

KRZYSZTOF SIEKIERSKI

**Modele wzrostu pierśnicy sosny
i świerka w drzewostanach mieszanych
świerkowo-sosnowych**

Модели роста диаметра на высоте груди сосны и ели в смешанных
елово-сосновых насаждениях

Models of bhd growth of pine and spruce in mixed
spruce-pine stands

WSTĘP

Matematyczne ujęcie wzrostu pierśnicy poszczególnych drzew jest niezbędnym elementem modelu wzrostowego drzewostanu, jeśli ma on mieć charakter modelu drzewa indywidualnego. Wzrost pierśnicy uzależniony jest od wielu czynników i w związku z tym trudno jest przedstawić go za pomocą prostego równania. Modele wzrostu przeciętnej pierśnicy w drzewostanach sosnowych opracowane zostały przez Zajackowskiego (8) i Rymer-Dudzińską (6). W niniejszej pracy za podstawę budowy modeli wzrostu pierśnicy poszczególnych drzew przyjęto wzory opracowane w Katedrze Produkcyjności Lasu SGGW-AR, wyrażające wzrost pierśnicy sosny (1) oraz świerka (4) w warunkach nie zakłóconych. Wzory te mają postać ogólną:

$$D = C \cdot T \quad (1)$$

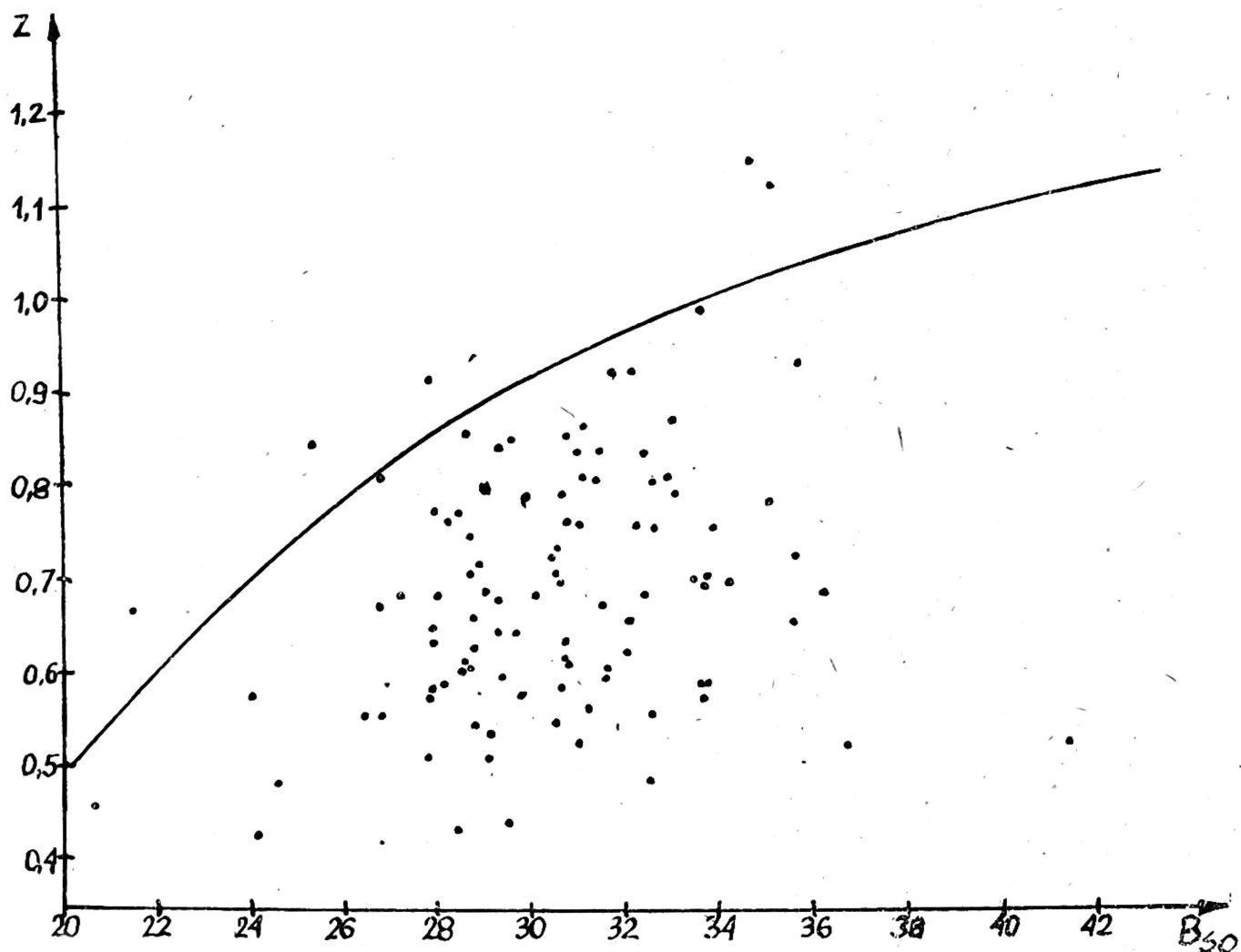
gdzie C oznacza tempo wzrostu pierśnicy, a więc pierśnicę, jaką drzewo osiągnęłoby w wieku pierśnicowym 100 lat, rosnąc zgodnie z modelem, a T jest skomplikowaną funkcją wieku pierśnicowego. Wzór wyrażający wzrost pierśnicy sosny został następnie rozwinięty przez Bruchwalda (1) tak, aby uwzględniał zmiany tempa wzrostu pierśnicy zachodzące u poszczególnych drzew w litych drzewostanach sosnowych. Celem niniejszej pracy było takie rozwinięcie obu wzorów, aby uwzględniały one zmiany tempa wzrostu pierśnicy sosny i świerka w drzewostanach mieszanych.

