

**KAROL BRONISZ**

# Modelowanie cech drzew i drzewostanów z wykorzystaniem modeli efektów mieszanych

Modeling of the tree and stand parameters using mixed-effects models

**ABSTRACT**

Bronisz K. 2019. Modelowanie cech drzew i drzewostanów z wykorzystaniem modeli efektów mieszanych. Sylwan 163 (7): 564-575. DOI: <https://doi.org/10.26202/sylwan.2019007>.

Regression analysis is one of the most popular statistical modeling tools, which can define linear or nonlinear relationships between individual trees and stands parameters. Mixed-effects models are one of the contemporary trends of those regression methods. These models can be applied to describe such features as: height, biomass, taper, site index or volume both at the level of a single tree and whole forest ecosystems. The aim of this work is to present the characteristics of the mixed-effects model, the applicability of linear and nonlinear mixed-effects models in forest studies, and the example of a linear mixed-effects model defining the relationship between bark thickness and diameter at breast height for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) in comparison to the linear fixed-effect model. Goodness-of-fit for the obtained linear mixed-effect model indicate its better fit to the pine bark thickness than in the case of the mixed-effects model. Moreover, most of the published research results indicate the predominance of both linear and nonlinear mixed-effects models according to fixed-effect ones. These studies indicate the wide possibilities of using mixed-effect models in forestry. However, there are also results pointing to the disadvantages of these models and put into question the legitimacy of their use in forest research. This fact to some extent confirms the results (residuals behavior) obtained in this study. Therefore, it seems necessary to conduct further research, which on the one hand will allow the potential of this solution to be used, and on the other hand will help to clarify emerging doubts.

**KEY WORDS**

bark thickness, Scots pine, regression, linear mixed-effects models

**ADDRESSES**

Karol Bronisz – e-mail: [Karol.Bronisz@wl.sggw.pl](mailto:Karol.Bronisz@wl.sggw.pl)

Samodzielna Pracownia Dendrometrii i Nauki o Produkcyjności Lasu, SGGW w Warszawie;  
ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa

## Wstęp

Analiza regresji jest jednym z najpowszechniej stosowanych narzędzi modelowania statystycznego. Wciąż zyskuje na znaczeniu, ponieważ pozwala opisać związki między zmiennymi niezależnymi (objaśniającymi) a zmienną zależną (objaśnianą), szacowanie średnich wartości zmiennych, a także wybór zmiennych istotnie zależnych od zmiennej objaśnianej [Biecek 2013]. Metoda ta znajduje szerokie zastosowanie w ocenie zjawisk zachodzących w ekosystemach leśnych na różnych poziomach. Mogą to być liniowe lub nieliniowe zależności pomiędzy parametrami pojedynczych drzew, np. związek między pierśnicą a wysokością, którego matematyczny opis umożliwia

opracowanie krzywych wysokości szeroko wykorzystywanych podczas określania miąższości drzewostanu [Bruchwald 1999]. Nie bez znaczenia jest także możliwość określania liczby kształtu [Bruchwald, Rymer-Dudzińska 1981] czy miąższości pojedynczych drzew [Zianis i in. 2005]. Istotna jest również analiza wpływu pierśnicy i wysokości na biomasa różnych komponentów drzew [Socha, Wężyk 2007; Bronisz i in. 2016]. W leśnictwie często wykorzystuje się zależność wysokości od wieku, umożliwiającą tworzenie modeli bonitacyjnych [Cieszewski, Zasada 2002]. Warto również wspomnieć o związku podwójnej grubości kory na pierśnicy z pierśnicą drzew [Rymer-Dudzińska 1988], wykorzystywanym do określania miąższości i przyrostu miąższości drzewostanów.

Metody regresyjne umożliwiają również uchwycenie zależności uwzględniających przeciętne cechy drzewostanu i opracowanie równań regresyjnych definiujących np. zależność wysokości od pierśnicy [Rymer-Dudzińska 1994], biomasy różnych komponentów od miąższości drzewostanu [Wojtan i in. 2011], drzewostanowej liczby kształtu od przeciętnej pierśnicy [Bruchwald, Rymer-Dudzińska 2000] czy procentu grubości kory od wysokości, pierśnicy oraz wieku drzewostanu [Rymer-Dudzińska 1997]. Kompleksowe połączenie regresyjnego opisu zjawisk zachodzących w drzewostanach oraz rachunku prawdopodobieństwa umożliwiło opracowanie modeli wzrostu drzewostanu [Clutter 1963; Burkhardt, Strub 1974; Munro 1974; Bruchwald 1985; Borders, Bailey 1986; Pienaar, Harrison 1988; Hasenauer 2006; Burkhardt, Tomé 2012]. Tak powstałe modele stanowią użyteczne narzędzie do planowania oraz optymalizacji gospodarki leśnej [Bruchwald 1993], oceny zagrożenia powstawania szkód w lasach [Bruchwald, Dmyterko 2011], wpływu prowadzonych zabiegów na zawartość biomasy i węgla [Zasada i in. 2009] czy też analizy oddziaływania różnych scenariuszy gospodarowania i zmian warunków klimatycznych na zasoby leśne [Mohren 2003].

Funkcja regresji to matematyczny obraz przyporządkowania średnich wartości zmiennej zależnej konkretnym wartościom zmiennej niezależnej, którego efekty wskazane są przez wartości parametrów estymowanej funkcji [Stanisz 2007]. Najczęściej stosowanym rozwiązaniem jest uwzględnienie efektów stałych, czyli charakterystycznych i niezmiennych dla całej badanej populacji [Biecek 2013]. Istnieje również możliwość uwzględnienia efektów mieszanych. W tym przypadku współczynniki modeli określa się zarówno jako efekty stałe i losowe, które w konstrukcji modelu uwzględnia się jako realizacje (rozkłady) zmiennej losowej o pewnych parametrach [Biecek 2013]. Modele efektów mieszanych mogą mieć postać liniową, jak i nieliniową. Teoretyczne podstawy metody są bardzo dobrze znane wśród polskich statystyków [Gnot, Michalski 1994; Grządziel 2008], jednak trudno, z pojedynczymi wyjątkami, znaleźć (w odróżnieniu od literatury zagranicznej) przykłady jej zastosowań w polskich naukach leśnych. Jest to dość niespodziewany wniosek, gdyż takie podejście do modelowania zjawisk przyrodniczych jest niezwykle użyteczne z co najmniej kilku powodów. Jednym z nich jest występowanie w przyrodzie dużej liczby efektów i zależności, dlatego chcąc zredukować liczbę parametrów modelu, bierze się pod uwagę zmienne losowe z rozkładu, którego parametry stanowią współczynniki modelu [Biecek 2013]. Poza tym informacje, którymi dysponujemy w badaniach przyrodniczych, często kształtowane są w sposób hierarchiczny lub grupowy, a analizowana metoda pozwala na poznanie zależności zachodzących na różnych poziomach hierarchii [Pinheiro, Bates 2013].

