

Helena KAZIEKO, Lucyna KAZIEKO

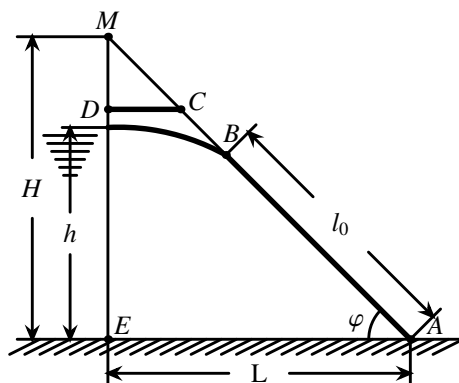
Katedra Zastosowań Matematyki SGGW
Department of Applied Mathematics WAU

Przepływ w szczelinach anizotropowego ośrodka porowatego* **Flow in anisotropic fractured porous media**

Słowa kluczowe: przepływ, anizotropowy ośrodek porowaty
Key words: flow, anisotropic porous media

Wprowadzenie

Rozpatrujemy przepływ w szczelinie mającej kształt trapezu (rys. 1). Przyjmujemy, że grunt szczeliny jest jednorodny i anizotropowy; główna oś anizotropii jest pozioma.



RYSUNEK 1. Schemat szczeliny
FIGURE 1. Scheme of crack

Przyjmujemy oznaczenia takie jak na rysunku 1. Uzupełnimy trapez ABCDE do trójkąta AME.

* Z uwagi na rozbudowane wzory artykuł złożono jednołamowo.

Oznaczamy:

- \mathfrak{K} i \mathfrak{K}' – współczynniki filtracji, odpowiednio poziomy i pionowy,
 q – wydatek filtracyjny szczeliny trapezoidalnej ABCDE,
 Q – wydatek filtracyjny szczeliny trójkątnej AME przy napełnieniu jej do szczytu.

Wprowadzimy wielkości bezwymiarowe:

$$\tilde{h} = \frac{h}{H}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{Q}$$

Podstawowe zagadnienie anizotropowe można sprowadzić do zagadnienia izotropowego (Połubarinowa-Koczina 1942).

Sformułowanie zagadnienia

Z hydromechanicznego rozwiązania dla izotropowej trójkątnej szczeliny (Nelson-Skorniakow 1947) łatwo znaleźć wydatek:

$$Q = \frac{\mathfrak{K}H^2}{L}$$

Z powyższej zależności wynika, że wydatek filtracyjny (Q) nie zależy od poziomego współczynnika filtracji, ponieważ linie prądu, tj. trajektorie ruchu cząstek wody, w tym przypadku są poziome.

Rozważymy dwie wartości \mathfrak{K}' przy niezmięnionej wartości \mathfrak{K} :

1. Gdy $\mathfrak{K}' = 0$, to linie prądu są poziome. Hydromechaniczny schemat filtracji pokrywa się z hydraulicznym schematem podanym przez Pawłowskiego i Melleszczenko (1931). W tym przypadku znajdujemy zależność:

$$\tilde{q} = \tilde{h} - (\tilde{h} - 1) \ln(1 - \tilde{h}) \quad (1)$$

2. Gdy $\mathfrak{K}' \rightarrow \infty$, to linie ekwipotencjalne są położone wertykalnie i schemat hydromechaniczny pokrywa się ze schematem Dupuit (1863). W tym przypadku znajdujemy zależność:

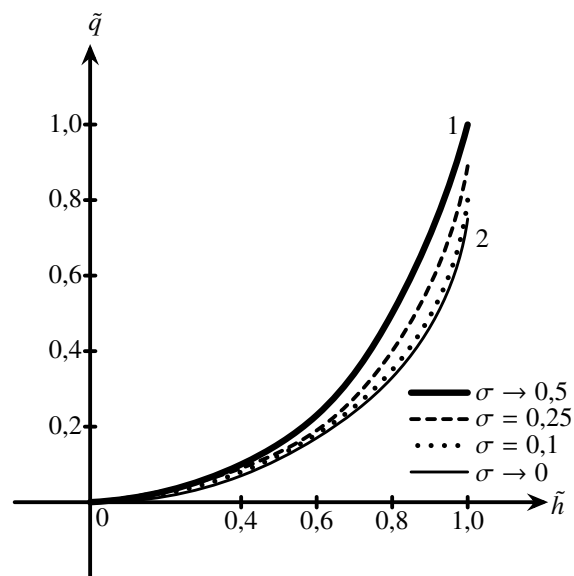
$$\tilde{q} = 1 - \sqrt{1 - \tilde{h}^2} \quad (2)$$