MATERIAŁ BADAWCZY

Podstawą badań były materiały zebrane na powierzchniach próbnych założonych w 100 drzewostanach mieszanych o różnym udziale sosny i świerka położonych na terenie Puszczy: Knyszyńskiej, Romińskiej i Augustowskiej. We wszystkich drzewostanach sosna była mniej więcej równowiekowa, natomiast świerk pochodził przeważnie z odnowienia naturalnego i odznaczał się dużą zmiennością wieku. Dominującym typem siedliskowym lasu był bór mieszany świeży, ale w materiale reprezentowane były również siedliska bogatsze i uboższe. W większości drzewostanów występowało wyraźne II. piętro świerkowe, którego udział w miąższości dochodził do 70%.

METODYKA BADAŃ

W każdym drzewostanie zmierzona została pierśnica i wysokość wszystkich sosen i świerków o wysokości co najmniej 6 m. Określono średni wiek sosny oraz wiek pierśnicowy każdego świerka. Wiek pierśnicowy sosny obliczono odejmując od wieku całkowitego 8 lat, a więc średni czas dorastania sosny w tych drzewostanach do wysokości 1,3 m. Dla wszystkich sosen i świerków określono również podwójną grubość



Ryc. 1. Zależność miąższości całkowitej drzewostanu w przeliczeniu na hektar od wieku sosny.

