# ПРО МАТРИЧНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ДЕЯКИХ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Євгеній Самойленко

Миколаївський державний аграрний університет
54030, м. Миколаїв, вул. Крилова 17 а

**Анотація.** В роботі досліджено властивості матричнозначного оператора в гільбертовому просторі елементами якого є неперервні функції від сім'ї обмежених самоспряжених комутуючих операторів та умови оборотності оператора множення на одиничному колі.

**Ключові слова:** оператор, оборотність, спектр, сумісний спектр

## ВСТУП

Будь-який оператор з гільбертового простору над полем комплексних чисел можна представити у вигляді розкладу:

$$C = A + iB,$$

де $A$ та $B$ – самоспряжені оператори. Тому доцільно розглядати самоспряжені оператори як елементи матричних операторів. Для сім'ї обмеженого самоспряженого оператора існує спектральна теорема. Нехай маємо сім'ю обмежених самоспряжених операторів у гільбертовому просторі $H$:

$$\left\{A_i = A_i^* \middle| i = \overline{1,n}\right\}.$$

Тоді за спектральною теоремою:

$$A_i = \int\limits_{S(\widetilde{A})} \lambda_i d\widetilde{E}(\Lambda),$$

де: $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in S(\widetilde{A}) \subset R^m$, $\widetilde{E}(\Lambda)$ – сумісна спектральна міра, а $S(\widetilde{A})$ – сумісний спектр оператора $A$. Неперервною функцією від сім'ї самоспряжених операторів $\widetilde{A}$ називається такий оператор:

$$f(\widetilde{A}) = \int\limits_{S(\widetilde{A})} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) d\widetilde{E}(\Lambda),$$

де $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in S(\widetilde{A}) \subset R^m$, а $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in C(R^m, C)$ – неперервна функція, що діє з $R^m$ в множину комплексних чисел $C$. Нагадаємо, що спектр самоспряженого оператора є підмножиною множини дійсних чисел. Наведемо приклади неперервних функцій від самоспряженого обмеженого оператора $A$. Зокрема:

$$\sqrt{A} = \int\limits_{\sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, dE(\lambda).$$

Оскільки корінь квадратний можна брати від невід'ємних чисел, то необхідно накладати умову невід'ємності спектра оператора якщо маємо дійсно значну функцію. Якщо ж маємо комплекснозначну функцію, то ніяких обмежено не потрібно. Аналогічно можна знайти таку функцію від самоспряженого оператора:

$$\cos A = \int\limits_{\sigma(A)} \cos \lambda\, dE(\lambda).$$

Як видно з означення знаходження функції від самоспряженого оператора, а також знаходження оберненого оператора пов'язані з проблемою знаходження спектра оператора. Зокрема розв'язання задачі про знаходження оберненого оператора приводить до такої рівності:

$$A^{-1} = \int\limits_{\sigma(A)} \frac{1}{\lambda} dE(\lambda).$$

Звичайно, щоб оператор $A^{-1}$ існував необхідно і достатньо, щоб $\lambda \neq 0$, тобто $\{0\} \notin \sigma(A)$. Функціональне числення від сім'ї обмежених комутуючих операторів є добре дослідженим. Перехід до матричних функцій від сім'ї обмежених комутуючих операторів в цілому є недослідженою областю, хоча в роботах прикладного характеру, зокрема при дослідженні інтегральних операторів виникають матричні символи. Тому доцільним є узагальнення. Також матричні оператори від сім'ї комутуючих обмежених операторів є некомутуючими операторами. Класи некомутуючих операторів досліджені слабко, тобто багато проблем є просто невирішеними. Якщо $\tilde{A} = \{A_i = A^*\}_{i=\overline{1,m}} \subset B(H)$ – сім'я самоспряжених обмежених комутуючих операторів і $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ – сім'я їх спектральних мір. Прямим добутком спектральних мір є міра:

$$\tilde{E}(\alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_m) = \mathop{\times}_{i=1}^{m} E_i(\alpha_i) =$$
$$= E_1(\alpha_1)E_2(\alpha_2)\cdots E_m(\alpha_m).$$

