MODEL MATEMATYCZNY BĘBNOWEGO WSPÓŁPRĄDOWEGO WYMIENNIKA CIEPŁA PRZY ZMIENNYM WSPÓŁCZYNNIKU PRZEJMOWANIA CIEPŁA

K. MIKUCKI — Polska

W pracy [1] rozwiązano zagadnienie wymiany ciepła między gazowym czynnikiem (powietrzem) a cząstkami ciała stałego, przy założeniu stałości współczynników charakteryzujących wymianę ciepła oraz stałości parametrów termodynamicznych opisujących własności gazowego czynnika i cząstek ciała stałego. Okazuje się jednak, że objętościowy współczynnik wymiany ciepła między gazowym czynnikiem a cząstkami ciała stałego $(a\alpha)_b$, odniesiony do objętości bębna suszarki, jest zmienny. Z przesłanek empirycznych założono, że $(a\alpha)_b$ ma następującą postać

$$(a\alpha)_b = P\exp(-Ax), \tag{1}$$

gdzie:

P, A — stałe dobrane empirycznie,

x — odległość od początku bębna mierzona wzdłuż jego osi obrotu.

Celem niniejszej pracy było rozwiązanie układu równań opisujących wymianę ciepła między czynnikiem suszącym a cząstkami ciała stałego, nagrzewanymi w bębnie suszarki przy tak określonej postaci współczynnika $(a\alpha)_b$. Przyjęto tu, że współczynniki strat ciepła przez warstwę cząstek ciała stałego są stałe wzdłuż całej długości bębna oraz, że

$$k/k_m = W/W_m \text{ [2]},$$

gdzie:

k — współczynnik przenikania ciepła przez ściankę bocznej powierzchni bębna między czynnikiem a otoczeniem,

k_m — współczynnik przenikania ciepła przez ściankę bocznej powierzchni bębna między nagrzewanymi w bębnie cząstkami ciała stałego a otoczeniem,

W, W_m — równoważniki wodne dla gazowego czynnika i nagrzewanych cząstek ciała stałego.

Przy tak przyjętych założeniach układ równań opisujących wymianę ciepła w bębnie ma następującą postać

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= -C\exp(-Ax)(t-t_m)-D_1(t-t_0), \\ \frac{dt_m}{dx} &= C\exp(-Ax)\frac{W}{W_m}(t-t_m)-D_1(t-t_0), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$C = \pi d_b^2 P/4W$,

$D_1 = \pi d_b k_m/W_m$,

d_b — wewnętrzna średnica bębna,

$t = t(x)$ — temperatura czynnika,

$t_m = t_m(x)$ — temperatura cząstek ciała stałego.

Wprowadzając do układu równań (2) nowe zmienne

$$u = t_m - t_0,$$

$$v = t - t_0$$

oraz dokonując pewnych przekształceń otrzymujemy następujący układ równań

$$\frac{dv}{dx} = (-C\exp(-Ax) - D_1)v + C\exp(-Ax)u, \tag{3}$$

$$\frac{du}{dx} = C\frac{W}{W_m}\exp(-Ax)v + \left(-C\frac{W}{W_m}\exp(-Ax) - D_1\right)u. \tag{4}$$

Mnożąc stronami równanie (3) przez W/W_m i dodając stronami do równania drugiego tegoż układu, otrzymujemy

$$\frac{d\left(\frac{W}{W_m}v + u\right)}{dx} = -D_1\left(\frac{W}{W_m}v + u\right). \tag{5}$$

Po wprowadzeniu podstawienia

$$z = \frac{W}{W_m}v + u \tag{6}$$

otrzymujemy w miejsce równania (5) równanie (7)

$$\frac{dz}{dx} = -D_1 z. \tag{7}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$z(x) = C_1\exp(-D_1 x), \tag{8}$$

w której C_1 — dowolna stała.

Uwzględniając podstawienie (6) otrzymujemy

$$\frac{W}{W_m}v + u = C_1\exp(-D_1 x). \tag{9}$$

Z zależności (9) wyznaczamy v i podstawiamy je do równania drugiego układu równań (3), (4). W wyniku podstawienia i kilku przekształceń równanie drugie przyjmuje postać

$$\frac{du}{dx} = \left(\left(-C - C\frac{W}{W_m}\right)\exp(-Ax) - D_1\right)u + CC_1\exp\left(-(A+D_1)x\right). \tag{10}$$

Wykorzystując metodę rozwiązywania równań różniczkowych niejednorodnych zwyczajnych [3] wyznaczamy rozwiązanie równania (10)

$$u(x) = C_2 \exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)\exp(-Ax)-D_1 x\right)+C_1\frac{W_m}{W+W_m}\exp(-D_1 x), \tag{11}$$

gdzie C_2 — dowolna stała.