Celem niniejszej pracy jest: (i) charakterystyka modeli efektów mieszanych na przykładzie modeli liniowych, (ii) wskazanie możliwości zastosowania modeli efektów mieszanych w badaniach leśnych oraz (iii) przedstawienie przykładu liniowego modelu efektów mieszanych definiującego zależność podwójnej grubości kory na pierśnicy od pierśnicy w drzewostanach sosnowych w porównaniu z modelem uzyskanym na podstawie tradycyjnej regresji liniowej.

## Charakterystyka modeli efektów mieszanych

Modele efektów mieszanych są rozszerzeniem klasycznych modeli regresyjnych. Wykorzystywane są szczególnie w przypadku analizy danych cechujących się grupową lub hierarchiczną strukturą. Liniowe modele efektów mieszanych umożliwiają ocenę liniowej zależności pomiędzy zmienną zależną (objaśnianą) a zmiennymi niezależnymi (objaśniającymi, predyktorami). Zmienna zależna występuje w postaci ciągłej, natomiast zmienne niezależne w postaci ciągłej, dyskretnej lub jakościowej [West i in. 2014]. Grupowa struktura danych może mieć różną postać, np. danych przestrzennych, danych uzyskanych podczas powtórnych pomiarów na stałych powierzchniach badawczych czy danych uzyskanych na podstawie zagnieżdżonych/blokowych eksperymentów [Pinheiro, Bates 2013]. Modele te składają się z dwóch rodzajów efektów: stałych i losowych. Efekt stały stanowi element tradycyjnego regresyjnego modelu liniowego i tworzy część hipotez badawczych oceniających zależności pomiędzy zmiennymi [Bruchwald 1997; Stanisz 2007]. Efekt losowy z kolei uwzględnia wpływ występującego w badanej populacji grupowania [Faraway 2016]. Należy jednak zwrócić uwagę, że ta sama zmienna może być uwzględniona w jednym modelu jako efekt stały, a w innym jako losowy. Wybór typu efektów zależy od interpretacji badanego zjawiska [Biecek 2013].

Ogólną postać liniowego modelu efektów mieszanych można przedstawić w postaci wzoru [Robinson, Hamann 2011]:

$$y_{ij} = \beta_0 + b_{0i} + \beta_1 \cdot x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad [1]$$

gdzie:

- $y_{ij}$  – zmienna zależna (objaśniana),
- $x_{ij}$  – zmienna niezależna (objaśniająca),
- $\beta_0, \beta_1$  – estymowane stałe parametry modelu (efekt stały),
- $b_{0i}$  – estymowany losowy parametr modelu (efekt losowy),
- $\varepsilon_{ij}$  – reszty modelu.

Parametry liniowego modelu efektów mieszanych estymowane są najczęściej za pomocą metody największej wiarygodności (ang. maximum likelihood, ML) i resztowej metody największej wiarygodności (ang. restricted/residual maximum likelihood, REML). Metoda REML różni się od metody ML tym, że w pierwszym kroku analiz usuwa się wpływ efektów stałych, a parametry opisujące efekty losowe wyznacza się na podstawie reszt wyznaczonych w pierwszym kroku. Estymację parametrów w modelach mieszanych przeprowadza się w sposób algebraiczny lub poprzez numeryczną maksymalizację funkcji wiarygodności [Biecek 2013].

## Możliwości stosowania modeli efektów mieszanych w badaniach leśnych

W zagranicznej leśnej literaturze naukowej, szczególnie z okresu ostatnich kilkunastu lat, zastosowanie modeli efektów mieszanych jest często spotykane [Fox i in. 2001; Hall, Clutter 2004; Robinson, Hamann 2011]. Spowodowane jest to z jednej strony rozwojem metod statystycznych, z drugiej zaś dostępnością sprzętu obliczeniowego i oprogramowania statystycznego. Obecnie większość pakietów statystycznych stosowanych przez naukowców (SAS, R, Statistica, SPSS czy Microsoft Excel – dodatek XLSTAT) zawiera moduły umożliwiające szacowanie parametrów złożonych modeli. W związku z możliwościami zastosowania tej metody w badaniach leśnych przedstawiono w dalszej części przykłady zastosowania modeli efektów mieszanych do tworzenia modeli opisujących zależności występujące zarówno na poziomie pojedynczych drzew, jak i całych

ekosystemów leśnych. Ze względu na dużą liczbę prac wykorzystujących modele efektów mieszanych opisano szczegółowo po kilka prac poruszających dane zagadnienie. Ograniczono również liczbę przykładowych kategorii, stanowiących punkt odniesienia do szerszego stosowania analizowanych rozwiązań w badaniach leśnych.