Носієм розкладу одиниці $E$ називається множина:

$$Supp\{\cap \varphi | \varphi = \overline{\varphi} : E(\varphi) = I\},$$

тобто перетин усіх замкнених множин повної міри. Сумісним спектром сім'ї самоспряжених комутуючих операторів називається множина:

$$S(\tilde{A}) = S(A_i | i = \overline{1,m}) := Supp\tilde{E},$$

тобто носій добутку спектральних мір. За означенням, має місце наступне включення:

$$S(\tilde{A}) = Supp\tilde{E} \subseteq \mathop{\times}_{i=1}^{m} SuppE_i = \mathop{\times}_{i=1}^{m} \sigma(A_i),$$

де: $\sigma(A_i)$ – спектр оператора $A_i$, $i = \overline{1,m}$.

## ПРО МАТРИЧНІ ОПЕРАТОРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай матричний оператор $G$ має вигляд:

$$G = \{F_{ij}(\tilde{A}) = F_{ij}(A_1,\ldots,A_m) | i,j = \overline{1,n}\},$$

$G : H^n \to H^n$ – матричний оператор елементами якого є функції від сім'ї обмежених комутуючих операторів. Нехай:

$$F(\Lambda) = \{F_{ij}(\Lambda) = F_{ij}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) | i,j = \overline{1,n}\},$$

тобто $F(\Lambda)$– неперервна матричнозначна функція:

$$F(\Lambda) : U(S(\tilde{A})) \to C^{n\times n},$$

де $U$ – окіл, що містить сумісний спектр $S$. Позначимо:

$$\Delta(G) := \det(F_{ij}(\tilde{A})),$$

тут $\Delta(G)$ – функція-визначник від сім'ї комутуючих самоспряжених операторів, а:

$$\Delta(\Lambda) := \det(F_{ij}(\Lambda)),$$

де $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \in S(\tilde{A})$. Виникає природне запитання про знаходження розв'язку системи лінійних операторних рівнянь:

$$Gx = y,$$

де: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$,

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, тобто

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} F_{ij}(\tilde{A}) x_j = y_i, \quad i = \overline{1,n}. \right.$$

Якщо існує обернений оператор $G^{-1}$, тоді розв'язок системи рівнянь знайдемо за формулою:

$$x = G^{-1}y.$$

Оператор $G$ оборотний тоді і тільки тоді, коли $\forall \Lambda \in S$ виконується:

$$\Delta(\Lambda) \neq 0.$$

Справді, нехай $\forall \Lambda \in S$ виконується:

$$\Delta(\Lambda) \neq 0,$$

тоді можна побудувати алгебраїчно оборотній оператор:

$$B(\Lambda) = (F(\Lambda))^{-1},$$

а отже існує оператор $B(\tilde{A})$ такий, що:

$$GB = I.$$

Нехай:
$\exists \Lambda \in S : \Delta(\Lambda) = \det(\{\lambda_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}) = 0$, тоді $\exists g$, де: $g$ – власний вектор оператора множення $F(\Lambda)$. Скористаємося відомим критерієм з функціонального аналізу. Для цього виберемо послідовність ненульових елемент з гільбертового простору $H^n$, причому вибиратимемо такий елемент так, щоб його норма дорівнювала одиниці. Іншими словами, виберемо елемент з одиничної кулі в

гільбертовому просторі $H^n$. Позначимо $\forall z \geq 1$:

$$0 \neq g^{(z)} := \tilde{E}\left(\left(\lambda_1 - \frac{1}{z}, \lambda_1 + \frac{1}{z}\right) \times \ldots \times \left(\lambda_m - \frac{1}{z}, \lambda_m + \frac{1}{z}\right)\right) g$$

(відмітимо, що $E$ – проектор). Вибраний таким чином елемент $g^{(z)}$ не є елементом з одиничною нормою. Але цей елемент можна нормувати, адже він ненульовий. Позначимо нормований елемент таким чином:

$$y^{(z)} := \frac{g^{(z)}}{\left\| g^{(z)} \right\|},$$

а отже

$$\left\| y^{(z)} \right\| = 1, \ \forall z \geq 1.$$

Додаємо і одночасно віднімаємо один і той же член $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, при цьому отриманий вираз легко піддається аналізу. Маємо:

$$Gy^{(z)} = \left(\{F_{ij}(\Lambda) - \lambda_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}\right) y^{(z)} + \Delta(\Lambda) y^{(z)}.$$

