ECREG STUDIES
Vol. 9, No. 1, 2016
www.ers.edu.pl
PDF OPEN ACCESS

ECONOMIC AND REGIONAL STUDIES
STUDIA EKONOMICZNE I REGIONALNE
ISSN 2083-3725 Volume 9, No. 1, 2016

Authors' contribution /
Wkład autorów:
A. Zaplanowanie badań/
Study design
B. Zebranie danych/
Data collection
C. Analiza statystyczna/
Statistical analysis
D. Interpretacja danych/
Data interpretation
E. Przygotowanie tekstu/
Manuscript preparation
F. Opracowanie
piśmiennictwa/
Literature search
G. Pozyskanie funduszy/
Funds collection

VARIOUS SIGNS IN ASYMMETRY COEFFICIENS IN EMPIRICAL DISTRIBUTIONS

O RÓŻNYCH ZNAKACH WSPÓŁCZYNNIKÓW ASYMETRII W ROZKŁADACH EMPIRYCZNYCH

Mirosława Wesołowska-Janczarek[1(A,C,D,E,F)], Andrzej Kornacki[2(A,C,D,E,F)]

[1]Pope John Paul II State School of Higher Education in Biała Podlaska
Państwowa Szkoła Wyższa im. Papieża Jana Pawła II w Białej Podlaskiej
[2]University of Life Sciences in Lublin
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie, Katedra Zastosowań Matematyki i Informatyki

Wesołowska-Janczarek M, Kornacki A., (2016), *Various signs in asymmetry coefficiens in empirical distributions / O różnych znakach współczynników asymetrii w rozkładach empirycznych.* Economic and Regional Studies, Vol. 9, No. 1, pp. 63-67.

ORIGINAL ARTICLE

JEL code: C15

Submitted:
October 2015

Accepted:
December 2015

Number of characters:
9 111
Tables: 6
Figures: 0
References: 4

Summary

Subject and purpose of work: The work concerns coefficients of asymmetry As and γ the values of which are marked based on coefficients obtained from the sample and serve the description of empirical distributions. These coefficients inform of the strength and direction of asymmetry of distribution. The direction is ruled by the sign of coefficient while the strength-by its absolute value. Since for certain empirical distributions these coefficients have different signs an attemt was made to define the conditions in which such a situation may occur.
Materials and methods: Within the conducted research different examples of empirical distributions were considered and simulation methods were applied to establish the condition for occurrence of various signs, including coefficients. This condition is based on the location of arithmetical mean of observation in terms of the range <D,Z>, where D is a dominant of data set and Z is a certain volume also indicated on the basis of the same set of observations.
Results: As a result of conducted research it was agreed that both analysed coefficients of asymmetry have the same signs where arithmetical mean $\bar{x}$ is located inside the range and different when it $\bar{x}$ is located outside this range.
Conclusions: Within the specific research of the selected feature one should calculate only one of these coefficients.

Keywords: empirical distributions, coefficients of asymmetry As and γ, signs of coefficients

ORYGINALNY ARTYKUŁ
NAUKOWY

Klasyfikacja JEL: C15

Zgłoszony:
październik 2015

Zaakceptowany:
grudzień 2015

Liczba znaków ze
spacjami: 8 732
Tabele: 6
Rysunki: 0
Literatura: 4

Streszczenie

Przedmiot i cel pracy: Praca dotyczy współczynników asymetrii As i γ , których wartości wyznaczane są na podstawie wyników uzyskanych z próby, i służą do opisu empirycznych rozkładów. Współczynniki te informują o sile i kierunku asymetrii rozkładu. O kierunku decyduje znak współczynnika, a o sile jego wartość bezwzględna. Ponieważ dla pewnych rozkładów empirycznych współczynniki te mają różne znaki podjęto próbę określenia warunków w jakich taka sytuacja może mieć miejsce.
Materiały i metody: W przeprowadzonych badaniach uwzględniono różne przykłady rozkładów empirycznych i symulacyjnymi metodami ustalono warunek występowania różnych znaków tych współczynników. Warunek ten opiera się na położeniu średniej arytmetycznej obserwacji względem przedziału <D,Z>, gdzie D jest dominantą zbioru danych, a Z pewną wielkością także wyznaczoną na podstawie tego samego zbioru obserwacji.
Wyniki: W wyniku przeprowadzonych badań ustalono, że oba rozważane współczynniki asymetrii mają te same znaki, gdy średnia arytmetyczna $\bar{x}$ znajduje się wewnątrz tego przedziału, a różne wtedy gdy $\bar{x}$ leży poza tym przedziałem.
Wnioski: W konkretnym badaniu wybranej cechy należy obliczać tylko jeden z tych współczynników.