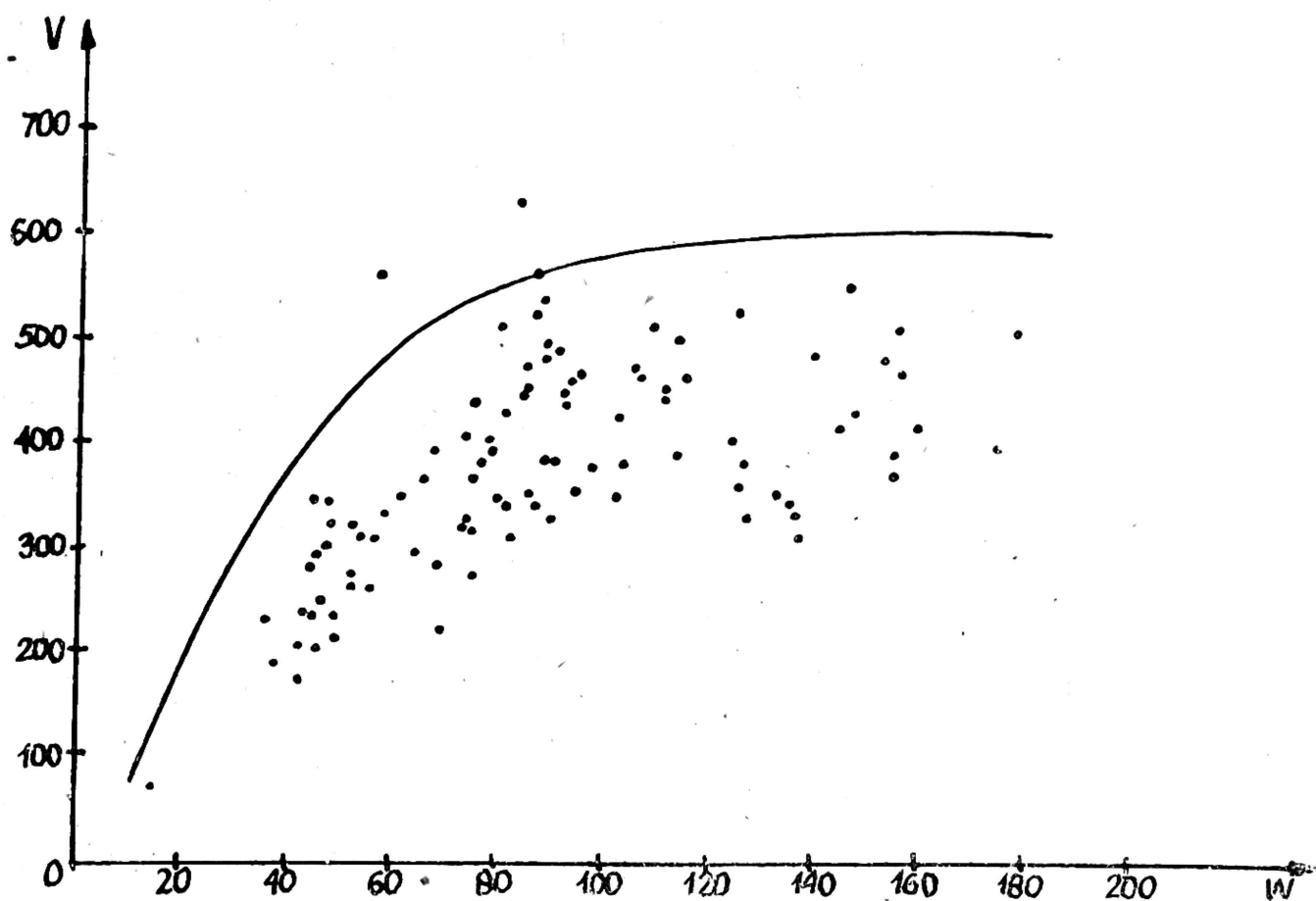
kory oraz 5-letni przyrost pierśnicy. Miąższości poszczególnych drzew obliczono za pomocą wzorów empirycznych opracowanych przez Bruchwalda i Rymer-Dudzińską (2, 3). W celu określenia czynnika zadrzewienia sporządzono wykres przedstawiający zależność miąższości drzewostanów przeliczonej na hektar od wieku sosny, a następnie poprowadzono linię ograniczającą rozrzut punktów do góry (ryc. 1). Linia ta określona jest równaniem:

$$V = \left(\frac{W}{1 + 0,0125 W^{1,2}} \right)^2 \quad (2)$$

gdzie W — wiek sosny,

V — miąższość drzewostanu.

Następnie dla każdego drzewostanu obliczono wstępnie czynnik zadrzewienia jako stosunek miąższości drzewostanu do miąższości określonej wzorem (2). Po sporządzeniu wykresu ilustrującego zależność tak określonego czynnika zadrzewienia od bonitacji sosny poprowadzono li-



Ryc. 2. Zależność wstępnie obliczonego czynnika zadrzewienia od bonitacji określonej dla sosny.

nię ograniczającą rozrzut punktów od góry (ryc. 2). Równanie tej linii ma postać:

$$Z' = \left(\frac{B - 17}{0,914 B - 10,93} \right)^2 + 0,3 \quad (3)$$

gdzie Z' — wstępnie określony czynnik zadrzewienia,

B — bonitacja określona dla sosny.