Рівність $\Delta(\Lambda) y^{(z)} = 0$ очевидна. Таким чином:

$$\left\| \left(F_{ij}(\tilde{A}) - \lambda_{ij}\right) y_j^{(z)} \right\|^2 = \int_R \left| \alpha_{ij} - \lambda_{ij} \right|^2 d\left(\tilde{E}(\alpha_{ij}) y^z, y^z\right) \to 0,$$

$$z \to 0.$$

За відомим критерієм оборотності $\left\| Gy^{(z)} \right\| \to 0$, при $z \to \infty$ та $\left\| y^{(z)} \right\| = 1$ Звідки випливає, що оператор $G$ не є оборотним. А це і означає, що оператор $G$ оборотній тоді і тільки тоді, коли відповідний визначник не приймає нульових значень.

Нехай $A = A^* \subset B(H)$ – обмежений самоспряжений оператор. Нехай сім'я самоспряжених обмежених операторів задана:

$$\tilde{A} = \{f_1(A), \ldots, f_m(A)\},$$

де $\{f_i | i = \overline{1,m}\} \subset C(U(\sigma(A)), R)$, де $U$ – окіл, що містить $\sigma(A)$, тоді:

$$S(\{f_1(A), \ldots, f_m(A)\}) = \{(f_1(A), \ldots, f_m(A)) | \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Дійсно, нехай маємо:

$$E_i(\alpha) = \int_{\sigma(A)} \chi_\alpha(f_i(\lambda)) dE(\lambda),$$

де $\chi(A)$ – характеристична функція, $i = \overline{1,m}$. Тоді запишемо розклад добутку спектрів операторів на дві множини, що не перетинаються:

$$\bigtimes_{i=1}^{m} \sigma_i = Supp\tilde{E} \cup \Omega,$$

де сумісна міра будь-якої відкритої множини з $\Omega$ дорівнює нулю, якщо ж будь-яка відкрита множина містить точки з $Supp\tilde{E}$ не дорівнює нулю. Враховуючи, що:

$$\tilde{E}(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m) = \int_R \chi_{\alpha_1}(\lambda) \cdot \ldots \cdot \chi_{\alpha_m}(\lambda) dE = 0,$$

а також врахувавши неперервність $f$:

$$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A)),$$

отримуємо шукану рівність. Наведемо приклад оператора, котрий підтвердить безпомилковість умови оборотності для матричної функції від сім'ї самоспряжених обмежених операторів. Найпростішим прикладом матричного оператора є матричний оператор множення. Нехай маємо гільбертовий простір:

$$H = L_2([0,1], dt),$$

і чотири неперервні функції на одиничному відрізку:

$$f_1, f_2, f_3, f_4 \in C([0,1]).$$

Сім'ю самоспряжених операторів задамо таким чином:

$$\tilde{A} = \{(A_i x)(t) = f_i(t) x(t) | i = \overline{1,4}\}.$$

Тоді сумісний спектр можна задати явно за такою формулою:

$$S(\tilde{A}) = \{\vec{f}(t) | t \in [0,1]\},$$

де: $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_4(t))$. Нехай матричний оператор матиме такий вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(\tilde{A}) & F_{12}(\tilde{A}) \\ F_{21}(\tilde{A}) & F_{22}(\tilde{A}) \end{pmatrix},$$

де:

$$F_{11}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1, \ F_{12}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_2,$$

$$F_{21}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_3, \ F_{22}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_4,$$

тут $F_{ij}$ – неперервні функції які “поважають” лише одну змінну з чотирьох відповідно, тобто є тотожними функціями лише за однією змінною, а за іншими змінними є константами. Застосуємо результат про оборотність отриманих у цій роботі. За умовою оборотності матричного оператора, для матричного оператора множення, якщо оператор оборотній, то буде виконуватись така рівність:

$$f_1(t)f_4(t)-f_2(t)f_3(t)\neq 0\ ,\ \forall t\in[0,1].$$

Результат, отриманий у цьому прикладі, підтверджує безпомилковість теоретичних досліджень, хоча на перший погляд може виглядати і очевидним. Як продовження, можна для цього ж прикладу знайти спектр оператора. Спектром оператора $G$ називається така підмножина чисел $\lambda$ множини комплексних чисел, для яких не існує оберненого оператора $G-\lambda I$, тобто:

$$\sigma(G)=\left\{\lambda\in C\middle|\exists t\in[0,1]:\det\begin{pmatrix} f_1(t)-\lambda & f_2(t)\\ f_3(t) & f_4(t)-\lambda\end{pmatrix}=0\right\}$$

.

