

## MODELE I WŁASNOŚCI MECHANICZNE TKANKI KOSTNEJ

**Słowa kluczowe:** Model tkanki kostnej, własności mechaniczne kości, struktura trabekularna.

### Wstęp

Skomplikowany układ biologiczny, jakim jest tkanka kostna wymusza istotne założenia upraszczające i ograniczające modele fizyczne i matematyczne ją opisujące. Nie istnieje jeden podstawowy model definiujący materiał kostny w sensie równania konstytutywnego, jakim na przykład jest uogólnione prawo Hooke'a w teorii sprężystości. Różni autorzy, w zależności od funkcji, wymagań, możliwości adaptacyjnych obliczeniowych, stosują różne modele opisu, przy czym należy zaznaczyć, że zazwyczaj w literaturze spotyka się podejście do kości jako do materiału sprężystego o różnym stopniu anizotropii. Celem tego artykułu jest porównanie różnych modeli opisu tkanki kostnej i zamodelowania jej struktury.

### Modele sprężyste

Liniowe modele sprężyste są najczęściej używanymi modelami w biomechanice tkanki kostnej, tzn. wykorzystuje się równanie konstytutywne w postaci uogólnionego prawa Hooke'a:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

gdzie:  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}$  – składowe tensorów naprężenia i odkształcenia,  $c_{ijkl}$  – tensor 4 rzędu stałych sprężystości. Przy założeniu istnienia potencjału sprężystości, determinującego symetrię tensora sprężystości (Nowacki, 1970), w najogólniejszym przypadku ciała anizotropowego otrzymuje się 21 niezerowych stałych materiałowych. Badania wytrzymałościowe i symulacje numeryczne przeprowadzone przez van Rietbergena B., Weinansa H., Huiskesa R. i Odgaard A. (1995) (Rietbergen B., Weinans H., Huiskes R., Odgaard A., 1995) oraz Ulricha D., Mullera R., i Ruegseggera P. (1996) (Ulrich D., Muller R., Ruegsegger P., 1996) wykazały, że wystarczającym i w pełni oddającym własności sprężyste struktury kości (zarówno form

zbitej jak i trabekularnej) jest opis uwzględniający różne własności w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. Zawężając wobec tego tkankę kostną do ciała ortotropowego otrzymujemy następującą macierz:

$$c_{ij} \leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Określającą stałe sprężystości tkanki kostnej. Takie podejście definiuje materiał ortotropowy o 12 niezerowych stałych materiałowych, z których tylko 9 jest niezależnych, gdyż:

$$\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{\nu_{21}}{E_{22}}; \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}}; \frac{\nu_{23}}{E_{22}} = \frac{\nu_{32}}{E_{33}} \quad (3)$$

Dla wielu form tkanki kostnej (np. kości długie, trzon żuchwy) uzasadnione jest przyjęcie tzw. izotropii poprzecznej, co ogranicza liczbę niezerowych stałych materiałowych do 6, z których tylko 5 jest niezależnych. Przy przyjęciu jako płaszczyzny izotropii np. płaszczyzny (1-2) otrzymuje się  $E_{11} = E_{22}; E_{33}; \nu_{12} = \nu_{21}; \nu_{31} = \nu_{32}; G_{23} = G_{31}$  oraz zależność:

$$G_{12} = \frac{E_{11}}{[2(1 + \nu_{12})]} \quad (4)$$

W najprostszym, ale i najczęściej stosowanym podejściu, tkankę kostną traktuje się jako materiał izotropowy definiowany tylko poprzez dwie stałe materiałowe: moduł sprężystości  $E$  i stałą Poissona  $\nu$ . Należy przy tym zaznaczyć, że dla materiału izotropowego często przyjmuje się zależność

modułu Younga od innych wielkości, np. od gęstości  $\rho$ , czy prędkości odkształcania ( $d\varepsilon/dt$ ), w postaci:

$$E = A\rho^B(d\varepsilon/dt)^C$$

czy

$$E = a\rho^b[c + (d\varepsilon/dt)^d]$$

gdzie stałe  $A, B, C, a, b, c, d$  wyznacza się eksperymentalnie.

W tabeli 1 (Buskirk W.C. Ashman R.B., Nowin S.C., 1984) zestawiono stałe materiałowe otrzymane na drodze badań wytrzymałościowych i ultradźwiękowych dla zwartej tkanki kostnej żuchwy w odniesieniu do kości udowej i piszczelowej człowieka.

