CC2x & CC2y & CC2z & C2x & C2y & C2z \\ CC3x & CC3y & CC3z & C3x & C3y & C3z \\ CC4x & CC4y & CC4z & C4x & C4y & C4z \\ CC5x & CC5y & CC5z & C5x & C5y & C5z \\ CC6x & CC6y & CC6z & C6x & C6y & C6z \\ CC7x & CC7y & CC7z & C7x & C7y & C7z \\ CC8x & CC8y & CC8z & C8x & C8y & C8z \\ CC9x & CC9y & CC9z & C9x & C9y & C9z \\ CC10x & CC10y & CC10z & C10x & C10y & C10z \\ CC11x & CC11y & CC11z & C11x & C11y & C11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -20.6 & -20.6 & 3.9 & -11.8 & -11.8 & 3.3 \\ -17.9 & -17.9 & 4.8 & -11.8 & -11.8 & 3.2 \\ -15.6 & -15.6 & 5 & -10.6 & -10.6 & 4.4 \\ -13.2 & -13.2 & 5 & -11.6 & -11.6 & 3.4 \\ -14.2 & -14.2 & 5 & -10.8 & -10.8 & 2 \\ 8.1 & 8.1 & 4.6 & 13.6 & 13.6 & 1.4 \\ 11.9 & 11.9 & 2.4 & 14.1 & 14.1 & 0.4 \\ 12.7 & 12.7 & 2.2 & 13.8 & 13.8 & 0.5 \\ 12.8 & 12.8 & 2 & 14.1 & 14.1 & 0 \\ 11.9 & 11.9 & 2.3 & 8.8 & 8.8 & 1.9 \\ -20.6 & -20.6 & 3.9 & -11.8 & -11.8 & 3.3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Współrzędne punktów węzłowych wspólnych i kontrolnych krzywych Béziera cytryny odmiany Genoa zamieszczono w macierzach ukazanych niżej.

Współrzędne węzłów wspólnych dla krzywych Béziera:

$$\begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 66 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Współrzędne węzłów łączących krzywe Béziera:

$$\begin{pmatrix} AB1x & AB1y & AB1z & BC1x & BC1y & BC1z \\ AB2x & AB2y & AB2z & BC2x & BC2y & BC2z \\ AB3x & AB3y & AB3z & BC3x & BC3y & BC3z \\ AB4x & AB4y & AB4z & BC4x & BC4y & BC4z \\ AB5x & AB5y & AB5z & BC5x & BC5y & BC5z \\ AB6x & AB6y & AB6z & BC6x & BC6y & BC6z \\ AB7x & AB7y & AB7z & BC7x & BC7y & BC7z \\ AB8x & AB8y & AB8z & BC8x & BC8y & BC8z \\ AB9x & AB9y & AB9z & BC9x & BC9y & BC9z \\ AB10x & AB10y & AB10z & BC10x & BC10y & BC10z \\ AB11x & AB11y & AB11z & BC11x & BC11y & BC11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -22 & -22 & 55 & -15.7 & -15.7 & 4 \\ -19.4 & -19.4 & 55 & -11.9 & -11.9 & 4 \\ -20.1 & -20.1 & 55 & -14.1 & -14.1 & 4 \\ -20.2 & -20.2 & 55 & -16.4 & -16.4 & 4 \\ -24.6 & -24.6 & 55 & -19.3 & -19.3 & 4 \\ 26.9 & 26.9 & 55 & 25.5 & 25.5 & 4 \\ 28.5 & 28.5 & 55 & 24.2 & 24.2 & 4 \\ 25.7 & 25.7 & 55 & 21.7 & 21.7 & 4 \\ 25.5 & 25.5 & 55 & 22.8 & 22.8 & 4 \\ 23.1 & 23.1 & 55 & 15.5 & 15.5 & 4 \\ -22 & -22 & 55 & -15.7 & -15.7 & 4 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Współrzędne punktów kontrolnych krzywej Béziera dla górnej części cytryny (A):