Розв'язавши це рівняння отримаємо формулу для знаходження спекра оператора $G$, тобто $\sigma(G)$.

Нехай $S^1$ – одиничне коло. Якщо:

$$\Phi\in M_n\left(L_\infty\left(S^1\right)\right),$$

то оператор множення $\widetilde{M}_\Phi$ з символом $\Phi$ визначається за правилом:

$$\left(\widetilde{M}_\Phi f\right)(z)=\Phi(z)f(z)=$$

$$=\left(\phi_{ij}(z)\right)_{i,j=1}^n\left(f_j(z)\right)_{j=1}^n=$$

$$=\begin{pmatrix}\phi_{11}(z) & \phi_{12}(z) & \dots & \phi_{1n}(z)\\ \phi_{21}(z) & \phi_{22}(z) & \dots & \phi_{2n}(z)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \phi_{n1}(z) & \phi_{n2}(z) & \dots & \phi_{nn}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(z)\\ f_2(z)\\ \vdots\\ f_n(z)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\phi_{11}(z)f_1(z)+\phi_{12}(z)f_2(z)+\ldots+\phi_{1n}(z)f_n(z)\\ \phi_{21}(z)f_1(z)+\phi_{22}(z)f_2(z)+\ldots+\phi_{2n}(z)f_n(z)\\ \vdots\\ \phi_{n1}(z)f_1(z)+\phi_{n2}(z)f_2(z)+\ldots+\phi_{nn}(z)f_n(z)\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^n\phi_{ij}(z)f_j(z)\right)_{i=1}^n\in\widetilde{L}_2\left(S^1\right),$$

$$\forall f\in\widetilde{L}_2\left(S^1\right)=\underbrace{L_2\left(S^1\right)\oplus\cdots\oplus L_2\left(S^1\right)}_{n}=\overset{n}{\oplus}L_2\left(S^1\right),$$

$$M_\varphi\in B\left(L_2\left(S^1\right)\right),$$

а відображення:

$$\widetilde{L}_\infty\left(S^1\right)\to B\left(\widetilde{L}_2\left(S^1\right)\right),$$

таке, що $\Phi\mapsto\widetilde{M}_\Phi$ є ізометричним $*$-ізоморфізмом. Оператор $\widetilde{M}_\Phi$ називатимемо матричним оператором множення. Оператор множення:

$$\widetilde{M}_\Phi\in B\left(M_n\left(C\left(S^1\right)\right)\right)\subset B\left(\widetilde{L}_2\right),\ \text{де}$$

$$\widetilde{L}_2\overset{def}{=}\underbrace{L_2\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_2}_{n}=\overset{n}{\oplus}L_2,$$

оборотній тоді і тільки тоді, коли $\forall z\in S^1$ виконується умова:

$$\det\Phi(z)\neq 0\ .$$

Справді, нехай маємо матричний оператор елементами якого є неперервні функції від сім'ї комутуючих самоспряжених операторів:

$$\widetilde{A}=\left\{A_{km}\middle|A_{km}=A_{km}^*,\left[A_{lp},A_{km}\right]=\right.$$

$$\left.=A_{lp}A_{km}-A_{km}A_{lp}=0,\forall k,m,l,p\in\{1,2,\ldots,n\}\right\},$$

вважатимемо, що носієм будь-якого з операторів $A_{ij}$ є компакт $[0,1]$ і

$$F\left(\widetilde{A}\right)=\left(F_{ij}\left(\widetilde{A}\right)\right)_{i,j=1}^n.$$

Тоді обернений оператор існує тоді і тільки тоді, коли $\forall\vec{t}=(t,t,\ldots,t)\in[0,1]^n$ виконується:

$$\det F\left(\vec{t}\right)\neq 0\ .$$

Нехай маємо матричну функцію

$$\Phi=\Phi(z)=\left(\varphi_{ij}(z)\right),$$

на компакті $S^1$ ( $z\in S^1$ ). Тоді:

$$\Phi(t)=\Phi(\cos(2\pi t)+i\sin(2\pi t)),$$

де $\Phi(t)$ є неперервна матрична функція на компакті $[0,1]$ така, що виконується умова:

$$\Phi(0)=\Phi(1).$$

Поклавши $F=\Phi$ отримуємо відповідне твердження.