Z uwagi na dalsze obliczenia celowe jest wyrazić kąt φ nachylenia zbocza szczeliny do jej podstawy następująco:

$$\varphi = \pi\sigma, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \sigma < 1$$

Zauważmy, że dla $\sigma = 0$ i $\sigma = \frac{1}{2}$, schemat obliczeniowy szczeliny traci sens, chociaż wzory (1) i (2) zachowują sens matematyczny. Mając na uwadze zasadność praktyczną, rozważymy przypadki, gdy $\sigma \rightarrow \frac{1}{2}$ oraz $\sigma \rightarrow 0$, a także $\sigma = 0,25$ i $\sigma = 0,1$.

Na rysunku 2 podano wykresy zależności (1) – krzywa 1, oraz zależności (2) – krzywa 2 dla określonych wartości σ .



RYSUNEK 2. Wydatek przepływu wody w szczelinie
FIGURE 2. Water discharge of crack

Maksymalna bezwzględna rozpiętość obu krzywych wynosi 0,112 i zachodzi, gdy $\tilde{h} = 0,946$. Maksymalne względne odchylenie krzywej 1 od krzywej 2 wynosi 19,6% i zachodzi, gdy $\tilde{h} = 0,822$. Można przyjąć, że przy jednostajnej zmianie \mathfrak{K}' od ∞ do 0 zmiana wydatku \tilde{q} będzie także jednostajna i krzywe $\tilde{q} = \tilde{q}(h)$ dla szczelin izotropowych w rozpatrywanym ośrodku będą leżały między wyżej omawianymi krzywymi 1 i 2. Sprawdzeniem tej hipotezy zajmowała się Połubarinowa-Koczina (1942).

Rozwiązanie zagadnienia

Połubarinowa-Koczina (1940) zajmowała się przepływem w szczelinie znajdującej się w ośrodku izotropowym. Wyprowadziła wzory na potencjał zespolony (Hurwitz i Courrant 1968) oraz podała zależności opisujące podstawowe wielkości:

$h, L, l_0, \frac{q}{\kappa}$. Wyrażają się one za pomocą całek z funkcji hipergeometrycznych

Gausa. Wzory te zostały przez nas doprowadzone za pomocą przekształceń Gausa (1876) do obszarów zbieżności szeregów hipergeometrycznych (Gradstein i Rizik 1962):

$$l_0 = A \int_0^1 \frac{F\left(\sigma; \sigma; \sigma + \frac{1}{2}; x\right)}{x^{1-\sigma} \sqrt{x+a}} dx \quad (3)$$

$$h = A \int_0^{\frac{1}{1+a}} \frac{F\left(\sigma; \frac{1}{2}; \sigma + \frac{1}{2}; 1-x\right)}{(1-x)^{1-\sigma} \sqrt{x} \sqrt{1-(1+a)x}} dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{\kappa} &= A \frac{(-\sigma)!^2 \left(\frac{1}{2} - \sigma\right) \sin^2 \varphi}{\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)!^2 \cos \varphi} \int_0^1 \frac{F\left(1-\sigma; 1-\sigma; \frac{3}{2} - \sigma; 1-x\right)}{(1-x)^{\sigma-\frac{1}{2}} \sqrt{x(x+a)}} dx = \\ &= l_0 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - A \frac{(-\sigma)!^2 \left(\frac{1}{2} - \sigma\right)}{\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)!^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi} \int_0^1 \frac{F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \sigma; x\right)}{\sqrt{x(x+a)}} dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L &= A \int_0^1 \frac{F\left(\sigma; \sigma; \sigma + \frac{1}{2}; -ax\right)}{a^{\frac{1}{2}-\sigma} x^{1-\sigma} \sqrt{1-x}} dx = \\ &= A \int_0^1 \frac{F\left(\sigma; \sigma; \sigma + \frac{1}{2}; -x\right)}{x^{1-\sigma} \sqrt{a-x}} dx + A \int_0^1 \frac{F\left(\sigma; \frac{1}{2}; \sigma + \frac{1}{2}; \frac{ax}{1+ax}\right)}{a^{\frac{1}{2}-\sigma} x^{1-\sigma} (1+ax)^\sigma \sqrt{1-x}} dx \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

- a – parametr określający szerokość szczeliny,
- A – stała.