Po uwzględnieniu bonitacji określonej dla sosny przybliżony wzór na wzrost miąższości z wiekiem przybrał więc postać:

$$V = \left(\frac{W}{1 + 0,0125 W^{1,2}} \right)^2 \left[\left(\frac{B - 17}{0,91 B - 10,93} \right)^2 + 0,3 \right] \quad (4)$$

oznaczenia jak we wzorach (2) i (3).

Czynnik zadrzewienia każdego drzewostanu obliczono dzieląc jego miąższość przez miąższość obliczoną wzorem (4).

Do określania bonitacji sosny zastosowano sposób opisany w pracy (7). Opiera się on na przeciętnej wysokości 100 najgrubszych sosen przypadających na ha oraz ich średnim wieku. W drzewostanach, w których liczba sosen na ha jest mniejsza niż 100, bonitację określono na podstawie przeciętnej wysokości wszystkich sosen, a następnie mnożono przez współczynnik redukcyjny, zależny od liczby sosen na hektarze. Za podstawę określania bonitacji sosny przyjęto wzór empiryczny na wzrost wysokości z wiekiem przedstawiony w pracy Bruchwalda i in. (5). Wysokość górną całego drzewostanu określono jako średnią arytmetyczną wysokości 10 najgrubszych sosen lub 10 najgrubszych świerków na powierzchni badawczej. Za wysokość górną przyjmowano tę średnią, która była większa.

WYNIKI BADAŃ

A. Model wzrostu pierśnicy sosny

W celu matematycznego ujęcia wzrostu pierśnicy sosny zastosowano schemat przyjęty przez Bruchwalda (1) dla litych drzewostanów sosnowych, adaptując go jedynie do warunków drzewostanu mieszanego. Podstawą modelu jest wzór wyrażający wzrost pierśnicy sosny w warunkach nie zakłóconych.

$$D = C \cdot T \quad \text{dla } W \geq 10$$

$$T = \frac{(0,2 W + 10)}{29,7466224} \frac{W^2}{W^2 + 25}$$

$$\text{dla } W \geq 10$$

$$T = 0,06214 + 0,018328 W \quad (5)$$

gdzie W — wiek pierśnicowy drzewa,

C — tempo wzrostu pierśnicy,

D — pierśnica drzewa,

T — współczynnik zależny od wieku.

Chcąc obliczyć pierśnicę drzewa w wieku $W + \Delta W$, a więc po upływie określonej liczby lat, trzeba najpierw określić tempo wzrostu pierśnicy

$$C = \frac{D_w}{T_w} \quad (6)$$

Jeśli tempo wzrostu pierśnicy pozostanie bez zmian, to pierśnica w wieku $W + \Delta W$ będzie równa

$$D_{w+\Delta w} = C \cdot T_{w+\Delta w} \quad (7)$$

W celu sprawdzenia jak zmienia się z wiekiem tempo wzrostu pierśnicy, obliczono dla każdego drzewostanu przeciętną pierśnicę przekrojącą 100 najgrubszych sosen na hektar (D_{100}) na początku i na końcu okresu 5-letniego. W drzewostanach, w których liczba sosen na hektar była mniejsza od 100, przeciętną pierśnicę obliczono na podstawie wszystkich sosen, a następnie przeliczano na przybliżoną wartość D_{100} , mnożąc przez współczynnik redukcyjny, określony wzorem:

$$\frac{D_{100}}{D_g} = 0,76 + 0,024 \sqrt{N} \quad (8)$$

gdzie D_{100} — przeciętna pierśnica 100 najgrubszych sosen na hektar,
 D_g — przeciętna pierśnica wszystkich sosen,
 N — liczba sosen w przeliczeniu na hektar.