**ZALEŻNOŚĆ WYSOKOŚCI OD PIERŚNICY.** Wysokość drzew jest kluczową informacją wykorzystywaną do opisu struktury/budowy pionowej drzewostanów, podczas określania miąższości i biomasy różnych komponentów drzew [Socha, Wężyk 2004; Bronisz i in. 2016] w inwentaryzacji stanu lasu oraz zarządzania zasobami leśnymi przy zastosowywaniu modeli wzrostu drzewostanu [Hasenauer 2006]. Jednak pomiar wysokości drzewa jest czasochłonny, zwłaszcza w drzewostanach o złożonej strukturze, dlatego w celu uzyskania wysokości niemierzonych drzew tworzy się modele regresyjne. Jedną z możliwości jest opracowanie lokalnych modeli, w których zmienną niezależną jest pierśnica drzew. Można też uzyskać stałe modele, wykorzystujące przeciętne cechy drzewostanu. Oba warianty modeli można stworzyć z wykorzystaniem modeli efektów mieszanych [Gómez-García i in. 2015]. Jako podstawę swoich analiz autorzy wykorzystali dane z ponad 10 000 par {pierśnica-wysokość} mierzonych kilkukrotnie w czasie oraz przeciętne dane drzewostanowe z 387 powierzchni próbnych charakteryzujących portugalskie drzewostany sosny nadmorskiej (*Pinus pinaster* Aiton). Autorzy, oceniając różną liczbę drzew potrzebnych do kalibracji modeli, wskazali, że w celu zmniejszenia liczby koniecznych pomiarów do obliczenia wysokości drzew warto wykorzystywać zarówno lokalne, jak i stałe modele wysokości uwzględniające efekty mieszane. Nieliniowy model efektów mieszanych, jako jedna z możliwości, został również wykorzystany do zdefiniowania zależności wysokość-pierśnica dębu pirenejskiego (*Quercus pyrenaica* Willd.) w Hiszpanii [Adame i in. 2008]. Podstawą tych badań było 24 627 par wysokość-pierśnica pomierzonych w ramach wielkoobszarowej inwentaryzacji stanu lasu. W tym wypadku wpływ powierzchni próbnej uznano za efekt losowy, a uzyskany w ten sposób model charakteryzował się współczynnikiem determinacji ( $R^2$ ) na poziomie 0,8225. Średni błąd kwadratowy wynosił 1,3379, a uzyskane miary dopasowania wskazywały, że nieliniowy model efektów mieszanych najlepiej definiuje zależność wysokość-pierśnica analizowanego gatunku drzewa. W północnej Hiszpanii natomiast został opracowany stały model wysokości dla eukaliptusa gałkowego (*Eucalyptus globulus* Labill. [Crecente-Campo i in. 2010]). W tym wypadku oceniano różne warianty wyboru efektów stałych i losowych w odniesieniu do 6 różnych nieliniowych modeli wysokości. W wyniku badań najlepszym rozwiązaniem okazał się model wysokości Krumlanda i Wensela przy przyjęciu powierzchni próbnej jako efektu losowego (współczynnik determinacji tego wariantu modelu wyniósł 0,8875, a dla modelu bez efektów losowych  $R^2$  równał się 0,8568). W Finlandii również można znaleźć podobne przykłady modeli wysokości dla świerka pospolitego (*Picea abies* (L.) Karst. [Mehtätalo 2004]), sosny zwyczajnej (*Pinus sylvestris* L.) oraz brzozy brodawkowej i omszonej (*Betula pendula* i *B. pubescens*, [Mehtätalo 2005]). W badaniach tych autor ocenił możliwość wykorzystania funkcji Korfa w odniesieniu do danych z wielkoobszarowej inwentaryzacji stanu lasu. W tym wypadku drzewostan stanowił jeden ze zdefiniowanych efektów losowych. Pierśnice i wysokości ponad 2000 drzew sosny łuczynowej (*Pinus taeda* L.) pochodzących ze 186 lokalizacji stanowiły podstawę oceny możliwości uwzględnienia efektów mieszanych w tworzeniu modeli wysokości w południowo-wschodnich Stanach Zjednoczonych przy wykorzystaniu funkcji potęgowej [Trincado i in. 2007]. Funkcję tę oceniano pod kątem możliwości jej zastosowania w dwóch regionach fizjograficznych (Piedmont i Coastal Plain). Analizy obejmowały dwa warianty funkcji: (i) tradycyjny, uwzględniający tylko efekty stałe, (ii) z zaimplementowanym wpływem efektów losowych. Zastosowanie modeli efektów mieszanych umożliwiło uzyskanie większej dokładności szacowania wysokości oraz wskazało na potrzebę uwzględniania regionu podczas

predykcji wysokości drzew. Ponadto autorzy dowiedli, że wykorzystując efekty mieszane, minimalizuje się konieczność uwzględniania dodatkowych zmiennych przy modelowaniu wysokości drzew w ramach inwentaryzacji lasu, gdzie na pojedynczej powierzchni próbnej mierzy się stosunkowo niewielką liczbę drzew. Wyniki najnowszych tureckich badań sosny kalabrijskiej (*Pinus brutia* Ten.) oraz cedru libańskiego (*Cedrus libani* A. Rich) dotyczących porównania 4 różnych metod dopasowania modelu wysokości Chapmana-Richardsa również wskazują na przewagę modeli efektów mieszanych [Özçelik i in. 2018].

BIOMASA RÓŻNYCH KOMPONENTÓW DRZEW. W ostatnim czasie wiele prac z zakresu biometrii leśnej dotyczy określania biomasy różnych komponentów drzew. Trend ten związany jest m.in. z potrzebą określania produktywności ekosystemów leśnych [Orzeł i in. 2006] oraz faktem, że mają one ogromne znaczenie w bilansowaniu zawartości węgla i łagodzeniu skutków zmian klimatu [Fahey i in. 2009; Rittenhouse, Rissman 2012]. Jak wskazują Fehrmann i in. [2008], liniowe modele efektów mieszanych są jedną z możliwości określania biomasy pojedynczego drzewa. Podstawą cytowanych badań były dane pochodzące wielkoobszarowej inwentaryzacji lasów Finlandii. Zbiór zawierał dane dotyczące 203 świerków (*Picea abies* (L.) Karst.) oraz 205 sosen (*Pinus sylvestris* L.). W tym wypadku w modelu każda powierzchnia próbna zdefiniowana była jako efekt losowy, a liniowy model efektów mieszanych, jak i porównywany tradycyjny model liniowy analizowane były w postaci logarytmicznej. Porównanie wykazało, że uwzględnienie efektów losowych pozwala uzyskać większą dokładność określania biomasy pojedynczego drzewa, zwłaszcza w przypadku świerka. Wynika to z faktu, że wariancja wyjaśniona różnicami pomiędzy powierzchniami próbnymi była względnie mała dla sosny (16%), ale znacznie wyższa w przypadku świerka (49%). W badaniach prowadzonych na szeroką skalę w Wietnamie przez Huya i in. [2016] zastosowano nieliniowe modele efektów mieszanych w określaniu biomasy komponentów różnych gatunków drzew rosnących w wiecznie zielonych lasach liściastych w całym kraju. Jako podstawę analiz autorzy wykorzystali dane pobrane ze 968 drzew ściętych na 40 powierzchniach próbnych założonych w sposób uwzględniający różne warunki wzrostu w różnych regionach kraju. W tym wypadku autorzy zdefiniowali efekty losowe na różnym poziomie. Porównali wpływ regionu kraju oraz m.in. gęstość drewna badanych drzew. Wyniki wskazują, że uwzględnienie regionu kraju jako efektu losowego w niewielkim stopniu wpływa na dokładność modeli biomasy. Największe znaczenie pod tym względem miała gęstość drewna ( $R^2$  mieszanego modelu biomasy nadziemnej wyniósł 0,935). Należy zaznaczyć, że wszystkie warianty modeli mieszanych w przytaczanych badaniach charakteryzowały się większą dokładnością niż klasyczny model uwzględniający efekty stałe. Również w przypadku badań prowadzonych przez Huffa i in. [2018] w Stanach Zjednoczonych, dotyczących nadziemnej biomasy 7 gatunków krzewów rosnących w stanie Oregon wykazano przewagę nieliniowych modeli efektów mieszanych (statystyka BIC=68,82) nad podejściem klasycznym (BIC=73,50). Warto dodać, że w tym wypadku efekt losowy stanowił gatunek krzewu. Badania Menga i in. [2007] prowadzone w Stanach Zjednoczonych dotyczyły porównania liniowego modelu efektów losowych i stałych w odniesieniu do określania biomasy i miąższości drzew na podstawie zdjęć satelitarnych Landsat ETM+. Badania wykonano na terenie stanu Georgia, który ze względu na właściwości fizyczne (krajobraz oraz ekosystem) został podzielony na 5 regionów. Efekt losowy stanowiły zarówno specyficzne dla danego regionu cechy, takie jak: opady atmosferyczne, gleba, wysokość nad poziomem morza, jak i niezależny od regionu znormalizowany różnicowy wskaźnik wegetacji (NDVI). Wyniki wskazują, że model efektów mieszanych uwzględniający NDVI cechuje się najlepszym dopasowaniem do danych. W przypadku biomasy drzew model ten uzyskał  $R^2$  na poziomie 0,57, a statystykę AIC równą 154,17. Miary te dla modelu efektów stałych wynoszą odpowiednio 0,32 i 189,58. W stanie