$$\begin{pmatrix} A1x & A1y & A1z & AA1x & AA1y & AA1z \\ A2x & A2y & A2z & AA2x & AA2y & AA2z \\ A3x & A3y & A3z & AA3x & AA3y & AA3z \\ A4x & A4y & A4z & AA4x & AA4y & AA4z \\ A5x & A5y & A5z & AA5x & AA5y & AA5z \\ A6x & A6y & A6z & AA6x & AA6y & AA6z \\ A7x & A7y & A7z & AA7x & AA7y & AA7z \\ A8x & A8y & A8z & AA8x & AA8y & AA8z \\ A9x & A9y & A9z & AA9x & AA9y & AA9z \\ A10x & A10y & A10z & AA10x & AA10y & AA10z \\ A11x & A11y & A11z & AA11x & AA11y & AA11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -5.8 & -5.8 & 66 & -10.2 & -10.2 & 65.6 \\ -1.7 & -1.7 & 64.8 & -10.4 & -10.4 & 63.8 \\ -4.2 & -4.2 & 62.8 & -11 & -11 & 64 \\ -4.4 & -4.4 & 62.9 & -11.1 & -11.1 & 63.8 \\ -4.9 & -4.9 & 64.2 & -15.8 & -15.8 & 65.9 \\ 8.9 & 8.9 & 64.9 & 14.8 & 14.8 & 63.7 \\ 9 & 9 & 64.9 & 16.9 & 16.9 & 63.8 \\ 8.8 & 8.8 & 65 & 17.3 & 17.3 & 66 \\ 8.9 & 8.9 & 64.7 & 17.4 & 17.4 & 66 \\ 9.1 & 9.1 & 66 & 14.7 & 14.7 & 65.7 \\ -5.8 & -5.8 & 66 & -10.2 & -10.2 & 65.6 \end{pmatrix} \quad (21)$$



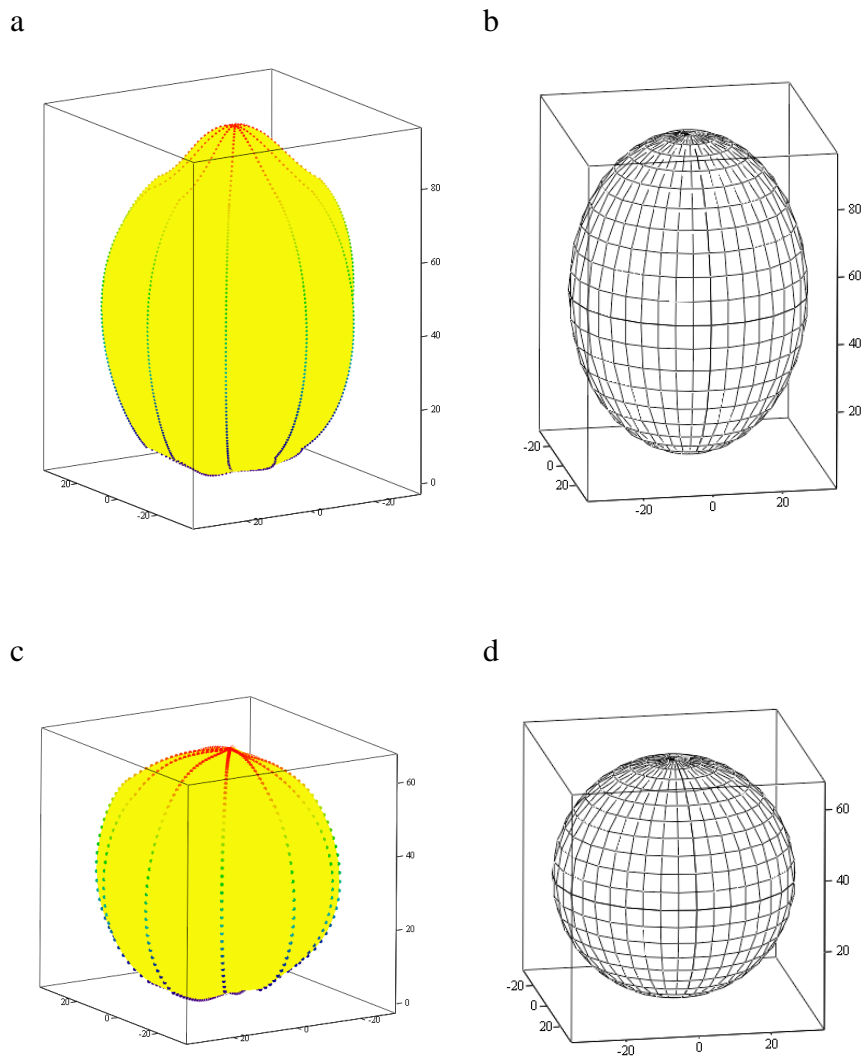
Współrzędne punktów kontrolnych krzywej Béziera dla środkowej części cytryny (B):