Uwzględniając zależność (9) i wzór (11) wyznaczamy wzór na v

$$v(x) = C_1\frac{W_m}{W+W_m}\exp(-D_1 x)+C_2\frac{W_m}{W}\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)\exp(-Ax)-D_1 x\right).$$

Zgodnie z podstawieniami dokonanymi w początkowej fazie rozwiązywania otrzymujemy ostatecznie

$$\left.\begin{aligned} t_m(x) &= t_0+C_1\frac{W_m}{W+W_m}\exp(-D_1 x)+C_2\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)\exp(-Ax)-D_1 x\right)\\ t(x) &= t_0+C_1\frac{W_m}{W+W_m}\exp(-D_1 x)-C_2\frac{W}{W_m}\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)\exp(-Ax)-D_1 x\right)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Stałe C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków nałożonych na temperaturę materiału

$$\begin{aligned} t_m(0) &= t_0,\\ t_m(x_p) &= t_p,\\ x_p &> 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Z fizyki zjawiska wynika, że $t_p > t_0$.

W wyniku rozwikłania warunków (13) względem stałych C_1 i C_2 otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{(t_0-t_p)(W+W_m)\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)\right)}{W_m\left(\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)-D_1 x_p\right)-\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)\cdot\exp(-Ax_p)-D_1 x_p\right)\right)}\\ C_2 &= \frac{t_0-t_p}{\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)-D_1 x_p\right)-\exp\left(\frac{C}{A}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)\exp(-Ax_p)-D_1 x_p\right)}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wstawiając wartości na C_1 i C_2 do wzorów (12) na temperatury $t(x)$ i $t_m(x)$ i wykonując przekształcenia otrzymujemy

$$t(x) = t_0+(t_p-t_0)\exp\left(-\pi d_b \frac{k_m}{W_m}(x-x_p)\right)\times$$
$$\times \frac{1+\frac{W_m}{W}\exp\left(\frac{\pi d_b^2 P}{4AW}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)(\exp(-Ax)-1)\right)}{1-\exp\left(\frac{\pi d_b^2 P}{4AW}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)(\exp(-Ax_p)-1)\right)}, \tag{15}$$

$$t_m(x) = t_0+(t_p-t_0)\exp\left(-\frac{\pi d_b k_m}{W_m}(x-x_p)\right)\times$$
$$\times \frac{1-\exp\left(\frac{\pi d_b^2 P}{4AW}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)(\exp(-Ax)-1)\right)}{1-\exp\left(\frac{\pi d_b^2 P}{4AW}\left(1+\frac{W}{W_m}\right)(\exp(-Ax_p)-1)\right)}.$$

Przeprowadzono krótką analizę charakteru zmienności funkcji $t(x)$ i $t_m(x)$ na całej długości bębna. Z postaci analitycznej (15) funkcji $t(x)$ i $t_m(x)$ widać, że

$$\lim_{x\to+\infty} t(x) = \lim_{x\to+\infty} t_m(x) = t_0.$$

Funkcja $t_m(x)$ spełnia nałożone na nią warunki (13)

Funkcja $t(x)$ jest malejąca na całej długości bębna suszarki, ponieważ jej pierwsza pochodna jest ujemna w każdym punkcie na osi bębna.

Funkcja $t_m(x)$ jest początkowo rosnąca dla x spełniających warunek

$$\exp\{1-\exp(-Ax)\}\frac{\pi d_b^2 P}{4AW} < 1+\exp(-Ax)\frac{Pd_b(W+W_m)\left(1+\frac{W}{W_m}\right)}{W}, \tag{16}$$

a następnie osiąga maximum i potem maleje. Punkt maksymalny spełniać powinien warunek (16) z tym, że zamiast znaku „mniejsze" jest znak równości.

Postać analityczna funkcji $t(x)$ i $t_m(x)$ może być wykorzystana do zamodelowania na maszynie analogowej kształtu krzywych temperatur czynnika gazowego oraz nagrzewanych cząstek ciała stałego dla dowolnego układu parametrów termodynamicznych z założonego w pracy obszaru zmienności charakteryzujących wymianę ciepła w bębnowym współprądowym wymienniku ciepła.

Wzory (15) można także wykorzystać do rozważań na temat wymiany ciepła w suszarkach bębnowych.