Нехай $PC$ – множина обмежених кусково-неперервних функцій на $S^1$ зі скінченою кількістю точок розриву першого роду, природно вимагається умова: $\forall e^{it_0}\in S^1$ хоча б одна границя

$$\lim_{t\to t_0+} f\left(e^{it}\right) = f\left(e^{it_0}\right), \text{ або}$$

$$\lim_{t\to t_0-} f\left(e^{it}\right) = f\left(e^{it_0}\right).$$

Оператор множення:

$$\widetilde{M}_\Phi \in B\left(M_n\left(PC\left(S^1\right)\right)\right) \subset B\left(\widetilde{L}_2\right)$$

оборотній тоді і тільки тоді, коли $\forall e^{it_0} \in S^1$ виконується умова:

$$\lim_{t\to t_0\pm} \det \Phi\left(e^{it}\right) \neq 0 .$$

Припустимо, що $\forall e^{it_0} \in S^1$ виконується умова

$$\lim_{t\to t_0\pm} \det \Phi\left(e^{it}\right) \neq 0 .$$

Тоді $\forall e^{it_0} \in S^1$ існує обернена матриця $\left(\Phi\left(e^{it_0}\right)\right)^{-1}$, а отже $\forall e^{it_0} \in S^1$:

$$\widetilde{M}_{\Phi\left(e^{it_0}\right)} \widetilde{M}_{\Phi^{-1}\left(e^{it_0}\right)} = \widetilde{M}_{\Phi\left(e^{it_0}\right)\Phi^{-1}\left(e^{it_0}\right)} = \widetilde{M}_1 = I$$

,

а також, очевидно, що за побудовою:

$$\left(\Phi\left(e^{it}\right)\right)^{-1} \in PC .$$

Навпаки, припустимо, що $\exists e^{it_0} \in S^1$:

$$\lim_{t\to t_0+} \det \Phi\left(e^{it}\right) = 0,$$

$$\left(\text{або } \lim_{t\to t_0-} \det \Phi\left(e^{it}\right) = 0\right)$$

а також, що $\exists \widetilde{R} = \left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n \in B\left(\widetilde{L}_2\right)$:

$$\widetilde{R}\widetilde{M}_\Phi = \widetilde{M}_\Phi \widetilde{R} = I .$$

Нехай $r \in \left\{M_{\varphi_{ij}} \middle| i, j = \overline{1,n}\right\}$, тоді:

$$\left(rR_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n \left(M_{\varphi_{ij}}\right)_{i,j=1}^n \left(rR_{ij}\right)_{i,j=1}^n =$$

$$= \left(R_{ij} r\right)_{i,j=1}^n \left(M_{\varphi_{ij}}\right)_{i,j=1}^n \left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n = \left(R_{ij} r\right)_{i,j=1}^n .$$

Отже, $\forall i, j, k, m \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\left[R_{ij}, M_{\varphi_{km}}\right] = R_{ij} M_{\varphi_{km}} - M_{\varphi_{km}} R_{ij} = 0 .$$

А для $r \in \left\{R_{ij} \middle| i, j = \overline{1,n}\right\}$, при врахуванні умови:

$$\left[R_{ij}, M_{\varphi_{km}}\right] = 0,$$

аналогічно виконується:

$$\left[R_{ij}, R_{km}\right] = 0 .$$

В силу цього з рівності

$$\left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n \left(M_{\varphi_{km}}\right)_{k,m=1}^n = \left(M_{\varphi_{km}}\right)_{k,m=1}^n \left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n = I$$

випливає, що

$$\det\left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n \det\left(M_{\varphi_{km}}\right)_{k,m=1}^n =$$

$$= \det\left(M_{\varphi_{km}}\right)_{k,m=1}^n \det\left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n = I ,$$