$$\begin{pmatrix} B1x & B1y & B1z & BB1x & BB1y & BB1z \\ B2x & B2y & B2z & BB2x & BB2y & BB2z \\ B3x & B3y & B3z & BB3x & BB3y & BB3z \\ B4x & B4y & B4z & BB4x & BB4y & BB4z \\ B5x & B5y & B5z & BB5x & BB5y & BB5z \\ B6x & B6y & B6z & BB6x & BB6y & BB6z \\ B7x & B7y & B7z & BB7x & BB7y & BB7z \\ B8x & B8y & B8z & BB8x & BB8y & BB8z \\ B9x & B9y & B9z & BB9x & BB9y & BB9z \\ B10x & B10y & B10z & BB10x & BB10y & BB10z \\ B11x & B11y & B11z & BB11x & BB11y & BB11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -34.8 & -34.8 & 43 & -37.5 & -37.5 & 12.4 \\ -32.8 & -32.8 & 42.5 & -34.7 & -34.7 & 16.7 \\ -30.4 & -30.4 & 44.5 & -38.6 & -38.6 & 14.4 \\ -30.2 & -30.2 & 44.6 & -38.7 & -38.7 & 14.2 \\ -35.5 & -35.5 & 44.5 & -42.5 & -42.5 & 16.3 \\ 34.5 & 34.5 & 50 & 44.5 & 44.5 & 19.6 \\ 36.3 & 36.3 & 49.9 & 46.4 & 46.4 & 18 \\ 35.7 & 35.7 & 46 & 39.7 & 39.7 & 17.6 \\ 36.1 & 36.1 & 41.5 & 39.8 & 39.8 & 17.7 \\ 33.1 & 33.1 & 44.3 & 37.5 & 37.5 & 19.6 \\ -34.8 & -34.8 & 43 & -37.5 & -37.5 & 12.4 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Współrzędne punktów kontrolnych krzywej Béziera dla dolnej części cytryny (C):

$$\begin{pmatrix} CC1x & CC1y & CC1z & C1x & C1y & C1z \\ CC2x & CC2y & CC2z & C2x & C2y & C2z \\ CC3x & CC3y & CC3z & C3x & C3y & C3z \\ CC4x & CC4y & CC4z & C4x & C4y & C4z \\ CC5x & CC5y & CC5z & C5x & C5y & C5z \\ CC6x & CC6y & CC6z & C6x & C6y & C6z \\ CC7x & CC7y & CC7z & C7x & C7y & C7z \\ CC8x & CC8y & CC8z & C8x & C8y & C8z \\ CC9x & CC9y & CC9z & C9x & C9y & C9z \\ CC10x & CC10y & CC10z & C10x & C10y & C10z \\ CC11x & CC11y & CC11z & C11x & C11y & C11z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -4.7 & -4.7 & 3.7 & -9.8 & -9.8 & 0.4 \\ -4.9 & -4.9 & 4.2 & -9.2 & -9.2 & 1.6 \\ -6.8 & -6.8 & 2.8 & -9.3 & -9.3 & 1.3 \\ -6.4 & -6.4 & 3.1 & -9.2 & -9. & 1.3 \\ -11.7 & -11.7 & 0.5 & -9.2 & -9. & 1.5 \\ 17.1 & 17.1 & -0.5 & 10 & 10 & -1.3 \\ 16.1 & 16.1 & 0.3 & 9.2 & 9.2 & -0.2 \\ 13.9 & 13.9 & 0.3 & 9.5 & 9.5 & -0.3 \\ 11.5 & 11.5 & -1.3 & 9.5 & 9.5 & -0.5 \\ 7.8 & 7.8 & 0.8 & 9.4 & 9.4 & 2.1 \\ -4.7 & -4.7 & 3.7 & -9.8 & -9.8 & 0.4 \end{pmatrix} \quad (23)$$

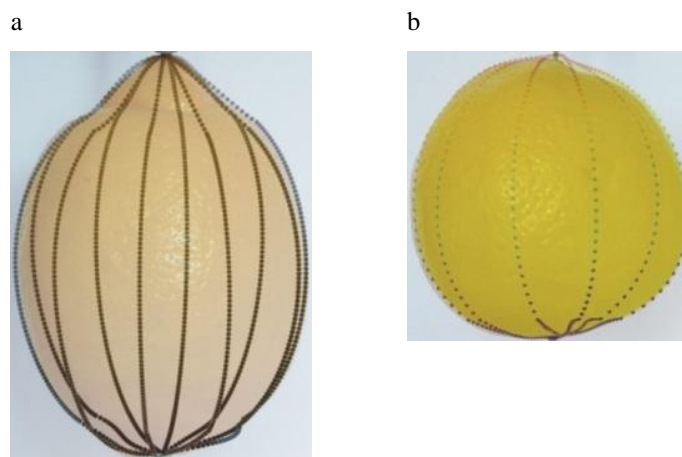
**Modele kształtu cytryn.** Modele 3D kształtu cytryn odmian Eureka i Genoa zamieszczono na rycinie 5.