Przy obliczeniach wielkości l_0, L, h skorzystano z rozwinięć w szeregi hipergeometryczne. Badaniem zbieżności szeregów hipergeometrycznych zajmować się nie będziemy; jest to oddzielne zagadnienie matematyczne (Gradstein i Ryzik 1962).

W zagadnieniach praktycznych można ograniczyć się do małych wartości σ i $a > 1$. Przy tych założeniach można otrzymać następujące rozwinięcia:

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma+n-1)!^2 \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)! B(n+\sigma;1)}{(\sigma-1)!^2 \left(\sigma+n - \frac{1}{2}\right)! n!} F\left(\frac{1}{2}; 1; \sigma+n+1; \frac{1}{1+a}\right) \quad (7)$$

$$\int_0^1 \frac{F\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \sigma; x\right)}{\sqrt{x(x+a)}} dx = \frac{1}{\pi\sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)!^2 \left(\frac{1}{2} - \sigma\right)!}{\left(n + \frac{1}{2} - \sigma\right)! n! \left(n + \frac{1}{2}\right)!} F\left(\frac{1}{2}; 1; n + \frac{3}{2}; \frac{1}{1+a}\right) \quad (8)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} P(v_n I_1^n + \mu_n I_2^n) + \frac{(-1)^n}{\sqrt{a-1}} \frac{(\sigma+n-1)!^2 \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)!}{(\sigma-1)!^2 \left(\sigma+n - \frac{1}{2}\right)! n! (n+\sigma)} F\left(\frac{1}{2}; 1; n+\sigma+1; \frac{-1}{a-1}\right) \quad (9)$$

$$h = p \frac{\pi}{\sqrt{1+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n + 2v_n \left[\ln 2 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} + \ln \sqrt{1+a} \right]}{n B\left(n; \frac{1}{2}\right) (1+a)^n} \quad (10)$$

przy czym przyjęto następujące oznaczenia

$$I_1^n = - \int_{\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^n \ln x dx}{\sqrt{x} \sqrt{(a+1)x-1}} \quad I_2^n = - \int_{\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{x} \sqrt{(1+a)x-1}}$$

oraz

$$\frac{F\left(\sigma; \frac{1}{2}; \sigma + \frac{1}{2}; 1-x\right)}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv \frac{-p \left[(\ln x - R) F\left(\sigma; \frac{1}{2}; 1; x\right) + \alpha_n x^n \right]}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv p(\mu_n x^n - \nu_n x^n \ln x)$$

Analiza obliczeń

Korzystając z otrzymanych rozwinięć przeprowadzono obliczenia wielkości: $h, L, l_o, \frac{q}{k}$, przyjmując $\sigma = 0,1$ (odpowiada to $\varphi = 18^\circ$).

Dla parametru a przyjęto wartości:

$$1; 9; 99; 999; \dots; 999999999999; 10^{18} - 1$$

Przy $\sigma = 0,1$ krzywa $\tilde{q} = \tilde{q}(h)$ jest bardzo bliska krzywej Dupuit (1863). Maksymalne rozbieżności między nimi przy $\tilde{h} < 0,8$ są mniejsze niż 1%. Wraz ze wzrostem \tilde{h} (przy $\tilde{h} < 0,95$) nie osiągają one 4%.

Przy $\sigma \rightarrow 0$ hydromechaniczny schemat filtracji jest bliski schematowi Pawłowskiego (1931). Krzywa $\tilde{q} = \tilde{q}(h)$ pokrywa się w granicznym przejściu z krzywą 2. Potwierdziły to obliczenia przy bardzo małych wartościach σ .

Podsumowanie

W praktyce hydrotechnicznej dla małych szczelin mamy $\text{ctg} \varphi \geq 1,5$, dla dużych zaś $\text{ctg} \alpha \geq 2,5$.