тобто виконується наступна рівність майже скрізь на $S^1$ за мірою $dt$:

$$\det\left(R_{ij}\left(e^{it}\right)\right)_{i,j=1}^n \det\left(M_{\varphi_{km}}\left(e^{it}\right)\right)_{k,m=1}^n =$$

$$= \det\left(M_{\varphi_{km}}\left(e^{it}\right)\right)_{k,m=1}^n \det\left(R_{ij}\left(e^{it}\right)\right)_{i,j=1}^n = 1,$$

де $e^{it} \in S^1$. Оскільки $\exists e^{it_0} \in S^1$:

$$\lim_{t\to t_0+} \det \Phi\left(e^{it}\right) = 0,$$

$$\left(\text{або } \lim_{t\to t_0-} \det \Phi\left(e^{it}\right) = 0\right),$$

тоді при $t \to t_0+$ (або $t \to t_0-$ ) отримуємо протиріччя:

$$\left|\lim_{t\to t_0+(-)} \left(\det\left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n \det\left(M_{\varphi_{km}}\right)_{k,m=1}^n\right)\right| =$$

$$\left|\lim_{t\to t_0+(-)} \left(\det\left(M_{\varphi_{km}}\right)_{k,m=1}^n \det\left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n\right)\right| \le$$

$$\le \left\|\det\left(R_{ij}\right)_{i,j=1}^n\right\| \cdot \left|\lim_{t\to t_0+(-)} \left(\det\left(M_{\varphi_{km}}\left(e^{it}\right)\right)_{k,m=1}^n\right)\right| = 0 \neq 1 .$$

Отже, якщо $\exists e^{it_0} \in S^1$:

$$\lim_{t\to t_0+} \det \Phi\left(e^{it}\right) = 0,$$

$$\left(\text{або } \lim_{t\to t_0-} \det \Phi\left(e^{it}\right) = 0\right),$$

тоді $\overline{\exists} R \in B\left(\widetilde{L}_2\right)$:

$$\widetilde{R}\widetilde{M}_\Phi = \widetilde{M}_\Phi \widetilde{R} = I .$$

Як наслідок, можна стверджувати, що спектр оператора множення $\widetilde{M}_\Phi \in B\left(M_n\left(PC\left(S^1\right)\right)\right) \subset B\left(\widetilde{L}_2\right)$ обчислюється наступним чином:

$$\sigma(\Phi) = \left\{\lambda \middle| \exists z = e^{it_0} \in S^1 : \lim_{t\to \pm t_0} \det\left(\Phi\left(e^{it}\right) - \lambda I\right) = 0\right\} .$$

## ВИСНОВОК

Матрична функція від сім'ї самоспряжених обмежених комутуючих операторів є оператором некомутуючим. А для некомутуючих операторів сьогодні не існує спектральної теорії. І хоча функція від сім'ї самоспряжених обмежених комутуючих операторів є оператором некомутуючим, отримані результати стали можливими завдяки тому, що в генезисі цього оператора лежить добре вивчений клас комутуючих самоспряжених операторів. Умови оборотності матричнозначного оператора в гільбертовому просторі елементами якого є неперервні функції від сім'ї обмежених самоспряжених комутуючих операторів необхідні для розв'язання систем операторних рівнянь. Це дає змогу будувати моделі для описання складних процесів у різних областях науки в яких виникають самоспряжені оператори. Також розглянуто клас матричних операторів множення елементами яких є функції з $PC$, який також є достатньо хорошим класом в сенсі перспективності для застосувань в різних математичних моделях. Велику увагу приділено спектральним властивостям таких операторів. Немає нічого важливішого в теорії операторів за спектр оператора.