Słowa kluczowe: rozkład empiryczny, współczynniki asymetrii As i γ, znaki współczynników

Address for correspondence/ Adres korespondencyjny: *prof dr hab. Mirosława Wesołowska-Janczarek, Pope John Paul II State School of Higher Education in Biała Podlaska, Department of Economics and Management, Sidorska 95/97, 21-500 Biała Podlaska, Poland; phone: +48 83 344-99-05, e-mail: wesolowska.janczarek@gmail.com; dr hab. Andrzej Kornacki, University of Life Sciences in Lublin, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Akademicka 12, 20-950 Lublin, Poland; phone: +48 81 445-68-10; e-mail:Andrzej.Kornacki@up.lublin.pl*

Journal indexed in/ Czasopismo indeksowane w: AGRO, BazEkon, Index Copernicus Journal Master List, ICV 2014: 70.81 (6.96); Polish Ministry of Science and Higher Education 2015: 8 points/ AGRO, BazEkon, Index Copernicus Journal Master List ICV 2014: 70,81 (6,96); Ministerstwie Nauki i Szkolnictwa Wyższego 2015: 8 punktów.

Introduction

Data gathered during full research or partial research require description of their structure. . If the tested parameter is measurable and we will pursue such parameters in this study then arrangement of the gathered data consists of creating division point series or interval, also called empirical distribution. Since each interval series of equal length of intervals may be brought to point one through replacing the intervals with their median values, further elaborations will be presented for point series.

Table 1. Point series

x_i	x_1	x_2	...	x_c
n_i	n_1	n_2	...	n_c

where x_i are various values of factor are in order from x_{min} to x_{max} , of which c, a n_i are the adequate counts.

In order to describe the structure of data adequate measures are used. The most frequently applied are location and volatility (variation) but interesting results may be also obtained having set up the asymmetry, concentration and flattening measures.

In order to define the structure of data presented in the form of uni-modal empirical distributions of not significant skewness (asymmetry), called typical within the statistics literature classical measures are applied, alternatively supplementing this description by means of establishing measures of location, whilst measures of location should be applied for descriptions of distributions which are strongly asymmetrical.

It is thus worth paying special attention to the measures of asymmetry. We will deal with these precise measures in the subsequent parts of this work, focusing on two of them. These will be As and γ.

Selected measures of asymmetry and the problem related to them

Among all known measures of asymmetry the most frequently used are two of them called asymmetry coefficients (Ostasiewicz et al. 1998; Jóźwiak, Podgórski 2012). These are:

$$As = \frac{\bar{x} - D}{S}$$

and $$\gamma = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c} (x_i - \bar{x})^3 n_i}{S^3}$$

where x_i for $i = 1,2,\ldots,c$ as previously they are further values of factor in point distribution series $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c} n_i x_i$ is an average of a tested factor n_i - count for i-th value of factor within series, $n = \sum_{i=1}^{c} n_i$, S is a standard deviation calculated from a series, while D - is mode. It is also worth noting that numerator of coefficient As is called coefficient of asymmetry.

Wstęp

Zebrane podczas badań pełnych lub częściowych dane wymagają opisania ich struktury. . Jeżeli badana cecha jest mierzalna, a takimi będziemy się w dalszym ciągu zajmować, to uporządkowanie zebranych danych polega na utworzeniu szeregu rozdzielczego punktowego lub przedziałowego, nazywanego też rozkładem empirycznym. Ponieważ każdy szereg przedziałowy o równej długości przedziałów można sprowadzić do punktowego przez zastąpienie przedziałów ich wartościami środkowymi, dalsze rozważania będziemy przedstawiać dla szeregów punktowych postaci:

Tabela 1. Szereg punktowy

x_i	x_1	x_2	...	x_c
n_i	n_1	n_2	...	n_c

gdzie x_i są różnymi wartościami cechy uporządkowanymi od x_{min} do x_{max} , których jest c, a n_i są odpowiednimi liczebnościami.