LITERATURA

1. Pabis S., Gadaj S. P., Suprunowicz R.: Model matematyczny procesu nagrzewania materiału w suszarkach bębnowych przy stałych wartościach współczynników wymiany ciepła. IMER, Warszawa 1971.
2. Pabis S., Gadaj S. P., Suprunowicz R.: Opracowanie metod wyznaczania współczynników charakteryzujących wymianę ciepła w suszarce bębnowej. IMER, Warszawa 1970.
3. Stepanow W. W.: Równania różniczkowe. PWN, Warszawa 1964.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАРАБАННОГО ПРЯМОТОЧНОГО ТЕПЛООБМЕННИКА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООБМЕНА

К. МИКУЦКИ — Польша

Резюме

Процесс теплообмена в сушильном барабане можно описать системом двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого ряда.

В этих уравнениях выступают коэффициенты, характеризующие теплообмен:

— коэффициент теплообмена между агентом и материалом,

— коэффициент теплопереноса сквозь поверхность барабана между материалом и средой,

— коэффициент теплопереноса сквозь поверхность барабана между агентом и средой.

Принято, что коэффициент теплообмена между агентом и материалом является экспотенциальной длины барабана, отношение же коэффициентов потерь для агента и материала равен отношению водяных эквивалентов для агента и материала.

Рассматриваемая система уравнений решена аналитически с учетом вышеуказанных данных.

В результате решения получены формулы, описывающие распределение температуры агента и материала вдоль длины барабана.

Анализ решений показал, что температура агента постоянно уменьшается, температура же материала первоначально растёт, достигает максимума и потом понижается.

Максимальная точка аналитически не определена, так как уравнение, соответствующее этой точке, нельзя решить аналитически.

Можно обозначить по нумерическим методам приблизительную величину максимальной точки для принятых величин коэффициентов.

MATHEMATICAL MODEL OF CONCURRENT FLOW DRUM HEAT EXCHANGER AT VARIABLE COEFFICIENT OF HEAT TRANSFER

K. MIKUCKI — Poland

Summary

The process of heat transfer in the drying drum can be described by the system of two ordinary differential equations of the first order.

Following coefficients characterizing the process of heat exchange are involved in mentioned quations:

— coefficient of the heat transfer between the heating agent and material,

— coefficient of the heat transfer through the surface of drum coat between the heating agent and environment,

— coefficient of the heat transfer through the surface of drum coat between the material and environment.

It was assumed that the coefficient of the heat transfer between the heating agent and material is an exponential function of the distance from the inlet point of drum, where as the relation of lose-coefficients of the heating agent and material is equal to relation of heat flow equivalents heat flow equivalent Kcal/h°C = rate of mass flow × specific heat for heating agent and the material.

Regarding the above assumption the considered equation system has been solved analytically. In effect the formulas were obtained and material along the lenght of a drum.

Analysis of the solution has shown that the drying agent temperature constantly decreases, whereas the temperature of material being dried increases initially, reaches the maximum, then decreases.

The maximum point was not determined analytically because the equation satisfied by this point is not to be solved analytically. The approximate value of this maximal point for given coefficient values can be determined numerically.

DER MATHEMATISCHE MODELL DES TROMMELGLEICHSTROM-WÄRMETAUSCHERS BEI DEM VERÄNDERLICHEN KOEFFIZIENT DER WÄRMEÜBERNAHME

K. MIKUCKI — Polen

Zusammenfassung

Das Verfahren des Wärmetausches in dem Trocknungstrommel kann man mit der Anordnung von zwei gewöhnlichen Differenzialgleichungen der ersten Stufe beschreiben.

In diesen Gleichungen treten die den Wärmetausch charakterisierenden Koeffiziente aus:

— der Koeffizient der Wärmeübernahme zwischen Trocknungsmittel und dem Material,

— der Koeffizient der Wärmedurchdringung durch die Trommelmantelfläche zwischen dem Trocknungsmittel und der Umgebung,

— der Koeffizient der Wärmedurchdringung durch die Trommelmantelfläche zwischen dem Material und der Umgebung.

Man setzt voraus, dass der Koeffizient der Wärmeübernahme zwischen dem Trocknungsmittel und dem Material die Exponentfunktion der Entfernung von dem Anfang des Trommels sei, dagegen der Verhältnis der Verlustkoeffiziente für den Trocknungsmittel und Material gleich dem Verhältnis der Wasseräquivalente für den Trocknungsmittel und Material ist.

Mit Berücksichtigung dieser Voraussetzungen hat man analytisch die betrachtete Anordnung der Gleichungen gelöst.

Als Resultat bekommt man die Formeln, welche den Verlauf der Temperatur des Trocknungsmittels und Materials längs dem Trommel beschreiben.

Die Analyse der Lösungen hat gezeigt, dass die Temperatur des Trocknunhsmittels ständig herabfällt, dagegen die Temperatur des Materials anfangs steigert, erreicht maximum und weiter herabfällt.

Numerisch kann man den annähernden Wert des Maximumpunktes für die angegebenen Koeffizientenwerte bestimmen.