**ЛІТЕРАТУРА**


1. Alberio S. 2007 : On functions on graphs and representations of a certain class of *-algebras/ S. Alberio, V. Ostrovsky, Y. Samoilenko // J. Algebra. – 308, №2, 567-582.
2. Островський В. Л. 2006 : Про спектральні теореми для сімей лінійно пов’язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна / В. Л. Островський, Ю. С. Самойленко // Укр. мат. журн., т. 58, №11, 1556-1570.
3. Samoilenko Ye. Ye., 2004 : On Spectrum of Matrix-Valued Continuous Functions of a Family of Commuting Operators./ Ye. Ye. Samoilenko // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Vol. 50, Part 3, 1192–1194.
4. Самойленко Є. Є. 2012 : Про одну С*-алгебру породжену трійками ортопроекторів / Є. Є. Самойленко // 14 Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука – №2, 217.
5. Самойленко Є. Є. 2010 : Про оборотність матричного оператора в гільбертовому просторі $H^n$ елементами якого є неперервні функції від сім'ї комутуючих обмежених самоспряжених операторів / Є. Є. Самойленко // Motrol – 12A, 130-136.
6. Самойленко Ю. С. 1984 : Спектральна теорія сім'ї самоспряжених операторів / Ю. С. Самойленко – Київ; Наукова Думка, 200.
7. Крупник Н. Я. 1984 : Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы / Крупник Н. Я. – Кишинёв: Штиница, 140.
8. Ахиезер Н. И. 1977 : Спектральна теорія самоспряжених операторів в гільбертовому просторі в 2 т. / Ню Ию Ахиезер И. И. Глазман – Харьков: Вища школа, – т.1, 316.
9. Berezanskii Yu.M. 1986 : Self-adjoint operators in spases of functions of finitely many variables / Yu. M. Berezanskii – Providence, AMS, 624.
10. Berezanskii Yu. M. 1968 : Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators / Yu. M. Berezanskii – Providence, AMS, 600.
11. Antonyevich A. 2000 : On trivial and non-trivial $n$-homogeneous $C^*$-algebras / A.Antonyevich and N. Krupnik – Integr. Equ. Oper. Theory – V.38, 172-189.
12. Голубов Б. И. 2005 : Элементы двоичного анализа/ Б.И. Голубов – М:МГУП, 200.
13. Гашков С. Б. 2006 : Современная элементарная алгебра в задачах и решениях/ С. Б. Гашков – М.:МЦНМО, 200.
14. Фельдман Л. П. 2006 : Чисельні методи в інформатиці / Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва – К.: Видавнича група BHV, 408.
15. Астионенко И. А. 2009 : Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Антоненко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости. Серия: математика, физика. – №5(60). – Вып. 16. – Белгород:БелГУ, 15-31.
16. Ахмадиев М. Г. 2010 : Решение одной граничной задачи методом коллокации./ М. Г. Ахмадиев, Т.Х. Каримов, А. Ю. Погодина // Сб. трудов XXIV международной конференции ММТТ-23, том 1, 73-74.
17. Романюк А. С. 2009 :Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. –. – 61, №10, 1347-1366.
18. Джалюк Н. С. 2010 :Паралельні факторизації матриць над кільцями та їх зв’язки / Н. С. Джалюк, В. М. Петричко-

вич // Прикладні проблеми механіки і математики. – Вип. 8, 7-17.
19. Джалюк Н. С. 2007 : Факторизація клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над кільцями головних ідеалів / Н. С. Джалюк, В. М. Петричкович // Математичний вісник НТШ – 4,79-89.
20. Заторський Р. А. 2010 : Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський – Івано-Франківськ: Сімик, 508.
21. Albeverio S. 2010 : Decomposition of a scalar operator into a product of unitary operators with two points in spectrum/ S. Albeverio, S. Rabanovich // Linear Algebra and Its Appl., v. 433, 1127-1137.
22. Lancaster P. 2008 : Linearization of regular matrix polynomias / P. Lancaster // Electronic J. of Linear Algebra. Vol. 17, 21-27.
23. Хучарева Т. С. 2010 : О вычислении коэффициентов многочленов Кравчука / Т. С. Хучарева, Ю. Н. Переверзина // 13 Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука – №3, 304.
24. Сухорольський М. А. 2010 : Розелад аналітичних в крузі функцій в комплексній області за системою похідних поліномів Лежанра / М. А. Сухорольський, В. В. Достойна // Вісние Національного університету "Львівська політехніка". Серія фізико-математичні науки. - №687, 105-121.
25. Zagorodnyuk A. 2006 : Spectra of Algebra of Entire Functions on Banach Spaces/ A. Zagorodnyuk // Proceeding Of The American Mathematical Society, 15-22.

## ON PROPERTIES OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS

**Abstract.** Proprties of matrix-valued continuous and some piecewise-continuous functions is investigated.

**Key words:** operator, invertebilities, spectrum, common spectrum.