**Tab. 1.** Stałe materiałowe kości [4, 5, 6].

Rodzaj kości	Kość udowa (Reily D.T., Burstein A.H. 1975)	Kość piszczelowa	Kość udowa	Żuchwa
Metoda pomiaru	mechaniczna	mechaniczna	ultradźwiękowa	ultradźwiękowa
$E_{11}$	11.50	6.91	13.00	11.30
$E_{22}$	11.50	8.51	14.40	12.50
$E_{33}$	17.00	18.40	21.50	20.50
$G_{12}$	3.60	2.41	4.75	3.90
$G_{13}$	3.28	3.56	5.85	4.80
$G_{23}$	3.28	4.91	6.56	5.70
$\nu_{12}$	0.58	0.49	0.37	0.43
$\nu_{13}$	0.31	0.12	0.24	0.24
$\nu_{23}$	0.31	0.14	0.22	0.23
$\nu_{21}$	0.58	0.62	0.42	0.45
$\nu_{31}$	0.46	0.32	0.40	0.41
$\nu_{32}$	0.46	0.31	0.33	0.37

### Modele strukturalne - kość jako materiał kompozytowy

Wielu autorów dla tkanki kostnej tworzy modele strukturalne, tzn. rozpatruje kość jako materiał kompozytowy (Katz J.L., 1981, Katz J. L., 1971,

Piekarski K., 1971, Currey J. D. 1987). W przypadku tym przyjmuje się, że kość składa się z dwóch faz: mineralnej i kolagenowej. Najprostsze podejście stosowane w mechanice kompozytów polega na wykorzystaniu do określenia stałych materiałowych reguły mieszania w postaci np. liniowej:

$$E = V_m E_m + V_c E_c; V_m + V_c = 1 \quad (5)$$

gdzie:  $E$  oznacza moduł sprężystości kości jako kompozytu  $E_m$ ,  $E_c$  oraz  $V_m$ ,  $V_c$  - odpowiednio moduły sprężystości oraz udziały objętościowe fazy mineralnej i kolagenowej.

Rozwinięciem tej najprostszej formuły są spotykane w literaturze (Katz, 1981) nieliniowe modyfikacje reguły mieszania związane z wymiarami lamelli tworzących fazę mineralną tzn. ich długością  $L$ , promieniem  $r_0$ , polem powierzchni poprzecznej  $A_m$

$$E = E_m V_m (1 - \operatorname{tgh} \frac{\beta L}{2}) / (\beta L / 2) + E_c V_c, \quad (6)$$

gdzie:

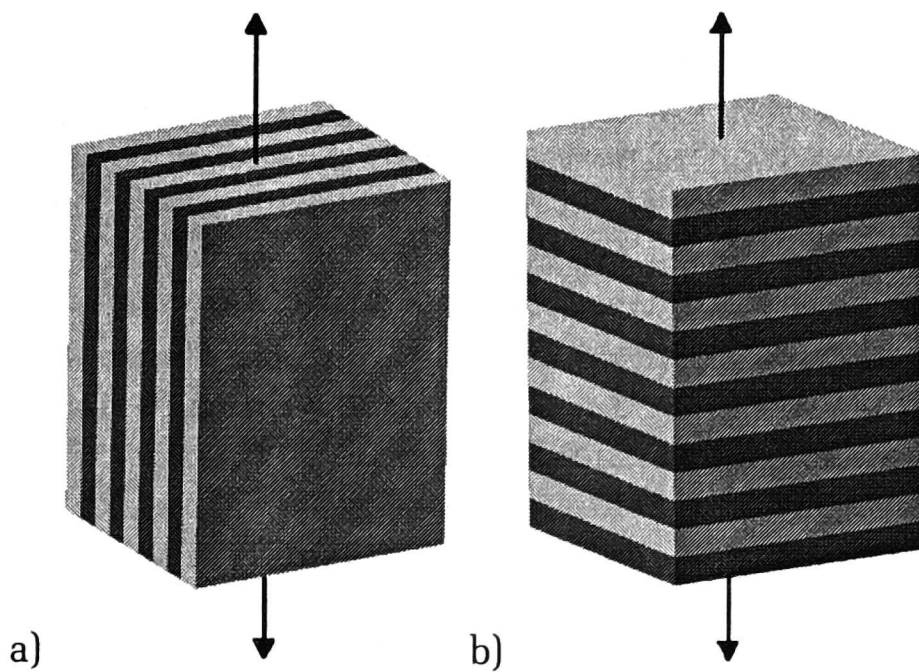
$$\beta = \sqrt{(G_c / E_m) \frac{2\pi}{A_m} \ln \frac{R}{r_0}}, \quad (7)$$

$G_c$  - moduł ścinania fazy kolagenowej;  $2R$  - odległość osi dwóch sąsiednich lamelli fazy mineralnej, czy wreszcie uwzględniające rozkład i orientację lamelli względem kierunków naprężeń

$$E = E_c V_c \frac{1 - \nu_c \nu_m}{1 - \nu_c^2} + \sum_n E_m V_m \alpha_n (\cos^4 \varphi_n - \nu_m \cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n) \quad (8)$$

gdzie:  $\nu_c, \nu_m$  - stałe Poissona faz: kolagenowej i mineralnej;  $\alpha_n$  - udział objętościowy tych lamelli (krystalitów) fazy mineralnej, których oś leży pod kątem  $\varphi_n$  w stosunku do osi naprężenia.

