

Helena KAZIEKO, Lucyna KAZIEKO

Katedra Zastosowań Matematyki SGGW
Department of Applied Mathematics WAU

Matematyczny model nawodnień powierzchniowych* **Mathematical modelling of basin irrigation system**

Słowa kluczowe: nawodnienie powierzchniowe, model matematyczny
Key words: mathematical modelling, basin irrigation system

Wprowadzenie

Przedmiotem pracy jest nawadnianie powierzchniowe grawitacyjne. Przyjmuje się, że elementy tego nawadniania (takie, jak: wydajność, czas doprowadzania wody, długość nawadnianej kwatery) są optymalne, jeśli przy tym gwarantuje się równomierne uwilgotnienie gleby z zadaną normą polewu przy minimalnej stracie wody i przy dopuszczalnym podmyciu gleby. Nieoptymalny wybór tych elementów, zwłaszcza przy dużych ich odchyleniach od wartości optymalnych, może spowodować nie tylko zwiększenie strat wody przeznaczonej do nawadniania (a co za tym idzie – np. zmniejszenie urodzajności), lecz więcej – wyprowadzenie nawadnianych gleb z korzystnego ustroju, co w konsekwencji może doprowadzić do niekorzystnego zasolenia gleby. Dlatego badanie zagadnienia optymalizacji nawodnienia ma duże znaczenie praktyczne.

Sformułowanie zagadnienia

Z punktu widzenia hydrauliki nawodnienie powierzchniowe grawitacyjne obejmuje dwa różne zjawiska: ruch strumienia w warunkach przepuszczalnego dna i ruch wody w nienasyconym ośrodku porowatym (infiltracja). Każda z tych postaci ruchu ma charakter nieustalony.

*Z uwagi na rozbudowane wzory artykuł złożono jednołamowo.

Zjawisko przesuwania się nawadniającego strumienia w ramach jednowymiarowych nieustalonych ruchów opisuje się układem równań różniczkowych dynamiki i ciągłości:

$$\begin{cases} 2 \left[(U + C) \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} \right] + (U + C) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = g \left(i - g \frac{3}{2} n_0^2 \frac{U^2}{C^3} + V \frac{U - C}{C^2} \right) \\ 2 \left[(C - U) \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial t} \right] + (U - C) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} = g \left(i - g \frac{3}{2} n_0^2 \frac{U^2}{C^3} + V \frac{U + C}{C^2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

gdzie:

H – głębokość strumienia nawadniającego,

U – średnia prędkość strumienia,

$$C = \sqrt{gH}$$

g – przyspieszenie siły ciężkości,

x – współrzędna położenia,

t – czas,

i – nachylenie dna,

V – prędkość infiltracji,

n_0 – współczynnik szorstkości.

Zjawisko wsiąkania wody do gleby przedstawia nieustalony ruch wody w nie-nasyconym ośrodku porowatym. Wykorzystanie odpowiednich równań różniczkowych do otrzymania rezultatów praktycznych nie jest najlepsze, bowiem równania te zawierają jako parametr porowatość gruntu, która w realnych warunkach niejednoznacznie określa jego wodoprzepuszczalność. W takich przypadkach zazwyczaj wykorzystuje się formuły aproksymacyjne, których parametry określa się drogą eksperymentalną. Przykładem takich formuł jest wykorzystana w niniejszej pracy (Lreen i in. 1964) następująca zależność:

$$V = K_0 + (V_0 - K_0) e^{-\alpha \tau} \quad (2)$$

gdzie:

V_0 i K_0 – prędkość infiltracji odpowiednio przy $\tau = 0$ i $\tau = \infty$,

τ – czas występowania wody na powierzchni gleby,

α – parametr charakteryzujący zmniejszanie wartości V w czasie dla danej gleby.

Podstawowym elementem występującym w opisywanym zagadnieniu jest czas $\tau(x)$ występowania wody w dowolnym punkcie x powierzchni:

$$\tau(x) = t_0 - t_n(x) + t_w(x) \quad (3)$$

gdzie:

- $t_0 = t_1 + t_2$ – czas występowania wody w wyjściowym punkcie ($x = 0$),
 t_1 – czas doprowadzania wody,
 t_2 – czas, który mija po zaprzestaniu podawania wody do momentu oczyszczenia dna w punkcie wyjściowym i początku ruchu końcowego frontu,
 $t_n(x)$ – czas ruchu przedniego frontu,
 $t_w(x)$ – czas ruchu końcowego frontu.