Georgia prowadzone również były badania dotyczące modelowania różnych komponentów biomasy drzew (strzała, korzenie, gałęzie oraz liście) w intensywnie gospodarowanych plantacjach sosny łuczycowej (*Pinus taeda* L.) na podstawie nieliniowego modelu efektów mieszanych, w którym efekt losowy stanowiły powierzchnie badawcze w danym wieku [Zhang, Borders 2004]. Autorzy wskazują, że tak uzyskany elastyczny system modeli umożliwi obliczanie biomasy z wykorzystaniem danych spoza zakresu danych źródłowych.

De-Miguel i in. [2014] zwrócili uwagę na inną możliwość, skupiając się na zastosowaniu modeli efektów mieszanych w celu opracowania stałych metamodeli umożliwiających obliczenie biomasy różnych komponentów drzew na dużym obszarze. Przedstawili również metodykę kalibracji uzyskanych metamodeli poprzez wykorzystanie lokalnych warunków wzrostu jako efektów losowych tworzonych modeli. W swoich analizach uwzględnili wpływ różnych strategii pobierania oraz wielkości prób wykorzystywanych w celu opracowania modeli biomasy. W ramach uzyskanych wyników dowodzą, że metodyka przedstawiona w opracowaniu może w przyszłości posłużyć do tworzenia wielowariantowych metamodeli cechujących się bardziej złożoną strukturą hierarchiczną, w której to np. gatunek drzewa lub sposób zagospodarowania może stanowić efekt losowy. Warunki wzrostu zdefiniowane jako region oraz wskaźnik bonitacji drzewostanu stanowiły efekt losowy opracowanych przez Ou i in. [2016] nieliniowych modeli efektów mieszanych pozwalających określić nadziemną biomasę *Pinus kesiya* var. *langbianensis*. W tym przypadku podstawę analiz stanowiło 128 drzew pobranych z trzech regionów Chin. Również w tych badaniach autorzy dowodzą przewagi modeli efektów mieszanych nad podejściem klasycznym. Ponadto wskazują, że modele, które uwzględniają jednocześnie dwa efekty losowe (region i wskaźnik bonitacji), cechują się większą dokładnością niż modele, które traktują te aspekty osobno. Efekty stałe i losowe były również brane pod uwagę podczas modelowania biomasy strzały modrzewia dahurskiego (*Larix gmelinii* Rupr.) rosnącego na plantacjach w północno-wschodnich Chinach (prowincja Heilongjiang). Podstawę dopasowania mielinowego modelu logistycznego stanowiło 30 ściętych modrzewi. Błąd średni modelu efektów mieszanych dla tych drzew zawierał się w zakresie od -1,9575 do 0,5354, a modelu efektów stałych był zdecydowanie większy i wynosił od -116,5673 do 144,0735 [Li i in. 2011].

OCENA MOŻLIWOŚCI PRODUKCYJNYCH DRZEWOSTANÓW – WSKAŹNIK BONITACJI. Jednym z istotnych kryteriów podejmowania decyzji w ramach zarządzania zasobami leśnymi jest ocena możliwości produkcyjnych siedlisk, która dokonywana jest najczęściej za pomocą wskaźnika bonitacji określanego przeważnie na podstawie wieku i wysokości górnej [Bruchwald 1977; Cieszewski 1994; Bruchwald, Kliczkowska 1997; Bruchwald i in. 2000; Cieszewski, Zasada 2002; Socha 2010; Socha, Orzeł 2013]. Analizy prowadzone na podstawie 200 dominujących sosen wydmywych (*Pinus contorta* var. *latifolia* Engelm.) z 75 powierzchni próbnych założonych w Albercie (Kanada) stanowią przykład wykorzystania modeli efektów mieszanych w predykcji zależności wysokość-wiek [Yang, Huang 2011]. W tym wypadku efekt losowy, który zdefiniowany był w trzech wariantach (powierzchnia próbna, pojedyncze drzewo oraz połączenie obu poziomów), oceniany był przy zastosowaniu dwóch funkcji: logicznej oraz Chapmana-Richardsa. Uzyskane wyniki wskazują, że najlepszym modelem jest funkcja logiczna przy jednoczesnym uwzględnieniu powierzchni i drzewa jako efektów losowych (statystyka AIC tego modelu wyniosła 5851, AIC dla powierzchni jako efektu losowego równała się 7406). Funkcja Chapmana-Richardsa stanowiła również podstawę modelowania, z uwzględnieniem efektów mieszanych, wysokości górnej oraz wskaźnika bonitacji w australijskich plantacjach dla eukaliptusa gałkowego (*Eucalyptus globulus* [Wang i in. 2007]). Uzyskana w wyniku badań statystyka AIC modelu z efektami stałymi wyniosła 5363, natomiast po uwzględnieniu powierzchni jako efektu losowego zmniejszyła się do