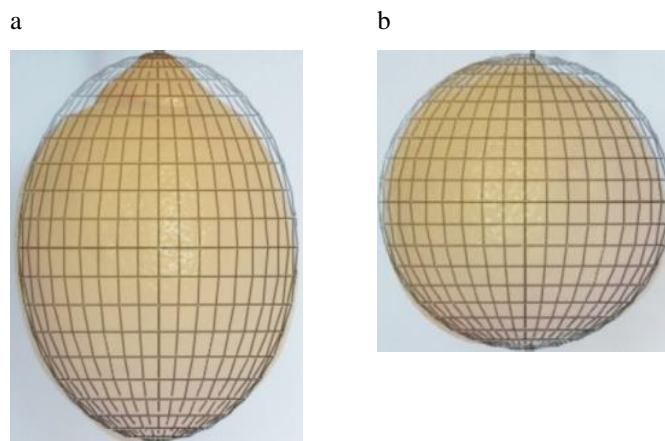
Ryc. 5. Modele 3D kształtu cytryn: a – odmiana Eureka aproksymowana krzywymi Béziera, b – odmiana Eureka aproksymowana elipsoidą, c – odmiana Genoa aproksymowana krzywymi Béziera, d – odmiana Genoa aproksymowana elipsoidą

Fig. 5. 3D models of lemon shape: a – Eureka variety approximated by Bézier curves, b – Eureka variety approximated by ellipsoid, c – Genoa variety approximated by Bézier curves, d – Genoa variety approximated by ellipsoid

W celu porównania cytryn z modelami odwzorowanymi krzywymi Béziera na rycinie 6 zamieszczono nałożone na cytryny ich modele 3D.



Ryc. 6. Porównanie nałożonych na siebie cytryn i ich rzutów XZ modeli 3D reprezentowanych krzywymi Béziera: a – dla cytryn odmiany Eureka, b – dla cytryn odmiany Genoa  
Fig. 6. Comparison of superimposed lemons and throws XZ models 3D represented Bézier curves: a – for lemons Eureka variety, b – for lemons variety Genoa



Ryc. 7. Porównanie nałożonych na siebie cytryn i ich rzutów XZ modeli 3D reprezentowanych elipsoidą: a – dla cytryn odmiany Eureka, b – dla cytryn odmiany Genoa  
Fig. 7. Comparison of superimposed lemons and throws XZ models 3D represented ellipsoid: a – for lemons Eureka variety, b – for lemons variety Genoa

W przypadku cytryny odmiany Eureka maksymalna różnica odległości współrzędnych w płaszczyźnie *XZ* między cytryną a modelem z wykorzystaniem krzywych Béziera wynosi 3,4 mm, a z wykorzystaniem elipsoidy 1,5 mm. W przypadku cytryny odmiany Genoa ta różnica po zastosowaniu krzywych Béziera wynosi 1,3 mm, a po zastosowaniu elipsoidy 4,1 mm.

Do wykonania modelu 3D cytryny wystarczy 30 połączonych krzywych Béziera rozmieszczonych w przestrzeni na powierzchni cytryny. Modele 3D cytryn uzyskane po interpolacji i aproksymacji danych są dobrze dopasowane. Niewielkie odchylenia występują lokalnie.

## WNIOSKI

1. Do opisu wklęsłych i wypukłych części cytryn różnych odmian można stosować gładko łączone krzywe Béziera.
2. Dokładność dopasowania modelu do cytryny jest duża, z małymi odchyleniami lokalnymi.
3. Krzywe Béziera rozmieszczone wzdłuż południków cytryny dokładniej opisują ich kształt niż elipsoida.