Rozwiązanie zagadnienia

Zależność funkcyjną (3) można otrzymać poprzez scałkowanie układu równań różniczkowych (1). Jednak metody analityczne, których można w tym celu użyć, nie są wystarczające. Dlatego też zastosujemy metody przybliżone – niejawnym schemat iteracyjny.

Podstawowym problemem w rozwiązaniu postawionego zagadnienia jest znalezienie funkcyjnej zależności $\tau(x)$ zgodnie z równaniem (3) przy parametrach $V, \alpha, K_0, i, n_0, Q_0(t), t_1, l_0$; gdzie: Q_0 – wydajność nawodnienia (w ogólnym przypadku zależy od czasu), l_0 – optymalna długość nawadnianego pasma. Parametry Q_0, t_1, l_0 trzeba tak dobrać, aby spełniony był warunek:

$$\tau(x) = \tau_0(x), \quad 0 \leq x \leq l_0$$

gdzie $\tau_0(x)$ – czas wsiąkania wody w warunkach pionowej jednowymiarowej infiltracji.

Jeżeli wyjściowa wilgotność gleby względem długości jest jednakowa, to $\tau_0(x) = \text{const}$.

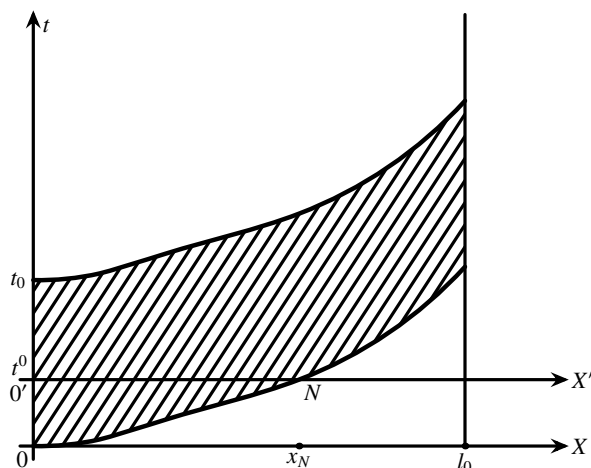
Rozwiązania układu (1) będziemy poszukiwać w obszarze zakreskowanym na rysunku 1. Krzywe górna i dolna dotyczą odpowiednio końcowego i przedniego frontu nawodnienia. Pionowa odległość między tymi krzywymi wyraża się wzorem (3).

Można wyróżnić trzy kierunki postępowania.

Kierunek pierwszy – poszukiwanie przybliżonych rozwiązań analitycznych na drodze szeregu uproszczeń układu równań (1), umożliwiających jego całkowanie. Takie rozwiązania otrzymano w pracach np. Faure i Nahasa (1961).

Kierunek drugi – wybór optymalnych elementów nawadniania drogą przeprowadzenia doświadczeń związanych z omawianym nawodnieniem.

Ogólną liczbę niezbędnych doświadczeń można określić wzorem (Montuori 1964) – wzór ten można udowodnić metodą indukcji matematycznej:



RYSUNEK 1. Nawadniany obszar
FIGURE 1. Irrigation system

$$N = \lambda \cdot n^m \quad (4)$$

gdzie:

- m – liczba elementów nawodnienia,
- n – liczba wyników dla każdego elementu,
- λ – liczba powtórzonych wyników.

Jak wynika ze wzoru (4), nawet przy niedużych wartościach parametrów:

$$m = 3, \quad n = 3, \quad \lambda = 2$$

liczba niezbędnych doświadczeń jest dostatecznie duża ($N = 54$). Gdy $m = 4$, $n = 4$, $\lambda = 2$, mamy $N = 512$.