Następnie, korzystając ze wzoru (6) określono dla każdego drzewostanu tempo wzrostu pierśnicy dla końca (C_{w+5}) i początku (C_w) okresu oraz iloraz C_{w+5}/C_w . Podobnie jak w pracy Bruchwalda (1) stwierdzono, że zmienność tych ilorazów maleje z wiekiem drzewostanu. Można więc wnioskować, że tempo wzrostu pierśnicy dąży do pewnej wartości, którą można określić równaniem linii sterującej. W celu znalezienia równania tej linii zbadano zależność tempa wzrostu pierśnicy od różnych cech drzewostanu. Stwierdzono, że w największym stopniu zależy ono od bonitacji sosny oraz procentowego udziału świerka w miąższości drzewostanu. Nie udało się natomiast stwierdzić wyraźnej zależności linii sterującej od czynnika zadrzewienia. Ostatecznie opracowano równanie linii sterującej o postaci:

$$C_t = 42,33 + 13,64 B_{so} - U_{\text{św}} \quad (9)$$

gdzie C_t — tempo wzrostu pierśnicy 100 najgrubszych sosen na hektar,
 B_{so} — bonitacja sosny,
 $U_{\text{św}}$ — procentowy udział świerka w miąższości drzewostanu.

Dla każdego drzewostanu określono następnie ilorazy

$$X_1 = \frac{C_{w+5}}{C_w} \text{ i } X_2 = \frac{C_w}{C_t}, \text{ zbadano zależność między nimi. Zależność ta}$$

okazała się znacznie słabsza niż w litych drzewostanach sosnowych, stwierdzono natomiast dość silny związek ilorazu X_1 z czynnikiem zadrzewienia (Z). Zależność między tymi trzema cechami wyraża równanie

$$X_1 = 1,1 - 0,064 X_2 - 0,048 Z \quad (10)$$

a współczynnik korelacji wielokrotnej wynosi 0,5.

Tempo wzrostu pierśnicy na końcu okresu można zapisać za pomocą równania:

$$C_{w+\Delta w} = C_w + (C_{w+5} - C_w) \frac{\Delta W}{5} \quad (11)$$

gdzie $C_{w+\Delta w}$ — tempo wzrostu pierśnicy po upływie ΔW lat.

Ponieważ $X_1 = \frac{C_{w+5}}{C_w}$, więc $C_{w+5} = C_w \cdot X_1$, a zatem:

$$C_{w+\Delta w} = C_w + (C_w \cdot X_1 - C_w) \frac{\Delta W}{5} \quad (12)$$

Podstawiając za X_1 prawą stronę równania (10) otrzymujemy:

$$C_{w+\Delta w} = C_w + \left[C_w (1,1 - 0,064 X_2 - 0,048 \cdot Z) = C_w \right] \frac{\Delta W}{5} \quad (13)$$