Dla opisania struktury danych wykorzystuje się odpowiednie miary. Najczęściej używane to miary położenia i zmienności (zróżnicowania), ale ciekawe wnioski można też uzyskać wyznaczając miary asymetrii, koncentracji i spłaszczenia.

Do określenia struktury danych przedstawionych w postaci jednomodalnych rozkładów empirycznych o niezbyt znacznej skośności (asymetrii), zwanych w literaturze statystycznej typowymi stosuje się zwykle miary klasyczne ewentualnie uzupełniając ten opis przez wyznaczenie miar pozycyjnych, natomiast miary pozycyjne powinno się stosować do opisu rozkładów silnie asymetrycznych.

Warto zatem zwrócić szczególną uwagę na miary asymetrii. Tymi właśnie miarami będziemy się zajmować w dalszej części pracy rozważając dwie z nich. Będą to As i γ.

Wybrane miary asymetrii i problem z nimi związany

Wśród wszystkich znanych miar asymetrii najczęściej wykorzystywane są dwie nazywane współczynnikami asymetrii (Ostasiewicz i in. 1998; Jóźwiak, Podgórski 2012). Są to:

$$As = \frac{\bar{x} - D}{S}$$

i $$\gamma = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c} (x_i - \bar{x})^3 n_i}{S^3}$$

gdzie x_i dla $i = 1,2,\ldots,c$ jak poprzednio są kolejnymi wartościami cechy w punktowym szeregu rozdzielczym, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{c} n_i x_i$ jest średnią badanej cechy, n_i- liczebnością dla i-tej wartości cechy w szeregu, $n = \sum_{i=1}^{c} n_i$, S jest odchyleniem standardowym obliczonym z szeregu, zaś D- jest dominantą. Warto też dodać, że licznik współczynnika As nazywany jest wskaźnikiem asymetrii.

When calculating these coefficients for a given series it is easy to find out that they do not have equal values, although in general these are the values of interval <-1, +1>, and further, they may have various signs which was indicated based on the example of the work of Wesołowska-Janczarek (2015). It was also noted in the following quote: 'There is also no guarantee that values of measures obtained by means of the above patterns will have the same sign' in Wikipedia. *Org /wiki/współczynnik skośności* .

Since signs of coefficients of skewness indicate a positive or a negative asymmetry, the authors became interested in the search of answers to the question when such a situation may occur. In such case it is not thus known what this asymmetry is in fact like, whether it is positive as indicated by one of these coefficients or negative as it is indicated by another of them.

Let's also bear in mind that defining the direction of asymmetry thus the sign of the considered coefficients is determined by signs of values appearing in their nominators as their denominators are always positive. First of them As is negative thus it indicates left side asymmetry when $\bar{x} - D < 0$, while the second one γ is negative when $\sum_{i=1}^{c} \quad n_i(x_i - \bar{x})^3 < 0$, since n is also positive. Similarly both coefficients are positive that is$As > 0$ and $\gamma > 0$ when $\bar{x} - D > 0$ and when $\sum_{i=1}^{c} \quad n_i(x_i - \bar{x})^3 > 0$.

However one may indicate examples when this is not the case and the calculated coefficients As and γ for the same series have different signs, thus $As > 0$ and $\gamma < 0$ or $As < 0$ and $\gamma > 0$.

A problem occurs thus when different signs are in place for the same coefficients. In order to respond to this question let's consider that the expression of nominator of coefficient γ may in a simple way be transformed.

$$\sum n_i (x_i - \bar{x})^3 = \sum n_i x_i^3 - \bar{x}(\sum n_i x_i^2 + 2\text{nS}^2).$$

This expression will be positive when

$$\bar{x} < \frac{\sum x_i^3 n_i}{\sum x_i^2 n_i + 2\text{nS}^2}$$

Let us mark as Z an expression on the right side of this inequality thus

$$Z = \frac{\sum x_i^3 n_i}{\sum x_i^2 n_i + 2\text{nS}^2}$$

The following relations may then be shortly written As and γ will have different signs, respectively:

$As < 0$ and $\gamma > 0$ when $\bar{x} < Z$ and $\bar{x} < D$

or $As > 0$ and $\gamma < 0$ when $\bar{x} > Z$ and $\bar{x} > D$,

and identical if both coefficients are positive that is when

$\bar{x} < Z$ and $\bar{x} > D$

or both are negative, and that is when

$\bar{x} > Z$ and $\bar{x} < D$.