Podstawowa trudność leży w tym, że przy badaniu wpływu jakiegokolwiek jednego elementu nawodnienia (doświadczenia przeprowadza się dla różnych wartości tego elementu), inne elementy (topografia, pogoda, gleba) powinny pozostawać stałe. Stworzenie takich warunków wydaje się praktycznie niemożliwe, co podkreślają też autorzy przeprowadzonych doświadczeń Faure i Nahas (1961), Sudobiczer i Szurin (1968).

Kierunek trzeci, któremu poświęcona jest niniejsza praca, to zamiana w dużej części eksperymentów fizycznych ich odpowiednikami matematycznymi i w konsekwencji zastosowanie metod numerycznych.

Przy tym podejściu liczbę doświadczeń związanych z omawianym nawodnieniem można zredukować do minimum. Zaletą tego kierunku postępowania leży nie tylko w tym, że prowadzi on do rozwiązania postawionego zagadnienia, lecz że istnieje możliwość oceny dokładności przybliżonych analitycznych rozwiązań i określenie zakresu ich zastosowania.

Metody numeryczne rozwiązania zagadnienia ruchu strumienia wody po suchym nieprzepuszczalnym korycie można znaleźć m.in. w pracach Sudobiczer

i Szurin (1968), Faure i Nahasa (1961), Montuori (1964). Podobnych prac dotyczących przepuszczalnego dna nie znamy.

Ponadto w niniejszej pracy obie granice obszaru – lewa i prawa – są ruchome i można je określić w wyniku obliczeń.

Rozpatrzmy warunki graniczne, które można spotkać w praktyce przy omawianym nawodnieniu. Warunki na granicy obszaru nawadnianego określamy następująco:

Lewa nieruchoma granica:

$$x = 0, \quad UH = Q_0, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (5)$$

$$x = 0, \quad Q_0 = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_0 \quad (6)$$

Lewa ruchoma granica:

$$x = x_0(t), \quad C = H = 0, \quad t \geq t_0 \quad (7)$$

Prawa ruchoma granica:

$$x = x_N(t), \quad C = H = 0, \quad 0 \leq t \leq t(s) \quad (8)$$

Prawa nieruchoma granica:

- nawodnienie bez zrzutu

$$x_N = S, \quad U = 0, \quad t \geq t(s) \quad (9)$$

- nawodnienie ze zrzutem

$$x_N = S, \quad H = H_{kr}, \quad t \geq t(s) \quad (10)$$

gdzie:

$x_0(t), x_N(t)$ – zmienne (odcięte) położenia odpowiednio końcowego i przedniego frontu,

S – długość odcinka nawadniania,

H_{kr} – krytyczna głębokość strumienia przy zrzucie,

$t(s)$ – czas ruchu przedniego frontu na długości S .

Ponieważ rozwiązanie układu (1) powinno spełniać określone warunki graniczne, więc w danym przypadku można mówić tylko o mieszanym zagadnieniu Cauchy dla układu (1) (Faure i Nahas 1961).

W naszym zagadnieniu powinien być znany zarówno warunek graniczny:

$$U(0, t), \quad H(0, t) \quad (11)$$

jak i warunek początkowy:

$$U(x, 0), \quad H(x, 0) \quad (12)$$

Charakterystyczną osobliwością rozpatrywanego zagadnienia o ruchu strumienia po suchym przepuszczalnym dnie jest to, że zamiast warunku (11) mamy:

$$Q_0(0, t), \quad H(x_N) = 0 \quad (13)$$

gdzie $Q_0 = UH$.

Przy sporządzeniu schematu różnicowego, jako „zerowe” pasmo czasu – zamiast osi x' musimy rozpatrzyć pewną oś x (rys. 1), na której muszą być zadane szukane funkcje U i H . Wówczas warunek (12) przyjmie postać:

$$U(x, t^0), \quad H(x, t^0) \quad (14)$$

Warunek (14), jak również położenie punktu N (rys. 1) w przypadku nieprzepuszczalnego dna zadaje się intuicyjnie (Sudobiczer i Szurin 1968).