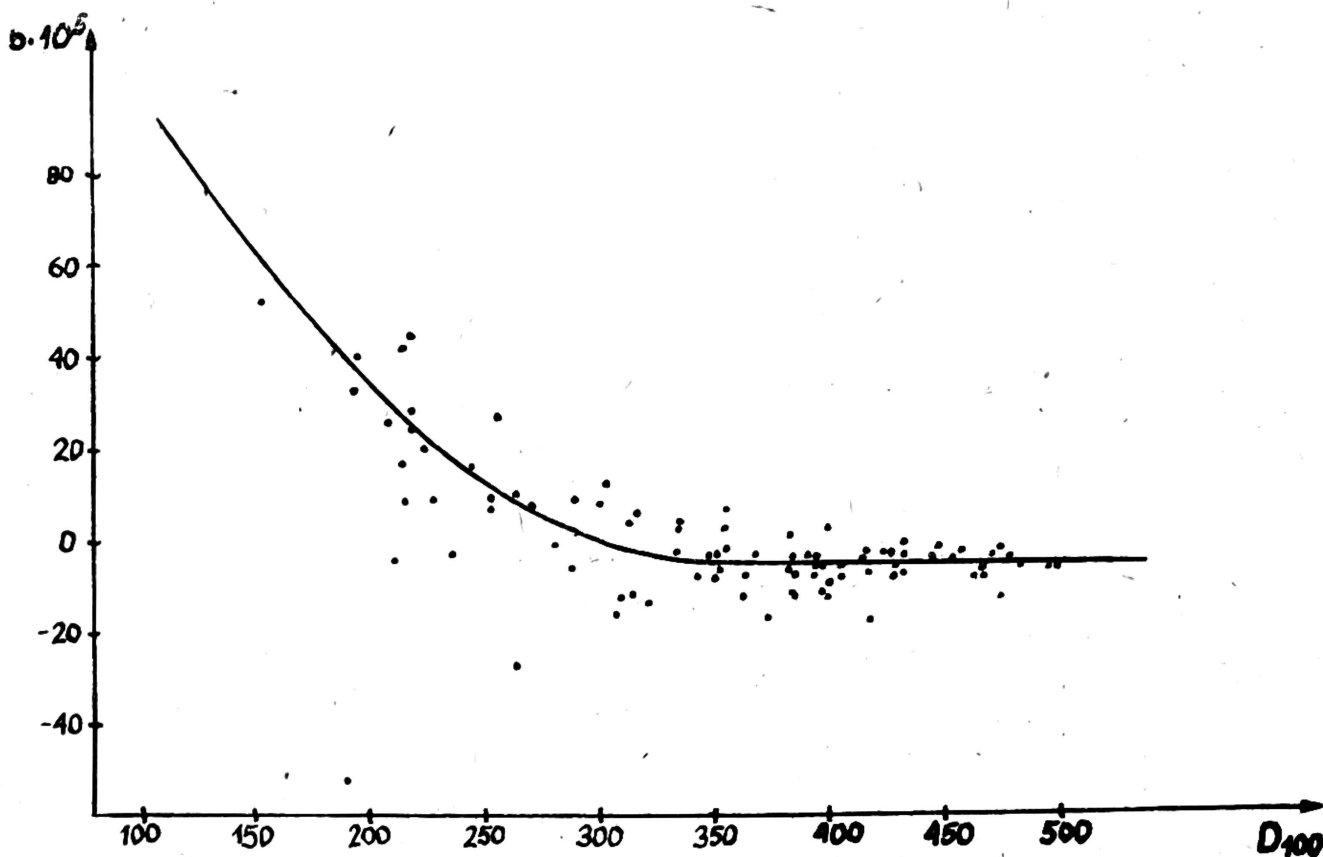
$$C_{w+\Delta w} = C_w \left[1 + (0,1 - 0,064 \frac{C_w}{C_t} - 0,048 \cdot \Delta Z) \frac{\Delta W}{5} \right] \quad (14)$$

Wprowadzono jeszcze korektę, która spowoduje, że zmiany tempa wzrostu pierśnicy w młodym wieku będą szybsze, a w starszym wolniejsze.

$$C_{w+\Delta w} = C_w \left[1 + (0,1 - 0,064 \frac{C_w}{C_t} - 0,048 Z) \frac{\Delta W}{5} \cdot \frac{20}{W + \Delta W} \right] \quad (15)$$

$$C_{w+\Delta w} = C_w \left[1 + (0,4 - 0,256 \frac{C_w}{C_t} - 0,192 Z) \frac{\Delta W}{W + \Delta W} \right] \quad (16)$$

Wzór (16) dotyczy tempa wzrostu średniej pierśnicy 100 najgrubszych sosen na hektar. Aby wprowadzić tę poprawkę dla poszczegól-



Ryc. 3. Zależność współczynników kierunkowych równania regresji między pierśnicą a stosunkiem C_5/C_0 od przeciętnej pierśnicy 100 najgrubszych sosen na hektarze.

nych sosen obliczono dla każdego drzewa iloraz tempa wzrostu pierśnicy na końcu i na początku okresu, a następnie dla każdego drzewostanu, znaleziono równanie prostej regresji między tym ilorazem a pierśnicą. Współczynniki kierunkowe (b) tych prostych wyrównano w zależności od D_{100} do linii (ryc. 3) określonej równaniem:

$$b = 1,971 \cdot 10^{-3} - 1,123 \cdot 10^{-5} \cdot D_{100} + 1,56 \cdot 10^{-8} \cdot D_{100}^2$$

dla $D_{100} \leq 360$ (17a)

$$b = -5 \cdot 10^{-5} \quad \text{dla } D_{100} > 360 \quad (17b)$$

Tempo wzrostu pierśnicy na końcu okresu będzie więc określone wzorem:

$$C_{w+\Delta w} = C_w \left[1 + (0,4 - 0,256 \frac{C_w}{C_t} - 0,192 Z) \frac{\Delta W}{W + \Delta W} + b(d - D_{100}) \right]$$