wartości równej 3244. Przytoczone wyniki badań wskazują na przewagę modeli efektów mieszanych. Warto jednak odnieść się również do rezultatów uzyskanych przez Wanga i in. [2008]. W tej pracy autorzy poszukiwali odpowiedzi na pytanie, jaką metodę powinno się zastosować podczas modelowania wskaźnika bonitacji oraz czy parametry lokalne funkcji powinny być traktowane jako stałe czy losowe. Uzyskane wyniki nie pozwalają wskazać jednoznacznej odpowiedzi. Najnowszym głosem w dyskusji możliwości zastosowania modeli efektów mieszanych do modelowania wskaźnika bonitacji są badania Cieszewskiego i Struba [2018] oceniające efektywność modeli bonitacyjnych uzyskanych za pomocą metody efektów mieszanych i uogólnionej metody różnic algebraicznych (UMRA) [Cieszewski, Bailey 2000; Cieszewski, Zasada 2003]. Autorzy wykazali, że w przypadku modeli samoreferencyjnych podejście uwzględniające efekty losowe nie daje pozytywnych efektów. Jednym z przytaczanych powodów jest fakt, że model bonitacyjny z efektami losowymi cechuje się niespójnymi parametrami, a końcowa postać modelu zależy nie tylko od analizowanych danych i założeń statystycznych, ale też od sposobu jego kodowania. Uwidacznia się zatem wpływ programisty lub zastosowanego podczas obliczeń oprogramowania. Ponadto autorzy dowodzą, że teoretyczne właściwości modeli efektów mieszanych uniemożliwiają ich wykorzystanie podczas tworzenia funkcji samoreferencyjnych wykorzystywanych w leśnictwie. Zwracają również uwagę, że dane definiujące wzrost oraz produktywność drzewostanów ze względu na sposób ich gromadzenia nie są losowe, zatem trudno mówić o uwzględnianiu efektu losowego w modelowaniu tych procesów.

INNE PRZYKŁADY. Modele efektów mieszanych znajdują zastosowanie również w modelowaniu innych cech drzew i drzewostanów. Cao i Wang [2011], Kublin i in. [2013], Arias-Rodil i in. [2015] oraz Senyurt i in. 2017 wskazują na możliwość uwzględnienia efektu losowego w tworzeniu modeli zbieżystości. Natomiast Hall i Clutter [2004] modelują w ten sposób miąższość drzewostanu. Istnieje też możliwość modelowania gęstości drewna [Guilley i in. 2004], wpływu zabiegów hodowlanych [Mehtatalo i in. 2014; Liziniewicz i in. 2016], zawartości martwego drewna [Sakai i in. 2013] oraz grubości kory [Li, Weiskittel 2011].

### Przykład zastosowania liniowego modelu efektów mieszanych

Jako przykład liniowego modelu efektów mieszanych (LMEM) przedstawiono model definiujący zależność podwójnej grubości kory na wysokości pierśnicy od pierśnicy zbudowany na podstawie wzoru 1. Podstawą analiz były pomiary 90 ściętych sosen pochodzących z 18 drzewostanów zachodniej Polski [Zasada i in. 2008; Bronisz, Zasada 2016]. Minimalna wartość podwójnej grubości kory analizowanych drzew na wysokości pierśnicy wynosiła 9 mm, maksymalna 47 mm, a średnia 21 mm. Jako efekt losowy uznano wpływ powierzchni próbnej [Fehrmann i in. 2008]. Uzyskany model porównano z klasycznym liniowym modelem uwzględniającym efekty stałe (LMES):

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad [2]$$

gdzie:

- $y_{ij}$  – zmienna zależna (objaśniana),
- $x_{ij}$  – zmienna niezależna (objaśniająca),
- $\beta_0, \beta_1$  – estymowane stałe parametry modelu (efekt stały),
- $\varepsilon_{ij}$  – reszty modelu

Porównanie przeprowadzono na podstawie dokładności uzyskanych parametrów (SE – błąd standardowy), wartości miar dopasowania ( $R^2$  – współczynnik determinacji, RMSE – średni błąd kwadratowy, statystyka AIC) oraz normalności uzyskiwanych reszt (test Shapiro-Wilka).

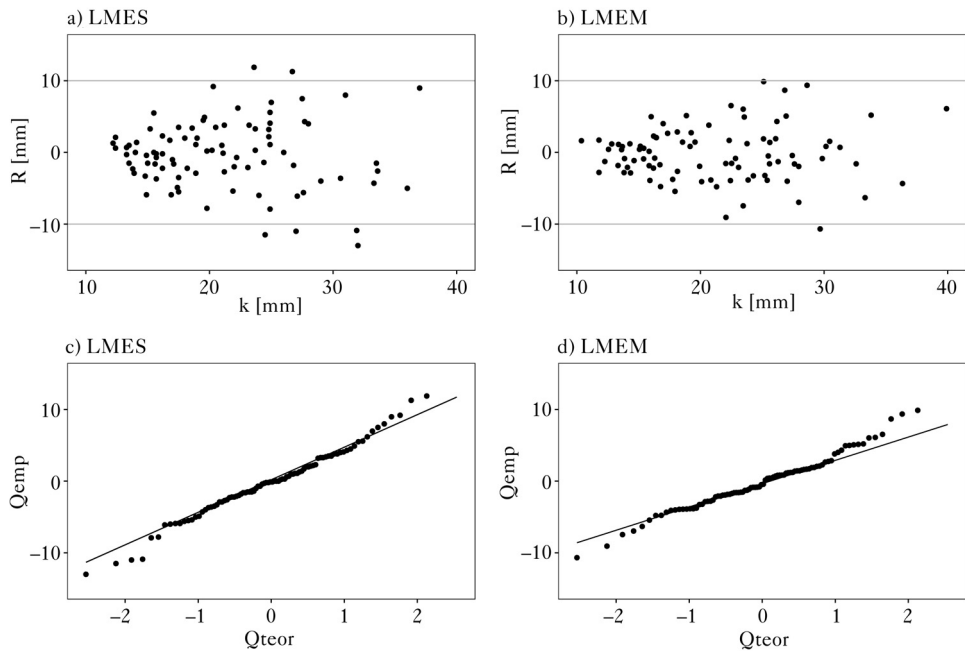
Błędy standardowe parametrów LMES cechują się mniejszymi wartościami w porównaniu do LMEM, natomiast współczynnik determinacji dla LMEM jest większy przy jednoczesnym mniejszym średnim błędzie kwadratowym i statystyce AIC (tab.). Porównanie modeli względem uzyskiwanych reszt nie daje jednoznacznej odpowiedzi. Z jednej strony reszty LMEM w odniesieniu do wartości przewidywanych cechują się większym skupieniem niż LMES, natomiast z drugiej charakteryzują się większym odbieganiem od rozkładu normalnego (ryc.). Ponadto wyniki testu Shapiro-Wilka wskazują, że reszty LMES w odróżnieniu od LMEM są zgodne z rozkładem normalnym (wartość p wynosi odpowiednio 0,07672 i 0,01379).