Niedokładności w zadaniu warunku początkowego (14) znikają po kilku krokach. W rozpatrywanym zagadnieniu sytuację tę usprawiedliwia istnienie przybliżonego analitycznego rozwiązania dla dolnej krzywej (rys. 1), które z wystarczającą dokładnością określa położenie punktu $N(t^0)$. Przy tym ze względu na czasochłonność obliczeń numerycznych wartość t^0 można przyjmować dowolnie dużą.

Rozwiązanie wiążące x i t wzdłuż dolnej krzywej (rys. 1) ma postać (Lreen i in. 1964):

$$\int_0^{t^0} Q_0 dt = l \cdot \ln Z \left[H_0 + \frac{(V_0 - K_0)t}{\alpha t - \ln Z} \cdot \left(1 - \eta \frac{l}{x_N} \ln Z \right) \right] \quad (15)$$

gdzie:

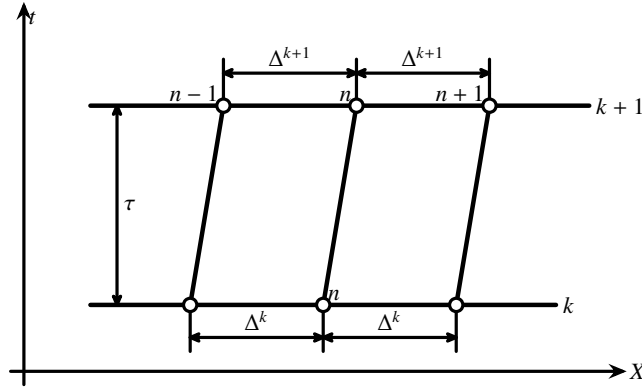
$$H_0 = \frac{V}{x_N}, \quad Z = \frac{l}{l - x_N}, \quad l = \frac{Q_0}{K_0}, \quad \eta = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t}$$

V – objętość nawadniającego strumienia,

x_N – długość nawadniającego strumienia.

Przy nawadnianiu powierzchniowym grawitacyjnym przemieszczenie frontu do przodu przebiega bardzo wolno, wskutek wsiąkania wody do gruntu. Szczególnie intensywne wchłanianie ma miejsce w pobliżu przedniego frontu. Dlatego w przedniej części nawadniającego strumienia albo występuje nieciągła fala, albo ona w ogóle nie powstaje, albo nie ma wyraźnie zarysowanego charakteru. Zatem straty energii związane z zaburzeniami strumienia można zaniedbać.

Układ równań (1) opisujący omawiane zagadnienie jest układem nieliniowych równań różniczkowych typu hiperbolicznego. W celu numerycznego rozwiązania tego układu zastosujemy niejawną ruchomą siatkę (rys. 2).



RYSUNEK 2. Schemat różnic skończonych
 FIGURE 2. Finite difference scheme

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

- k – indeks odpowiadający numerowi warstwy względem czasu,
- n – indeks odpowiadający numerowi węzła w każdej warstwie,
- Δ – krok względem odległości,
- τ – krok względem czasu,
- N – indeks odpowiadający prawej granicy,
- 0 – indeks odpowiadający lewej granicy.

Zagadnienie numerycznego rozwiązania układu (1) sprowadza się do następującego. Układamy równania różnicowe. Szukane funkcje U i C powinny być określone na warstwie $(k + 1)$ przy zadanych warunkach granicznych, jeżeli wartości ich są znane na warstwie k . Obliczenia te od warstwy do warstwy są analogiczne i można je zaprogramować. Pochodne względem x aproksymujemy następująco:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_n^k = \frac{\Delta U_n^k}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_n^k = \frac{\Delta C_n^k}{\Delta x} \quad (16)$$

Pochodne względem t , wskutek ruchomości siatki, aproksymujemy za pomocą liniowej interpolacji w przedziałach kroku siatki:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_n^k = \frac{\Delta U_n^k}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_n^k = \frac{\Delta C_n^k}{\Delta t} \quad (17)$$