gdzie d — pierśnica drzewa

a pierśnicę na końcu okresu ($D_{w+\Delta w}$) określa wzór:

$$D_{w+\Delta w} = C_{w+\Delta w} \cdot T_{w+\Delta w} \quad (18)$$

Ostatecznie model wzrostu pierśnicy sosny ma więc postać:

$$D_{w+\Delta w} = C_w \left[1 + (0,4 - 0,256 \frac{C_w}{C_t} - 0,192 \cdot Z) \frac{\Delta W}{W + \Delta W} + b/d - D_{100} \right] \cdot T_{w+\Delta w} \quad (19)$$

B. Model wzrostu pierśnicy świerka

Wzrost pierśnicy świerka w warunkach nie zakłóconych można przedstawić (4) za pomocą wzoru:

$$D = C \cdot T \quad T = \left(\frac{W}{(2,468619 + 0,753138 \sqrt{W})^2} \right)^2 \quad (20)$$

oznaczenia jak we wzorze (5)

Dla sprawdzenia, jak zmienia się z wiekiem tempo wzrostu pierśnicy świerka, obliczono dla każdego drzewa stosunek tempa wzrostu pierśnicy na końcu (C_{w+5}) i na początku (C_w) okresu 5-letniego. Podobnie, jak w przypadku sosny, stwierdzono, że zmienność tego stosunku maleje z wiekiem. Można więc założyć, że tempo wzrostu pierśnicy świerka dąży do pewnej wartości. Dalsza analiza materiału wykazała jednak, że nie może to być jedna, wspólna wartość dla całego drzewostanu, lecz trzeba tu uwzględnić również cechy poszczególnych drzew. W celu wyznaczenia równania linii sterującej zbadano najpierw zależność średniego tempa wzrostu pierśnicy świerka w drzewostanie od różnych cech drzewostanu. Stwierdzono, że jedyną cechą, z którą średnie tempo wzrostu pierśnicy jest stosunkowo silnie związane, jest procentowy udział świerka w miąższości drzewostanu ($U_{\text{św}}$). Zależność tempa wzrostu pier-

śnicy od czynnika zadrzewienia była bardzo słaba, natomiast zależność od bonitacji sosny praktycznie nie istniała ($r = 0,026$). Dla średniego tempa wzrostu pierśnicy świerka w drzewostanie uzyskano równanie:

$$C = 202,58 + 1,327 U_{\text{św}} \quad (21)$$

Zbadano następnie zależność tempa wzrostu pierśnicy od różnych cech drzew w obrębie drzewostanów. Stwierdzono, że w największym stopniu zależy ono od stosunku wysokości drzewa (h) do wysokości górnej drzewostanu (H_{10}). W każdym drzewostanie znaleziono równanie regresji między tym stosunkiem a tempem wzrostu pierśnicy, po czym zbadano zależność współczynników kierunkowych tych równań od różnych cech drzewostanów. Współczynnik kierunkowy można określić za pomocą równania:

$$b = 4,388 B_{\text{so}} + 2,427 H_{10} - 48,562 \quad (22)$$

Wartość, do której dąży tempo wzrostu pierśnicy świerka, można więc określić za pomocą wzoru:

$$C_t = (202,58 + 1,327 U_{\text{św}}) + (4,388 B_{\text{so}} + 2,427 H_{10} - 48,562) \left(\frac{h - H}{H_{10}} \right) \quad (23)$$

gdzie H — średnia arytmetyczna wysokości świerków w drzewostanie.

Jeśli tempo wzrostu pierśnicy C dąży do wartości C_t , to można je wyrazić za pomocą wzoru:

$$C = C_t + \frac{b}{W^\alpha} \quad (24)$$

gdzie b i α to współczynniki równania

Mając dane tempo wzrostu pierśnicy w wieku W można obliczyć wartość współczynnika b

$$b = (C_w - C_t) \cdot W^\alpha \quad (25)$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (24) można więc określić tempo wzrostu pierśnicy po upływie ΔW lat:

$$C_{w+\Delta w} = C_t + (C_w - C_t) \left(\frac{W}{W + \Delta W} \right)^\alpha \quad (26)$$