**Tabela.**

Wartości parametrów efektów stałych ( $\beta_0$  i  $\beta_1$ ), ich błędy standardowe (SE) oraz miary dopasowania ( $R^2$  – współczynnik determinacji, RMSE – średni błąd kwadratowy, AIC – kryterium informacyjne Akaikiego) dla liniowego modelu efektów stałych (LMES) i mieszanych (LMEM)

Fixed parameters ( $\beta_0$  and  $\beta_1$ ), their standard errors (SE) and goodness-of-fit measures ( $R^2$  – coefficient of determination, RMSE – residual mean square error, AIC – Akaike’s Information Criterion) for linear fixed-effect (LMES) and mixed-effect (LMEM) models

	$\beta_0$	SE	$\beta_1$	SE	$R^2$	RMSE	AIC
LMES	5,4948	1,5416	1,0001	0,0915	0,5757	5,2151	556,6680
LMEM	5,2460	1,9957	1,0159	0,1160	0,7253	4,4792	551,6149



**Ryc.**

Rozkład reszt analizowanych modeli względem wartości przewidywanych (a i b) oraz w odniesieniu do rozkładu normalnego (c i d) dla liniowego modelu efektów stałych (LMES) i mieszanych (LMEM)

Distribution of residuals against estimated bark thickness (a and b) and normal distribution (c and d) for linear fixed-effect (LMES) and mixed-effect (LMEM) models

R – reszty, k – przewidywana podwójna grubość kory na wysokości pierśnicy, Qemp – empiryczne kwartyle reszt, Qteor – teoretyczne kwartyle reszt

R – residuals, k – estimated double bark thickness at the breast height, Qemp – empirical quartiles of the residuals, Qteor – theoretical quartiles of the residuals



Uzyskane miary dopasowania LMEM, podobnie jak w przypadku większości przytaczanych w pracy wyników, wskazują na przewagę modeli efektów mieszanych nad podejściem klasycznym. Jedną z przyczyn stanowi fakt, że przyjęcie powierzchni próbnej jako efektu losowego umożliwia uchwycenie wariacji występującej pomiędzy powierzchniami [Fehrmann i in. 2008]. Ponadto reszty LMEM cechują się większym skupieniem, potwierdzając wyniki uzyskane przez Wanga i in. [2007]. Jednak brak rozkładu normalnego reszt LMEM w odróżnieniu do LMES skłania do prowadzenia dalszych analiz w celu wyjaśnienia zaistniałego zjawiska.

## Podsumowanie

Modele efektów mieszanych są wykorzystywane w przypadku analizy danych cechujących się grupową lub hierarchiczną strukturą. Modele te składają się z dwóch efektów: stałego oraz losowego. Efekt stały stanowi element tradycyjnego modelu regresyjnego, natomiast efekt losowy uwzględnia wpływ występującego w badanej populacji grupowania. Ta sama zmienna może być uwzględniona w jednym modelu jako efekt stały, a w innym jako losowy. Większość przytaczanych wyników badań wskazuje na przewagę zarówno liniowych, jak i nieliniowych modeli efektów mieszanych nad rozwiązaniami tradycyjnym. Badania te sygnalizują również szerokie możliwości zastosowania modeli efektów mieszanych w leśnictwie. Istnieją jednak również wyniki wskazujące na wady tych modeli, które stawiają pod znakiem zapytania zasadność ich stosowania w badaniach leśnych. Fakt ten w pewnym stopniu potwierdzają wyniki uzyskane w niniejszej pracy. Dlatego wydaje się konieczne prowadzenie dalszych badań, które z jednej strony umożliwią wykorzystanie potencjału tego rozwiązania, a z drugiej pozwolą wyjaśnić pojawiające się wątpliwości.

## Literatura

- Adame P., del Río M., Cañellas I. 2008. A mixed nonlinear height-diameter model for pyrenean oak (*Quercus pyrenaica* Willd.). *Forest Ecology and Management* 256 (1-2): 88-98.
- Arias-Rodil M., Castedo-Dorado F., Cámara-Obregón A., Diéguez-Aranda U. 2015. Fitting and Calibrating a Multilevel Mixed-Effects Stem Taper Model for Maritime Pine in NW Spain. *PLOS ONE* 10 (12).
- Biecek P. 2013. Analiza danych z programem R. Modele liniowe z efektami stałymi, losowymi i mieszany. Wydanie II. Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Borders B. E., Bailey R. L. 1986. A Compatible System of Growth and Yield Equations for Slash Pine Fitted with Restricted Three-Stage Least Squares. *Forest Science* 32 (1): 185-201.
- Bronisz K., Strub M., Cieszewski C. J., Bijak S., Bronisz A., Tomusiak R., Wojtan R., Zasada M. 2016. Empirical equations for estimating aboveground biomass of *Betula pendula* growing on former farmland in central Poland. *Silva Fennica* 50 (4).
- Bronisz K., Zasada M. 2016. Uproszczone wzory empiryczne do określania suchej biomasy nadziemnej części drzew i ich komponentów dla sosny zwyczajnej. *Sylwan* 160 (4): 277-283. DOI: <https://doi.org/10.26202/sylwan.2015130>.
- Bruchwald A. 1977. Change in top height of pine forests stands with age. *Bulletin Academic Science, Science Biology* 5: 335-342.
- Bruchwald A. 1985. Model wzrostowy MDI-1 dla sosny. *Las Polski* 9: 10-15.
- Bruchwald A. 1993. Zastosowanie modeli wzrostu w urządzaniu lasu. *Sylwan* 137 (5): 27-39.
- Bruchwald A. 1997. Statystyka matematyczna dla leśników. Wydanie III. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Bruchwald A. 1999. Dendrometria. Wydanie III. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Bruchwald A., Dmyterko E. 2011. Zastosowanie modeli ryzyka uszkodzenia drzewostanu przez wiatr do oceny zagrożenia lasów nadleśnictwa. *Sylwan* 155 (7): 459-471. DOI: <https://doi.org/10.26202/sylwan.2011035>.
- Bruchwald A., Kliczkowska A. 1997. Kształtowanie się bonitacji dla drzewostanów sosnowych Polski. *Prace Instytutu Badawczego Leśnictwa* 838: 63-73.
- Bruchwald A., Michalak K., Wróblewski L., Zasada M. 2000. Analiza funkcji wzrostu wysokości dla różnych regionów Polski. W: *Przestrzenne zróżnicowanie wzrostu sosny*. Fundacja Rozwój SGGW, Warszawa. 84-91.
- Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T. 1981. Wzory empiryczne do określania pierśnicowej liczby kształtu strzały w korze dla świerka. *Sylwan* 125 (3): 11-15.
- Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T. 2000. Wzory empiryczne do określenia pierśnicowej liczby kształtu strzał sosen w korze z uwzględnieniem krain przyrodniczo-leśnych. W: *Przestrzenne zróżnicowanie wzrostu sosny*. Fundacja Rozwój SGGW, Warszawa. 49-57.