Jeżeli współczynniki przy pochodnych i wyraz wolny w układzie (1) wziąć na górnej warstwie $(k + 1)$, to otrzymamy algebraiczny nieliniowy układ równań różnicowych. Dlatego obiera się je na dolnej warstwie (k) . Wyjątek stanowi wyraz odpowiedzialny za tarcie. Wyraz ten obiera się na górnej warstwie, by zagwaran-

tować większą stabilność obliczeń. W celu uniknięcia nieliniowości układu równań różnicowych wyraża się go za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora:

$$\left(\frac{U^2}{C^3}\right)_n^{k+1} = \frac{(U_n^k)^2}{(C_n^k)^3} + \frac{2U_n^k}{(C_n^k)^3}(U_n^{k+1} - U_n^k) \quad (18)$$

W rezultacie układ równań różniczkowych (1) przekształca się w równania różnicowe:

- w punktach wewnętrznych rozpatrywanego obszaru:

$$\begin{aligned} & \left[(U_n^k + C_n^k) - \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{\tau} \right] \cdot \frac{C_{n+1}^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}}{\Delta^{k+1}} + \\ & + \left[(U_n^k + C_n^k) - \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{\tau} \right] \cdot \frac{U_{n+1}^{k+1} - U_{n-1}^{k+1}}{2\Delta^{k+1}} + \\ & + 2 \frac{C_{n+1}^{k+1} - C_n^k}{\tau} + \frac{U_n^{k+1} - U_n^k}{\tau} = gi - \frac{n_0^2 \cdot g^{\frac{5}{2}}}{(C_n^k)^3} \left[(U_n^k)^2 + 2U_n^k (U_n^{k+1} - U_n^k) \right] + \\ & + gV_n^k \frac{U_n^k - C_n^k}{(C_n^k)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \left[(C_n^k - U_n^k) + \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{\tau} \right] \cdot \frac{C_{n+1}^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}}{\Delta^{k+1}} + \\ & + \left[(U_n^k - C_n^k) - \frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{\tau} \right] \cdot \frac{U_{n+1}^{k+1} - U_{n-1}^{k+1}}{2\Delta^{k+1}} + \\ & - 2 \frac{C_{n+1}^{k+1} - C_n^k}{\tau} + \frac{U_n^{k+1} - U_n^k}{\tau} = gi - \frac{n_0^2 \cdot g^{\frac{5}{2}}}{(C_n^k)^3} \left[(U_n^k)^2 + 2U_n^k (U_n^{k+1} - U_n^k) \right] + \\ & + gV_n^k \frac{U_n^k - C_n^k}{(C_n^k)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

- na lewej granicy obszaru

$$\begin{aligned}
& 2(C_0^k - U_0^k) \frac{C_1^{k+1} - C_0^{k+1}}{\Delta^{k+1}} + (U_0^k - C_0^k) \frac{U_1^{k+1} - U_0^{k+1}}{\Delta^{k+1}} - \\
& - 2 \frac{C_0^{k+1} - C_0^k}{\tau} + \frac{U_0^{k+1} - U_0^k}{\tau} = gi - \frac{n_0^2 \cdot g^{\frac{5}{2}}}{(C_0^k)^3} \left[(U_0^k)^2 + 2U_0^k (U_0^{k+1} - U_0^k) \right] + \quad (21) \\
& + gV_0^k \frac{U_0^k + C_0^k}{(C_0^k)^2},
\end{aligned}$$

a warunek graniczny

$$U_0^{k+1} = \frac{gQ_0}{(C_0^{k+1})^2} \quad (22)$$

zawiera nieliniowość, dlatego w celu linearyzacji wyrażamy go w przybliżeniu za pomocą szeregu Taylora:

$$U_0^{k+1} = \frac{gQ_0}{(C_0^k)^2} - \frac{2gQ_0}{(C_0^k)^3} (C_0^{k+1} - C_0^k) \quad (23)$$