Modele strukturalne kości spotyka się również jako przykładowe konstrukcje wielowarstwowe składające się z warstw materiału kolagenowego i mineralnego (Currey, 1987). Zasadę tworzenia takiego modelu kompozytowego przedstawia ryc.1.



**Ryc. 1** Modele strukturalne kości jako przykładowe konstrukcje wielowarstwowe składające się z warstw materiału kolagenowego i mineralnego: a) model Voigta, b) model Reussa

W biomechanice tkanki kostnej dwa podstawowe rodzaje ułożenia warstw: mineralnej i kolagenowej określa się, przez analogię do liniowych modeli mechanicznych w reologii, odpowiednio jako modele Voigta i Reussa.

W pierwszym przypadku, jeżeli kość jako konstrukcja przykładowa obciążona jest równoległe do warstw, to sztywność kompozytu jest sumą ważoną sztywności warstw kolagenowej i mineralnych

$$E = E_c V_c + E_m V_m \quad (9)$$

W przypadku normalnego w stosunku do warstw obciążenia kości sumowaniu podlega podatność, tzn.

$$\frac{1}{E} = \frac{V_c}{E_c} + \frac{V_m}{E_m} \quad (10)$$

We wzorach (9) oraz (10), analogicznie jak zależność (5), przez  $E$  oznaczono moduł sprężystości kości jako kompozytu, natomiast przez  $E_m$ ,  $E_c$  oraz  $V_m$ ,  $V_c$  odpowiednio modułu sprężystości i udziały objętościowe fazy mineralnej i kolagenowej.

## Kość jako ciało porowate

W opisie kości jako materiału porowatego przyjmuje się, że jest to ciało sprężyste z wewnętrznymi pustkami. W zależności od kształtu i charakteru rozkładu pustek macierz efektywnych modułów sprężystości podlega różnemu stopniowi anizotropii. Jednorodny i przypadkowy w trzech kierunkach rozkład pustek prowadzi do materiału izotropowego. Przypadkowy i nie ukierunkowany rozkład pustek w dwóch kierunkach narzuca natomiast izotropię poprzeczną. Pustki modeluje się na ogół w postaci sferycznej, elipsoidalnej, dyskowej lub igłowej.

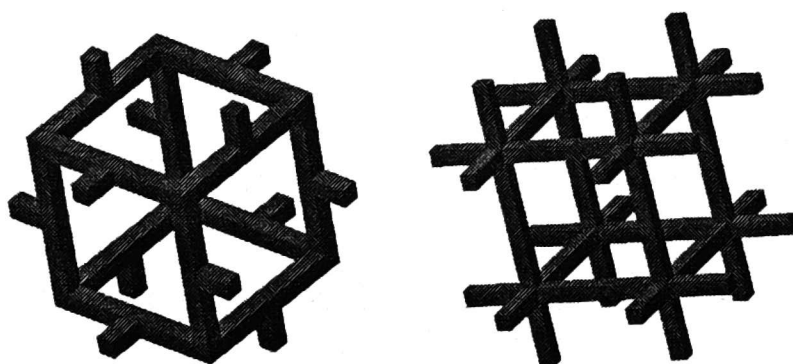
Przykładowo dla sferoidalnych pustek przypadkowo rozłożonych w izotropowej macierzy kostnej, odpowiednio o modułach sprężystości i ścinania  $E$  oraz  $G$ , efektywne stałe sprężystości kości jako materiału kompozytowego wynoszą:

$$\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{c_1}{1 - c_0 \alpha_0}, \quad \frac{G}{G_0} = 1 - \frac{c_1}{1 - c_0 \beta_0} \quad (11)$$

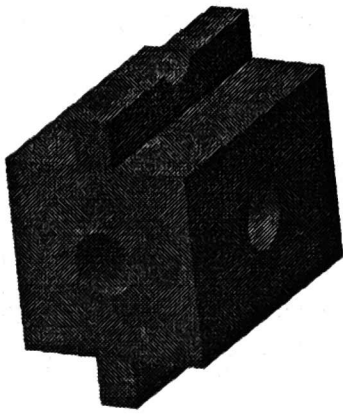
gdzie  $c_0$  i  $c_1$  stanowią udziały objętościowe kości i pustek, a stałe  $\alpha_0$  i  $\beta_0$  zależą od stałej Poissona.

W ostatnich latach w teorii modeli tkanek kostnych, szczególnie dla przypadku struktury trabekularnej, rozwijane są przestrzenne modele wypełnienia struktury kostnej.