Taking into consideration the above inequalities they may be thus written in short form:

Obliczając te współczynniki dla danego szeregu łatwo można się przekonać, że nie mają one jednakowych wartości, chociaż na ogół są to wartości z przedziału <-1, +1>, a co więcej mogą one mieć też różne znaki, co zasygnalizowano na przykładzie w pracy Wesołowskiej-Janczarek (2015). Wspomniano też o tym pisząc, że „Nie ma też gwarancji, że wartości miar otrzymanych za pomocą powyższych wzorów będą miały ten sam znak." w *Wikipedia. Org /wiki/współczynnik skośności* .

Ponieważ znaki współczynników skośności wskazują na dodatnią lub ujemną asymetrię, autorów zainteresowało poszukiwanie odpowiedzi na pytanie kiedy może zajść taka sytuacja. W takim przypadku nie wiadomo bowiem jaka jest właściwie ta asymetria, dodatnia jak wskazuje jeden z tych współczynników, czy ujemna jak podaje drugi z nich.

Zauważmy też, że o określeniu kierunku asymetrii czyli znaku rozważanych współczynników decydują znaki wyrażeń występujących w ich licznikach, gdyż mianowniki są zawsze dodatnie. Pierwszy z nich As jest ujemny, czyli wskazuje lewostronną asymetrię, gdy $\bar{x} - D < 0$, natomiast drugi γ jest ujemny, gdy $\sum_{i=1}^{c} \quad n_i(x_i - \bar{x})^3 < 0$, bo n też jest dodatnie. Podobnie oba współczynniki są dodatnie czyli $As > 0$ i $\gamma > 0$ gdy $\bar{x} - D > 0$ oraz gdy $\sum_{i=1}^{c} \quad n_i(x_i - \bar{x})^3 > 0$.

Jednakże można podać przykłady , gdy tak nie jest i obliczone współczynniki As i γ dla tego samego szeregu mają różne znaki czyli $As > 0$ a $\gamma < 0$ lub $As < 0$ i $\gamma > 0$.

Pojawia się zatem problem kiedy występują różne znaki tych współczynników. Aby odpowiedzieć na to pytanie zauważmy, że wyrażenie z licznika współczynnika γ można w prosty sposób przekształcić

$$\sum n_i (x_i - \bar{x})^3 = \sum n_i x_i^3 - \bar{x}(\sum n_i x_i^2 + 2\text{nS}^2).$$

Wyrażenie to będzie dodatnie, gdy

$$\bar{x} < \frac{\sum x_i^3 n_i}{\sum x_i^2 n_i + 2\text{nS}^2}$$

Oznaczmy przez Z wyrażenie po prawej stronie tej nierówności czyli

$$Z = \frac{\sum x_i^3 n_i}{\sum x_i^2 n_i + 2\text{nS}^2}$$

Można wtedy krótko zapisać następujące relacje, współczynniki As i γ będą miały różne znaki odpowiednio:

$As < 0$ i $\gamma > 0$ gdy $\bar{x} < Z$ i $\bar{x} < D$

lub $As > 0$ i $\gamma < 0$ gdy $\bar{x} > Z$ i $\bar{x} > D$,

a jednakowe jeżeli oba współczynniki są dodatnie to znaczy gdy

$\bar{x} < Z$ i $x > D$

lub oba są ujemne, a to będzie gdy

$\bar{x} > Z$ i $\bar{x} < D$.

Biorąc pod uwagę powyższe nierówności można je razem krótko zapisać:

both coefficients are positive when $D < \bar{x} < Z$, whilst both are negative if $Z < \bar{x} < D$.
whilst coefficients have different signs:
$As > 0$ and $\gamma < 0$ when $\bar{x} > D > Z$ or $\bar{x} > Z > D$

and $As < 0$ and $\gamma > 0$ when $\bar{x} < D < Z$ or $\bar{x} < Z < D$

Let's also notice that Z fulfills one of the following conditions for asymmetrical distributions

$Z > D$ or $Z < D$

depending on whether asymmetry is positive or negative, in case of left-hand asymmetry $Z < D$ and in case of right-hand (positive) the condition is fulfilled $Z > D$.