- na prawej granicy obszaru

$$\begin{aligned}
& 2C_N^k \frac{C_N^{k+1} - C_{N-1}^{k+1}}{\Delta^{k+1}} + C_N^k \frac{U_N^{k+1} - U_{N-1}^{k+1}}{\Delta^{k+1}} + 2 \frac{C_N^{k+1} - C_N^k}{\tau} + \frac{U_N^{k+1} - U_N^k}{\tau} = \\
& = gi - \frac{g^{\frac{5}{2}} n}{(C_N^k)^3} \left[(U_N^k)^2 + 2U_N^k (U_N^{k+1} - U_N^k) \right] + V_n^k \frac{U_N^k - C_N^k}{(C_N^k)^2}, \quad (24)
\end{aligned}$$

a warunek graniczny

$$C_N^{k+1} = 0 \quad (25)$$

Jak widać z równania (24) wyraz wolny ma na prawej granicy osobliwość, wskutek czego:

$$C_N^k = 0$$

W celu pokonania tej trudności będziemy postępowali w sposób następujący. Przypomnijmy, że w naszym zagadnieniu zakładamy przepuszczalność dna. Przy przesuwaniu się strumienia nawadniającego prędkość przedniego frontu i głąbo-

kość w pobliżu niego stale zmniejszają się, dążąc do zera. Gdy podawany wydatek staje się równy odbieranemu, przemieszczanie się frontu zanika. W tym przypadku lepsze rezultaty w porównaniu z warunkiem granicznym (25) daje następujący warunek graniczny:

$$C_N^{k+1} = C_{N-1}^{k+1} \quad (26)$$

Jak wynika z obliczeń, w tym przypadku zachodzi samoregulowanie głębokości i prędkości w przedniej części strumienia przy monotonicznym zmniejszaniu się ich w czasie.

Warunek (26) z fizycznego punktu widzenia odpowiada przyjęciu stałej głębokości względem długości w przedniej części strumienia na długości Δ i ich zmienności w czasie. Badania doświadczalne potwierdzają, że takie założenie jest dopuszczalne (Wilke i Smerdon 1970).

Równania różnicowe przedstawimy w następującej postaci:

- w punktach wewnętrznych rozważanego obszaru

$$\begin{cases} A_{11}U_{n-1}^{k+1} + A_{12}C_{n-1}^{k+1} + B_{11}U_n^{k+1} + B_{12}C_n^{k+1} + C_{11}U_{n+1}^{k+1} + C_{12}U_{n+1}^{k+1} = e_1 \\ A_{21}U_{n-1}^{k+1} + A_{22}C_{n-1}^{k+1} + B_{21}U_n^{k+1} + B_{22}C_n^{k+1} + C_{21}U_{n+1}^{k+1} + C_{22}U_{n+1}^{k+1} = e_2 \end{cases} \quad (27)$$

- w punktach leżących na lewej granicy obszaru

$$\begin{cases} A_{11}U_0^{k+1} + A_{12}C_0^{k+1} + B_{11}U_1^{k+1} + B_{12}C_1^{k+1} = e_1 \\ A_{21}U_0^{k+1} + A_{22}C_0^{k+1} + B_{21}U_1^{k+1} + B_{22}C_1^{k+1} = e_2 \end{cases} \quad (28)$$

- w punktach leżących na prawej granicy obszaru

$$\begin{cases} B_{11}U_{N-1}^{k+1} + B_{12}C_{N-1}^{k+1} + C_{11}U_N^{k+1} + C_{12}C_N^{k+1} = e_1 \\ B_{21}U_{N-1}^{k+1} + B_{22}C_{N-1}^{k+1} + C_{21}U_N^{k+1} + C_{22}C_N^{k+1} = e_2 \end{cases} \quad (29)$$

Równania (27)–(29) można przedstawić w postaci macierzowej następująco:

$$\mathbf{A}\psi_{n-1}^{k+1} + \mathbf{B}\psi_n^{k+1} + \mathbf{C}\psi_{n+1}^{k+1} = \mathbf{E} \quad (30)$$

$$\mathbf{A}_0\psi_0^{k+1} + \mathbf{B}_0\psi_1^{k+1} = \mathbf{E}_0 \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_N\psi_{N-1}^{k+1} + \mathbf{C}_N\psi_N^{k+1} = \mathbf{E}_N \quad (32)$$

gdzie:

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ – macierze,

Ψ, \mathbf{E} – wektory.

Otrzymany układ równań rozwiązuje się numerycznie.