- Burkhardt H. E., Strub M. R. 1974. A model for simulation of planted loblolly pine stands. W: Growth Models for Tree and Stand Simulation. Royal College of Forestry, Stockholm, Szwecja. 128-135.
- Burkhardt H. E., Tomé M. 2012. Modeling Forest Trees and Stands. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Cao Q. V., Wang J. 2011. Calibrating fixed- and mixed-effects taper equations. *Forest Ecology and Management* 262 (4): 671-673.
- Cieszewski C. J. 1994. Development of a variable density height-growth-model through defining multidimensional height growth species. Praca doktorska. University of Alberta, Edmonton, Kanada.
- Cieszewski C. J., Bailey R. L. 2000. Generalized Algebraic Difference Approach: A New Methodology for Derivation of Biologically Based Dynamic Site Equations. *Forest Science* 46: 116-126.
- Cieszewski C. J., Strub M. 2018. Comparing properties of self-referencing models based on nonlinear-fixed-effects versus nonlinear-mixed-effects modeling approaches. *Mathematical and Computational Forestry & Natural-Resource Sciences* 10 (2): 46-57.
- Cieszewski C. J., Zasada M. 2002. Dynamiczna forma anamorficznego modelu bonitacyjnego dla sosny pospolitej w Polsce. *Sylwan* 146 (7): 17-24.
- Cieszewski C. J., Zasada M. 2003. Wyprowadzanie ogólnych dynamicznych równań bonitacyjnych za pomocą uniwersalnej metody różnic algebraicznych. *Sylwan* 147 (3): 40-46.
- Clutter J. L. 1963. Compatible growth and yield models for loblolly pine. *Forest Science* 9 (3): 354-371.
- Crecente-Campo F., Tomé M., Soares P., Diéguez-Aranda U. 2010. A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management* 259 (95): 943-952.
- Fahey T. J., Woodbury P. B., Battles J. J., Goodale C. L., Hamburg S. P., Ollinger S. V., Woodall C. W. 2009. *Frontiers in Ecology and the Environment* 8 (5): 245-252.
- Faraway J. J. 2016. Extending the Linear Model with R: Generalized Linear, Mixed Effects and Nonparametric Regression Models. Chapman i Hall/CRC.
- Fehrmann L., Lehtonen A., Kleinn C., Tomppo E. 2008. Comparison of linear and mixed-effect regression models and a k-nearest neighbour approach for estimation of single-tree biomass. *Canadian Journal of Forest Research* 38 (1): 1-9.
- Fox J. C., Ades P. K., Bi H. 2001. Stochastic structure and individual-tree growth models. *Forest Ecology and Management* 154 (1): 261-276.
- Gnot S., Michalski A. 1994. Tests based on admissible estimators in two variance components models. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics* 25 (3): 213-223.
- Gómez-García E., Fonseca T. F., Crecente-Campo F., Almeida L. R., Diéguez-Aranda U., Huang S., Marques C. P. 2015. Height-diameter models for maritime pine in Portugal: a comparison of basic, generalized and mixed-effects models. *iForest – Biogeosciences and Forestry* 9 (1): 72.
- Grządziel M. 2008. Quadratic subspaces and construction of Bayes invariant quadratic estimators of variance components in mixed linear models. *Statistical Papers* 49 (3): 399-419.
- Guilley E., Hervé J.-C., Nepveu G. 2004. The influence of site quality, silviculture and region on wood density mixed model in *Quercus petraea* Liebl. *Forest Ecology and Management* 189 (1-3): 111-121.
- Hall D. B., Clutter M. 2004. Multivariate multilevel nonlinear mixed effects models for timber yield predictions. *Biometrics* 60 (91): 16-24.
- Hasenauer H. 2006. Sustainable Forest Management Growth Models for Europe. Springer, Berlin Heidelberg.
- Huff S., Poudel K. P., Ritchie M., Temesgen H. 2018. Quantifying aboveground biomass for common shrubs in northeastern California using nonlinear mixed effect models. *Forest Ecology and Management* 424: 154-163.
- Huy B., Kralicek K., Poudel K. P., Phuong V. T., Khoa P. V., Hung N. D., Temesgen H. 2016. Allometric equations for estimating tree aboveground biomass in evergreen broadleaf forests of Viet Nam. *Forest Ecology and Management* 382: 193-205. DOI: 10.1016/j.foreco.2016.10.021.
- Kublin E., Breidenbach J., Kändler G. 2013. A flexible stem taper and volume prediction method based on mixed-effects B-spline regression. *European Journal of Forest Research* 132 (95-96): 983-997.
- Li R., Weiskittel A. R. 2011. Estimating and predicting bark thickness for seven conifer species in the Acadian Region of North America using a mixed-effects modeling approach: comparison of model forms and subsampling strategies. *European Journal of Forest Research* 130 (2): 219-233.
- Li Y., Jiang L., Liu M. 2011. A Nonlinear Mixed-Effects Model to Predict Stem Cumulative Biomass of Standing Trees. *Procedia Environmental Sciences* 10: 215-221.
- Linear Mixed Models: A Practical Guide Using Statistical Software. 2014. Wydanie II. Chapman and Hall/CRC.
- Liziniwicz M., Andrzejczyk T., Drozdowski S. 2016. The effect of birch removal on growth and quality of pedunculate oak in a 21-year-old mixed stand established by row planting. *Forest Ecology and Management* 364: 165-172.
- Mehtätalo L. 2004. A longitudinal height diameter model for Norway spruce in Finland. *Canadian Journal of Forest Research* 34 (1): 131-140.
- Mehtätalo L. 2005. Height-diameter models for Scots pine and birch in Finland. *Silva Fennica*. 39 (1): 55-66.