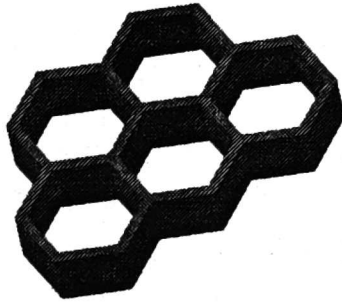
Przykładowe modele symulujące mikrostrukturę kości trabekularnej, o różnych efektach wypełnienia, przedstawia ryc. 2 i ryc. 3.



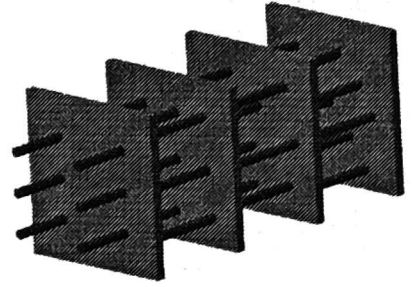
Ryc. 2. Przestrzenne modele wypełnienia struktury trabekularnej kości  
– modele prętowe



a) model płytowy  
z otworami



b) struktura  
plastra miodu



c) model płytowo-  
prętowy

**Ryc. 3.** Przestrzenne modele wypełnienia struktury trabekularnej kości.

### Wnioski

Przedstawiony w artykule przegląd modeli oraz równań konstytutywnych tkanek kostnych dowodzi, że nie funkcjonuje jeden model definiujący materiał kostny jako ciało odkształcalne. Najczęściej spotykane są modele sprężyste, które też znajdują najszerszą reprezentację i potwierdzenie zgodności stałych materiałowych w badaniach doświadczalnych. Z uwagi na złożoność własności tkanki kostnej uzasadnione jest upraszczanie ich modeli ale zgodnie z zasadą: *...model powinien być tak prosty jak to możliwe, ale nie prostszy...* (Cowin, 1995).

### Streszczenie

W artykule tym przedstawiono stosowane w technice obliczeniowej modele tkanki kostnej. Z punktu mechaniki, najistotniejszą rolę w zdolności układu do przenoszenia obciążeń pełni tkanka kostna zwarta. Dlatego też, przedstawione w tej pracy modele dotyczą w większości tkanki zwartej. Specyficzną grupę modeli fizycznych w biomechanice są, oparte na teorii funkcjonalnej adaptacji, modele tzw. sprężystości adaptacyjnej.

Przedstawiono również kość jako strukturę porowatą oraz jako materiał kompozytowy w tym modelowanie istoty trabekularnej w odniesieniu do teorii homogenizacyjnej.

## MODELS AND MECHANICAL ABILITIES OF A BONE TISSUE

**Key words:** Bone tissue model, bone mechanical abilities, trabecular meshwork.

### Summary

In his article, we have some models of bone tissues used in technology. Dense bone tissue, from the point of view of mechanics, fulfills the most important role in the system of workload transfer. Therefore, models presented in this work concern mentioned above structure. The specific group of physical models in the field of biomechanics, are so called models of elastic adaptation which are based on the theory of functional adaptation. We have got the bone described here as a porous structure and a composite material. Authors also present the modeling of trabecular meshwork that refers to the theory of homogenization.

### Literatura

1. Ashman R.B., Cowin S.C., van Buskirk W.C., Rice J.C., (1984), *A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone*, Journal of Biomechanics, vol. 17, no. 3.
2. Buskirk W.C. Ashman R.B., Nowin S.C., (1984), *A continuous wale technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone*, Journal of Biomechanics, vol.17, no.3 .
3. Cowin S.C., (1995), *Proceed. Bone Cell and Tissue Mechanics*, C.I.S.M., Udine.
4. Currey J.D., (1987), *Models of bone structure - mechanical properties*, Course on Bone Mechanics, C.I.S.M., Udine.
5. Katz J.L., (1981), *Composite Material Models for Cortical Bone*, Trans ASME, New York.
6. Katz J.L., (1971), *Hard tissue as a composite material*, Journal of Biomechanics, vol.4 no. 5.
7. Nowacki W., (1970), *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa.
8. Piekarski K.,(1971), *Analysis of bone as a composite material*, International Journal of Engineering Science, vol. 7.
9. Rho J.-Y., (1994), *Elastic properties of the human mandible*, proceedings 2nd World Congress of Biomechanics, Amsterdam.
10. Rietbergen B., Weinans H., Huiskes R., Odgaard A., (1995), *A New method to determine trabecular bone elastic properties and loading using micromechanical finite-element models*, Journal of Biomechanics, vol. 28, no. 1.
11. Ulrich D., Muller R., Ruegsegger P.,( 1996), *The quality of trabecular bone evaluated with micro-computed tomography, FEA and mechanical testing*, proceedings 10th Conf. Of the European Society of Biomechanics, Leuven.