Charakterystyczna osobliwość utworzonej siatki (rys. 2), która była zauważona przy analizie równań (17), sprowadza się do tego, że krok względem czasu τ okazuje się zależny od kroku względem odległości Δ . Rzecz w tym, że przy aproksymacji pochodnych za pomocą wzorów (17) ruchomość siatki (przesunięcie węzłów w kierunku poziomym) uwzględniała się za pomocą liniowej interpolacji w granicach kroku siatki. Jednak, jeśli nie ograniczać wielkości τ , to warunku interpolacji można nie uwzględniać, ponieważ:

$$x_n^k < x_{n-1}^{k+1}$$

Wcześniej dla innych punktów może to mieć miejsce na łuku przechodzącym przez punkty $N - 1$. Dlatego, aby wyrażenia (17) miały sens, krok względem czasu dla każdej górnej warstwy powinien być określony wzorem:

$$\tau^{k+1} = \frac{\Delta^k}{U_N^k} \quad (33)$$

Przy takim wyborze τ warunek interpolacji dla równań (17) będzie spełniony we wszystkich punktach wewnętrznych.

Jeśli z upływem czasu U_N^k zmniejsza się, a Δ^k rośnie, to τ także będzie rosła przy przejściu do każdej górnej warstwy. W naszym rozwiązaniu stosunek kroków względem czasu i odległości ograniczony jest przez nachylenie prawej granicy.

Jak wspomniano wyżej, obliczenia zaczynają się od zadania w przybliżeniu warunków początkowych. W warstwie zerowej ($k = 0$) warunki te zadajemy przez znane funkcje U_n^0 i C_n^0 ($n = 0, 1, \dots, N$) określone w pierwszym przybliżeniu.

W pierwszej i w następnych warstwach funkcje U_n^{k+1} i C_n^{k+1} określa się za pomocą algebraicznego układu równań liniowych (30)–(32). Rozwiązanie tego układu równań realizuje metodami numerycznymi.

Przykład zastosowania

Rozpatrzmy przypadek nawodnienia bez zrzutu. Na lewej granicy nawadnianego obszaru zadajemy warunek:

$$Q_0 = \text{const}$$

Odległość do przegrody wyrażono za pomocą parametru S . Aby sprawdzić przedstawioną wyżej metodę, wykorzystano następującą ideę. Dla dostatecznie dużego α we wzorze (2) podawane i odbierane wydatki powinny być równe gdy

$x_N = \frac{Q_0}{K_0}$. Jeżeli przyjąć $S = \frac{Q_0}{K_0}$ i nie przerywać zasilania, to w tej ograniczonej przestrzeni ruch nieustalony z upływem czasu przejdzie w ustalony z określoną postacią powierzchni swobodnej – krzywa spadku.

Podsumowanie

Porównanie wyników obliczeń numerycznych z danymi doświadczalnymi dało satysfakcjonujący rezultat. Analiza obliczeń numerycznych rozkładu prędkości i głębokości nawadniającego strumienia względem odległości i czasu pokazuje, że największe prędkości występują w pobliżu wyjścia, powierzchnia zaś swobodna względem długości ma kształt wypukły.

Literatura

- FAURE N., NAHAS N. 1961: Etude numerique et experimentale d'intumescence à forte courbure du front. *La Houille Blanche* 5.
- LREEN R.E., HANKS R.I., LARSON W.E. 1964: Estimates of Field Infiltration by Numerical Solution of the Moisture Flow Equation. *Soil Science Society Proceeding* 2, 1.
- MONTUORI C. 1964: L'onda di un canale vuoto. Università di Napoli, Facoltà di ingegneria Istituto Idrolici.
- SUDOBIČZER W.G., SZURIN S.M. 1968: Dwiženije potoka wody po suchomu ruslu. Izd. Sibir. Otd. AN SSSR, 13.
- WILKE O., SMERDON E.T. 1970: A solution of the irrigation advance problem. *J. Irrig and Drain* 91, 3.

Summary

Mathematical modelling of basin irrigation system. Nonlinear differential equations (hyperbolic type) was applied to describe the optimalization approach of basin irrigation system. The proper boundary conditions were assumed. The water flow in dry permeable subsoil was determined. The calculation results for embankment canals agree well with observations.

Authors' address:

Helena Kazięko, Lucyna Kazięko
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Katedra Zastosowań Matematyki
ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa
Poland