- Mehtätalo L., Peltola H., Kilpeläinen A., Ikonen V. P. 2014. The Response of Basal Area Growth of Scots Pine to Thinning: A Longitudinal Analysis of Tree-Specific Series Using a Nonlinear Mixed-Effects Model. *Forest Science* 60 (4): 636-644.
- Meng Q., Cieszewski C. J., Madden M., Borders B. 2007. A linear mixed-effects model of biomass and volume of trees using Landsat ETM+ images. *Forest Ecology and Management* 244 (1-3): 93-101.
- de-Miguel S., Mehtätalo L., Durkaya A. 2014. Developing generalized, calibratable, mixed-effects meta-models for large-scale biomass prediction. *Canadian Journal of Forest Research* 44 (6): 648-656.
- Mohren G. M. J. 2003. Large-scale scenario analysis in forest ecology and forest management. *Forest Policy and Economics* 5 (2): 103-110.
- Munro D. D. 1974. Forest growth models – a prognosis. W: Fries J. [red.]. *Growth Models for Tree and Stand Simulation*. Royal College of Forestry, Stockholm, Szwecja. 7-21.
- Orzel S., Forgiel M., Ochał W., Socha J. 2006. Nadziemna biomasa i roczna produkcja drzewostanów sosnowych Puszczy Niepołomickiej. *Sylvan* 150 (9): 16-32.
- Ou G., Wang J., Xu H., Chen K., Zheng H., Zhang B., Sun X., Xu T., Xiao Y. 2016. Incorporating topographic factors in nonlinear mixed-effects models for aboveground biomass of natural Simao pine in Yunnan, China. *Journal of Forestry Research* 27 (1): 119-131.
- Özçelik R., Cao Q.V., Trincado G., Göçer N. 2018. Predicting tree height from tree diameter and dominant height using mixed-effects and quantile regression models for two species in Turkey. *Forest Ecology and Management* 419-420: 240-248.
- Pienaar L. V., Harrison W. M. 1988. Notes: A Stand Table Projection Approach to Yield Prediction in Unthinned Even-Aged Stands. *Forest Science* 34 (3): 804-808.
- Pinheiro J., Bates D. 2013. *Mixed-Effects Models in S and S-PLUS*. Springer, New York, USA.
- Rittenhouse C. D., Rissman A. R. 2012. Forest cover, carbon sequestration, and wildlife habitat: policy review and modeling of tradeoffs among land-use change scenarios. *Environmental Science & Policy* 21: 94-105.
- Robinson A. P., Hamann J. D. 2011. *Forest Analytics with R*. Springer, New York, USA.
- Rymer-Dudzińska T. 1997. Wzory empiryczne do określania procentu miąższości kory sosny. *Sylvan* 141 (6): 17-20.
- Rymer-Dudzińska T. 1988. Równania stałych linii grubości kory dla świerka. *Sylvan* 132 (8): 69-73.
- Rymer-Dudzińska T. 1994. Nowe wzory empiryczne krzywej wysokości dla sosny. *Sylvan* 138 (11): 21-24.
- Sakai Y., Ishizuka S., Takenaka C. 2013. Predicting deadwood densities of *Cryptomeria japonica* and *Chamaecyparis obtusa* forests using a generalized linear mixed model with a national-scale dataset. *Forest Ecology and Management* 295: 228-238.
- Senyurt M., Ercanlı I., Bolat F. 2017. Taper equations based on nonlinear mixed effect modeling approach for *Pinus nigra* in Çankırý forests. *Bosque (Valdivia)* 38: 545-554.
- Socha J. 2010. Metoda modelowania potencjalnych zdolności produkcyjnych świerka w górach, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Rolniczego im. Hugona Kołłątaja w Krakowie. Wydawnictwo Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie, Kraków.
- Socha J., Orzel S. 2013. Dynamiczne krzywe bonitacyjne dla sosny zwyczajnej (*Pinus sylvestris* L.) z południowej Polski. *Sylvan* 157 (1): 26-38. DOI: <https://doi.org/10.26202/sylvan.2012094>.
- Socha J., Wężyk P. 2004. Empirical formulae to assess the biomass of the above-ground part of pine trees. *Electronic Journal of Polish Agricultural Universities* 7 (2).
- Socha J., Wężyk P. 2007. Allometric equations for estimating the foliage biomass of Scots pine. *European Journal of Forest Research* 126 (2): 263-270.
- Stanisz A. 2007. Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem STATISTICA PL na przykładach z medycyny. StatSoft Polska, Kraków.
- Trincado G., VanderSchaaf C. L., Burkhart H. E. 2007. Regional mixed-effects height-diameter models for loblolly pine (*Pinus taeda* L.) plantations. *European Journal of Forest Research* 126 (2): 253-262.
- Wang M., Borders B. E., Zhao D. 2008. An empirical comparison of two subject-specific approaches to dominant heights modeling: The dummy variable method and the mixed model method. *Forest Ecology and Management* 255 (7): 2659-2669.
- Wang Y., LeMay V. M., Baker T. G. 2007. Modelling and prediction of dominant height and site index of *Eucalyptus globulus* plantations using a nonlinear mixed-effects model approach. *Canadian Journal of Forest Research* 37 (8): 1390-1403.
- West B. T., Kathleen B. W., Gatecki A. T. 2014. *Linear Mixed Models: A Practical Guide Using Statistical Software*. Wydanie II. Chapman and Hall/CRC.
- Wojtan R., Tomusiak R., Zasada M., Dudek A., Michalak K., Bijak S., Bronisz K. 2011. Współczynniki przeliczeniowe suchej biomasy drzew i ich części dla sosny pospolitej (*Pinus sylvestris* L.) w zachodniej Polsce. *Sylvan* 155 (4): 236-243. DOI: <https://doi.org/10.26202/sylvan.2010103>.
- Yang Y., Huang S. 2011. Estimating a Multilevel Dominant Height-Age Model from Nested Data with Generalized Errors. *Forest Science* 57 (2): 102-116.

- Zasada M., Bronisz K., Bijak S., Dudek A., Bruchwald A., Wojtan R., Tomusiak R., Bronisz A., Wróblewski L., Michalak K. 2009. Effect of the cutting age and thinning intensity on biomass and carbon sequestration – the Gubin Forest District case study. *Folia Forestalia Polonica. Seria A, Forestry* 51 (2): 138-144.
- Zasada M., Bronisz K., Bijak S., Wojtan R., Tomusiak R., Dudek A., Michalak K., Wróblewski L. 2008. Wzory empiryczne do określania suchej biomasy nadziemnej części drzew i ich komponentów. *Sylvan* 152 (3): 27-39. DOI: <https://doi.org/10.26202/sylvan.2006170>.
- Zhang Y., Borders B. E. 2004. Using a system mixed-effects modeling method to estimate tree compartment biomass for intensively managed loblolly pines – an allometric approach. *Forest Ecology and Management* 194: 145-157. DOI: 10.1016/j.foreco.2004.02.012.
- Zianis D., Muukkonen P., Mäkipää R., Mencuccini M. 2005. Biomass and stem volume equations for tree species in Europe, *Silva Fennica Monographs*. Finnish Society of Forest Science, Finnish Forest Research Institute, Tampere, Finland.