## PIŚMIENNICTWO

- Anders, A., Markowski, P., Kaliniewicz, Z. (2014). Badanie właściwości geometrycznych i fizycznych owoców wybranych odmian gruszy na podstawie modeli numerycznych uzyskanych za pomocą skanera 3D. *Zesz. Probl. Post. Nauk Rol.*, 577, 3–12.
- Baradaran, M.J., Miraei, A.S.H., Abbaspour-Fard, M.H., Emadi, B. (2014). Modeling physical properties of lemon fruits for separation and classification. *Int. Food Res. J.*, 21(5), 1901–1909.
- Hrishikesh-Tavanandi, A., Deepak, S., Venkateshmurthy, K., Raghavarao, K.S.M.S. (2013). Development of a lemon cutting machine. *J. Food Sci. Technol.* DOI: 10.1007/s13197-012-0908-4.
- Iglesias, D.J., Cercós, M., Colmenero-Flores, J.M., Naranjo, M.A., Rios, G., Carrera, E., Ruiz-Rivero, O., Lliso, I., Morillon, R., Tadeo, F.R., Talon, M. (2007). Physiology of citrus fruiting. *Braz. J. Plant Physiol.*, 19(4), 333–362.
- Kakadiya, D., Shah, R., Shah, N., Kachariya, C., Patel, M., Sukhwani, K. (2015). Shape Extraction methods for fruits: technical review. *Int. J. Comp. Appl.*, 111(1), 43–48.
- Khojastehnazhand, M., Omid, M., Tabatabaefar, A. (2010). Development of a lemon sorting system based on color and size. *Afr. J. Plant Sci.*, 4(4), 122–127.
- Lalitha, K., Muthulakshmi, K., Vinothini, A. (2015). Proficient acquaintance based system for citrus leaf disease recognition and categorization. *Int. J. Comp. Sci. Inf. Technol.*, 6(3), 2519–2524.
- Lino, A.C.L., Sanches, J., Fabbro, I.M.D. (2008). Image processing techniques for lemons and tomatoes classification. *Bragantia*, 67(3), 785–789.
- Mebatsion, H.K., Boudon, F., Godin, C., Pradal, C., Génard, M., Goz-Bac, C., Bertin, N. (2011). A novel profile based model 415 for virtual representation of quasi-symmetric plant organs. *Comp. Electr. Agric.*, 75(1), 113–124.

- Mieszkalski, L. (2011). Agriculture and food machinery, application of physics for improving. In: Encyclopedia of agrophysics, Gliński, J., Horabik, J., Lipiec, J. (eds). Springer, 14–26.
- Mieszkalski, L. (2014). Bézier curves in modeling the shapes of biological objects. *Ann. Wars. Univ. Life Sci. – SGGW, Agriculture*, 64, 117–128.
- Mieszkalski, L. (2015). Komputerowe wspomaganie modelowania kształtu jabłek. *Acta Sci. Pol., Tech. Agr.*, 14(3–4), 19–31.
- Moreda, G.P., Muñoz, M.A., Ruiz-Altisent, M., Perdignes, A. (2012). Shape determination of horticultural produce using two-dimensional computer vision. A review. *J. Food Eng.*, 108(2), 245–261.
- Perez-Perez, J.G., Porras Castillo, I., Garcia-Lidon, A., Botia, P., Garcia-Sanchez, F. (2005). Fino lemon clones compared with the lemon varieties Eureka and Lisbon on two rootstocks in Murcia (Spain). *Sci. Hortic.*, 106, 530–538.
- Strother, L., Killebrew, K.W., Caplovitz, G.P. (2015). The lemon illusion: seeing curvature where there is none. *Front. Hum. Neurosci.*, 9, 1–7, <http://dx.doi.org/10.3389/fnhum.2015.00095>.
- Uyar, R., Erdoğdu, F. (2009). Potential use of 3-dimensional scanners for food process modeling. *J. Food Eng.*, 93, 337–343.

## **MATHEMATICAL DESCRIPTION OF 3D SHAPE OF LEMON FRUIT CHARACTERISTICS**

**Abstract.** This paper presents a mathematical description of the characteristics of the 3D shape of lemon fruits using Bézier curves and ellipsoid. Eureka and Genoa varieties were selected for modelling. The outline of the lemon, which is the meridian, was described by three connected Bézier curves. The basis for the description of lemon contours are their photographs in 10 positions, changing every 36°. The ellipsoid was used as an alternative method to model the lemon shape. Bézier curves approximating the meridians lying on the surface of the lemons and of the ellipsoid are their 3D models. The presented method using Bézier curves can be used for the mathematical modeling of the shape of lemons. The ellipsoid is not a good model to approximate the shape of lemons.

**Key words:** lemon, shape, Bézier curves, ellipsoid, mathematical description, 3D models