We will illustrate the considerations so far on some examples.

Example 1.
Let distribution series be in the following form:

Table 2.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	5	15	23	10

Source: own elaboration.

The calculations indicated that
$\bar{x} = 3{,}37; S^2 = 1{,}6098; S = 1{,}2688; D = 4$
and $Z = 3{,}2662$ and n = 60. Furthermore
$As = -0{,}4965$ and $\gamma = -0{,}8230$ and $|As| < |\gamma|$.
It is visible that both coefficients As and γ show left-hand asymmetry $Z < \bar{x} < D$, so $Z < D$ and $\bar{x} < D$.

Example 2.
Here, we have the following distribution:

Table 3.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	11	23	15	7	3	1

Source: own elaboration.

When calculating subsequent values we obtain $\bar{x} = 2{,}5167; S^2 = 1{,}3497; S = 1{,}1618; D = 2$ and $Z = 2{,}6310$ with n = 60. Coefficients indicate right-hand asymmetry and furthermore $D < \bar{x} < Z$ that is $Z > D$ and $\bar{x} < Z$.

Example 3.
Within the work by Wesołowska-Janczarek (2015) the following example of distribution series has been given:

Table 4.

x_i	1	2	3	4	5
n_i	2	6	12	7	3

Source: own elaboration.

Within this series calculated values were as follows: $\bar{x} = 3{,}1; S^2 = 1{,}09; S = 1{,}044; D = 3$ and furthermore $Z = 3{,}0978$ whilst n= 30.

oba współczynniki są dodatnie, gdy $D < \bar{x} < Z$, podczas gdy oba są ujemne, jeżeli $Z < \bar{x} < D$.
natomiast współczynniki mają różne znaki :
$As > 0$ i $\gamma < 0$ gdy $\bar{x} > D > Z$ lub $\bar{x} > Z > D$
oraz $As < 0$ i $\gamma > 0$ gdy $\bar{x} < D < Z$ lub $\bar{x} < Z < D$

Zauważmy jeszcze, że Z spełnia dla rozkładów asymetrycznych jeden z następujących warunków

$Z > D$ lub $Z < D$

w zależności od tego czy asymetria jest dodatnia czy ujemna, Przy asymetrii lewostronnej (ujemnej) $Z < D$, a przy prawostronnej (dodatniej) spełniony jest warunek $Z > D$.

Dotychczasowe rozważania zilustrujemy na przykładach.

Przykład 1.
Niech szereg rozdzielczy ma postać:

Tabela 2.

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	5	15	23	10

Źródło: opracowanie własne.

Z obliczeń wynika, że
$\bar{x} = 3{,}37; S^2 = 1{,}6098; S = 1{,}2688; D = 4$
oraz $Z = 3{,}2662$ i n = 60. Ponadto $As = -0{,}4965$ i $\gamma = -0{,}8230$ i $|As| < |\gamma|$. Widać, że oba współczynniki As i γ pokazują lewostronną asymetrię oraz $Z < \bar{x} < D$, a więc i $Z < D$ oraz $\bar{x} < D$.

Przykład 2.
Tym razem mamy następujący rozkład:

Tabela 3.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	11	23	15	7	3	1

Źródło: opracowanie własne.

Obliczając kolejne wartości uzyskujemy $\bar{x} = 2{,}5167; S^2 = 1{,}3497; S = 1{,}1618; D = 2$ oraz $Z = 2{,}6310$ przy n = 60. Współczynniki pokazują prawostronną asymetrię, a ponadto $D < \bar{x} < Z$ czyli $Z > D$ i $\bar{x} < Z$.

Przykład 3
W pracy Wesołowskiej-Janczarek (2015) podany jest następujący przykład szeregu rozdzielczego:

Tabela 4.

x_i	1	2	3	4	5
n_i	2	6	12	7	3

Źródło: opracowanie własne.

W szeregu tym obliczone wartości były następujące: $\bar{x} = 3{,}1; S^2 = 1{,}09; S = 1{,}044; D = 3$ a ponadto $Z = 3{,}0978$ przy n= 30.

Here, coefficients amount to $As = 0{,}0958$ whilst, when $\gamma = -0{,}0246$ have different signs, as well as $|As| > |\gamma|$. Relation between D, Z and x is here as follows $D < Z < \bar{x}$.