Z obliczeń wynika, że przy $\text{ctg} \varphi = 1$ odchylenia hydromechanicznych zależności od krzywej 2 są stosunkowo niewielkie. Można więc wnioskować, że obliczenia wydatku filtracyjnego dla rozpatrywanego typu szczelin otrzymane przez Pawłowskiego (1931) mogą być zadowalające dla praktyki inżynierskiej.

Dla małych wartości a i wielkości L i l_0 dopuszczają całkowanie wyraz po wyrazie, co w konsekwencji prowadzi do szeregów postaci (7)–(8). Dla dwóch pozostałych parametrów należałoby wyprowadzić bardziej złożone rozwinięcia, dzieląc przedział całkowania na dwie części. Z uwagi na złożoność otrzymanych wzorów nie będziemy ich przytaczać.

Obliczenia przy $a \leq 1$ dowodzą, że gdy $\sigma \rightarrow 0,5$, to krzywa $\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{h})$ jest bliska krzywej 1, przybliżając się do niej od dołu.

Przechodząc do określenia kwatery wyciekania, należy zwrócić uwagę na to, że stosunek wydatku filtracyjnego do dawki wyciekania w zasadzie nie zależy od konstrukcji szczeliny, określając się nachyleniem danego zbocza. Obliczenia dla $\sigma = 0,1$ potwierdziły tę tezę. Wyżej wymieniony stosunek przy $\tilde{h} < 0,85$ zachowuje stałą wartość równą 0,0870. Zwiększając \tilde{h} do wartości 0,95, stosunek ten jest bliski wartości 0,0883, gdy $\tilde{h} = 1$, mamy $\sin \alpha \operatorname{tg} \varphi = 0,1004$. Ponieważ w praktyce \tilde{h} jest mniejsze od 0,75, więc z dużą dokładnością można wykorzystać w obliczeniach stosunek $f(\varphi) = \frac{q}{\kappa l_0}$.

Ostatnią zależność można przedstawić w postaci:

$$\frac{\kappa l_0}{q} = \frac{4^\sigma}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k} [k - 2(1 - \sigma)]!}{(n + \sigma)^2 k! [-2(1 - \sigma)]!} \quad (11)$$

Ostatni wzór może być wykorzystany w praktyce inżynierskiej do obliczania wielkości dawek wyciekania.

Wobec powyższego rozwiązanie dla dopływu z nieskończoności daje w zagadnieniu wydatku filtracyjnego cały lokalny obraz filtracji w rozważanych granicach wyciekania i dolnego klina szczeliny.

Zagadnienie związane z wpływem górnego klina szczeliny może być rozwiązane poprzez uzupełnienie obszaru filtracji do prostokąta. Wielkość tego prostokąta można określić lokalnie, rozpatrując górny klin w kontekście wydatku filtracyjnego. Z analizy obliczeń dopływu do poziomego drenażu w trapezoidalnych szczelinach otrzymano przybliżoną zależność określającą szerokość dopełniającego prostokąta:

$$\Delta L = \frac{h}{2 + \operatorname{tg} \Psi} \quad (12)$$

gdzie Ψ – kąt nachylenia górnego zbocza do poziomu.

Literatura

- DUPUIT J. 1863: Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux. Paris.
GAUSS S.F. 1876: Werke.
GRADSTEIN I.S., RYŽIK I.M. 1962: Tablicy integralow, sum, riadow i proizwedenij. Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa.
HURWITZ A., COURANT R. 1968: Teorija funkcii. Nauka, Moskwa.
LE V-ăn TIÊM 1962: Ob odnoj zadacze filtracji w dwuchsłojnom grunte. *Thông báo khoa hoc* 1, 1: 19–25.
NELSON-SKORNIAKOW F.B. 1947: Filtracja w odnorodnej srede. Nauka, Moskwa.
PAWŁOWSKI N.N. 1931: O filtracji wody czerez zemlanyje płotiny. L. Kubucz, Moskwa.
POŁUBARINOWA-KOCZINA J.P. 1942: O filtracji w anizotropnom grunte. *Prikl. Mat. i Mech.* 4, 2: 101–104.

Summary

Flow in anizotropic fractured porous media. Flow in trapezoidal crack of anizotropic porous media is analysed. Flow modelling is based on Dupuite law assuming two-dimensional situation. A new equations for calculation of water discharge in open crack are proposed.

Authors' address:

Helena Kazięko, Lucyna Kazięko
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Katedra Zastosowań Matematyki
ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa,
Poland