Po obliczeniu wartości C_t oraz mając obliczone tempo wzrostu pierśnicy na końcu i na początku okresu 5-letniego, obliczono dla każdego świerka dla którego było to możliwe wartość współczynnika α , korzystając z przekształcenia wzoru (26):

$$\alpha = \log \frac{w}{w + \Delta w} \left(\frac{C_{w+\Delta w} - C_t}{C_w - C_t} \right) \quad (27)$$

Współczynnik α odznaczał się bardzo dużą zmiennością, u wielu drzew przybierał wartości ujemne, co świadczy o oddalaniu się tempa wzrostu pierśnicy od linii sterującej. Nie udało się stwierdzić wyraźnej zależ-

ności tego współczynnika od żadnej z badanych cech drzew i drzewostanów. Przyjęto więc jego wartość średnią, równą 0,251. Podstawiając obliczoną wartość α do równania (26) otrzymano wzór na tempo wzrostu pierśnicy po upływie ΔW lat:

$$C_{w+\Delta w} = C_t + (C_w - C_t) \left(\frac{W}{W + \Delta W} \right)^{0,251} \quad (28)$$

Pierśnica w wieku $W + \Delta W$ będzie równa:

$$D_{w+\Delta w} = \left(C_t + (C_w - C_t) \left(\frac{W}{W + \Delta W} \right)^{0,251} \right) \cdot T_{w+\Delta w} \quad (29)$$

WNIOSKI

1. W drzewostanach świerkowo-sosnowych tempo wzrostu pierśnicy obu gatunków zmienia się z wiekiem, przy czym zmiany te w młodym wieku są większe niż w starszym. W obu modelach przyjęto, że tempo wzrostu pierśnicy dąży do pewnej wartości średniej.

2. U obu gatunków tempo wzrostu pierśnicy jest dodatnio skorelowane z udziałem danego gatunku w drzewostanie, brak natomiast zależności między bonitacją określoną dla sosny a tempem pierśnicy świerka. Wydaje się więc, że o możliwościach wzrostowych każdego gatunku decydują inne czynniki siedliskowe, lub też, że w niektórych przypadkach konkurencja międzygatunkowa może mieć większy wpływ na wzrost pierśnicy niż jakość siedliska.

3. Wzory (5) i (20) już od pewnego czasu znajdują zastosowanie w badaniach naukowych. Rozwinięte postacie obu modeli powinny natomiast stać się elementem modelu wzrostowego drzewostanów mieszanych świerkowo-sosnowych.

LITERATURA

1. Bruchwald A.: Diameter growth of trees in Scots pine stand — a mathematical approach. Ann. Warsaw Agric. Univ. — SGGW-AR, For. and Wood Technol. 1987 Vol. 36.
2. Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T.: Tablice miąższości strzał w korze dla drzewostanów sosnowych. Zesz. Nauk. SGGW-AR, Leś. 1987 z. 26.
3. Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T.: Wzory empiryczne do określania miąższości strzał w korze dla świerka. Sylwan 1981 R. 125 nr 4.
4. Bruchwald A., Rymer-Dudzińska T.: Empiryczny model wzrostu pierśnicy świerka w drzewostanach mieszanych sosnowo-świerkowych. Sylwan 1988 R. 132 nr 7.
5. Bruchwald A., Dudzińska T., Dudek A., Michalak K., Wróblewski L.: Wstępne wyniki badań nad produktywnością drzewostanów świerkowo-sosnowych północno-wschodniej Polski. Sylwan 1985 R. 129 nr 9.

6. Rymer-Dudzińska T.: A Model of Average Breast Height Diameter Development in Pine Stands. Bull. Acad. Pol. Sci. Biol. 1980 Vol. 28 No 12.
7. Siekierski K.: Determination of the site class of pine in spruce — pine stands. Ann. Warsaw Agric. Univ. SGGW-AR, For. and Wood Technol. 1987 Vol. 37.
8. Zajączkowski S.: Empiryczny model kształtowania się pierśnicy i przyrostu pierśnicy w wybranych szeregach rozwojowych drzewostanów sosnowych. Sylwan 1981 R. 125 nr 4.

Praca wpłynęła do Komitetu Redakcyjnego 1 grudnia 1987 r.