Example 4.

Table 5.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	70	60	80	12	6	4	2

Source: own elaboration.

Calculations give the following values:

$\bar{x} = 2{,}33;\ S^2 = 1{,}468;\ S = 1{,}21;\ D = 3\ oraz\ Z = 2{,}51\ przy\ n = 234$

Coefficients have different signs and amount to: $As = -0{,}55;\ zas\ \gamma = 1{,}0368$. Here As is negative and γ positive. Relation between D, Z and x is here as follows: $\bar{x} < Z < D$.

In the subsequent example we will see what will happen in symmetrical distribution

Example 5

Table 6.

x_i	1	2	3	4	5
n_i	4	6	20	6	4

Source: own elaboration.

We may find in this distribution: $\bar{x} = 3; D = 3; S^2 = 1{,}1; S = 1{,}0488$ and $Z = 3$ while n = 40. Both coefficients As and γ are equal to zero and the relation is here $\bar{x} = D = Z$.

Conclusions

1. Within the considered examples one may notice a regularity that the considered coefficients of asymmetry have the same sign when the average is within the interval with ends D and Z, whilst both coefficients are positive when $D < \bar{x} < Z$, and both are negative when $Z < \bar{x} < D$.
2. The considered coefficients of asymmetry are of different signs when the average is located outside the interval with ends D and Z and precisely: $As > 0$ and $\gamma < 0$ when $\bar{x} > D > Z$ or $\bar{x} > Z > D$ and $As < 0$ and $\gamma > 0$ when $\bar{x} < D < Z$ or $\bar{x} < Z < D$.

Tym razem współczynniki wynoszą $As = 0{,}0958$ podczas , gdy $\gamma = -0{,}0246$ mają więc różne znaki, a także $|As| > |\gamma|$. Relacja między D, Z i x jest tu następująca $D < Z < \bar{x}$.

Przykład 4.

Table 5.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
n_i	70	60	80	12	6	4	2

Źródło: opracowanie własne.

Obliczenia dają następujące wartości:

$\bar{x} = 2{,}33;\ S^2 = 1{,}468;\ S = 1{,}21;\ D = 3\ oraz\ Z = 2{,}51\ przy\ n = 234$

Współczynniki mają różne znaki i wynoszą: $As = -0{,}55;\ zas\ \gamma = 1{,}0368$. Tym razem więc As jest ujemny a γ dodatni. Relacja między D, Z i x jest teraz następująca: $\bar{x} < Z < D$.

W kolejnym przykładzie zobaczymy, co będzie w rozkładzie symetrycznym.

Przykład 5.

Tabela 6.

x_i	1	2	3	4	5
n_i	4	6	20	6	4

Źródło: opracowanie własne.

W tym rozkładzie mamy: $\bar{x} = 3; D = 3; S^2 = 1{,}1; S = 1{,}0488$ oraz $Z = 3$ przy n = 40. Oba współczynniki As i γ są równe zero, a relacja jest tu $\bar{x} = D = Z$.

Wnioski

1. W rozważanych przykładach można zauważyć prawidłowość, iż rozpatrywane współczynniki asymetrii mają ten sam znak gdy średnia mieści się w przedziale o końcach D i Z., przy tym oba współczynniki są dodatnie, gdy $D < \bar{x} < Z$, zaś oba są ujemne, jeżeli $Z < \bar{x} < D$.
2. Rozważane współczynniki asymetrii są różnych znaków gdy średnia znajduje się poza przedziałem o końcach D i Z a konkretnie: $As > 0$ i $\gamma < 0$ gdy $x > D > Z$ lub $\bar{x} > Z > D$ oraz $As < 0$ i $\gamma > 0$ gdy $\bar{x} < D < Z$ lub $\bar{x} < Z < D$.

References/ Literatura:

1. Jóźwiak J., Podgórski J. (2012), *Statystyka od podstaw.* PWE, Warszawa.
2. Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U. (1998), *Statystyka. Elementy teorii i zastosowania*. Wrocław.
3. Wesołowska-Janczarek M. (2015), *Kilka uwag o asymetrii rozkładów empirycznych/ Some notes on the asymmetry of empirical distributions*. Economic and Regional Studies, vol. 8, no. 2, pp. 80-84.
4. Wikipedia. http://org/wiki/współczynnik skośności (2015).