

PRACE NAUKOWO-PRZEGLĄDOWE

Przeegląd Naukowy – Inżynieria i Kształtowanie Środowiska nr 1 (47), 2010: 43–52

(Prz. Nauk. Inż. Kszt. Środ. 1 (47), 2010)

Scientific Review – Engineering and Environmental Sciences No 1 (47), 2010: 43–52

(Sci. Rev. Eng. Env. Sci. 1 (47), 2010)

Marcin KRUKOWSKI

Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska SGGW w Warszawie

Department of Hydraulic Engineering and Environmental Recultivation WULS – SGGW

Statystyczna metoda weryfikacji założeń technicznych modelu koryta dwudzielnego wykorzystywanego w badaniach hydraulicznych

Statistical method for verification of technical principles of compound channel model construction for hydraulic research

Słowa kluczowe: model koryta dwudzielnego, statystyczna weryfikacja przekroju

Key words: model of compound channel, statistical verification of cross-section

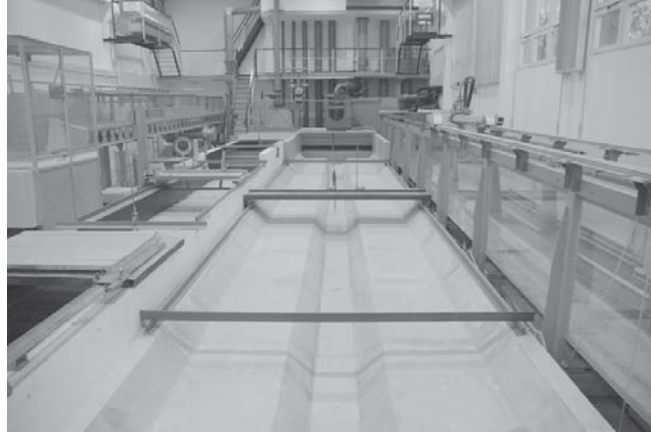
Wprowadzenie

W laboratorium hydraulicznym Katedry Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska Wydziału Inżynierii i Kształtowania Środowiska Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie zbudowano w 2005 roku betonowe koryto do badań przepustowości. Koryto jest prostoliniowe, ma długość 16 m i szerokość 2,5 m z symetrycznymi terenami zalewowymi i dwudzielnym trapezowym przekrojem poprzecznym (rys. 1). Projektowany spadek podłużny dna koryta głównego i terenów zalewo-

wych wynosił 1,0‰. Tereny zalewowe nie mają spadku poprzecznego. Po wybudowaniu modelu konieczna jest kontrola warunków technicznych, założonych w projekcie koryta, i stwierdzenie, czy ewentualne odkształcenia modelu koryta badawczego są dopuszczalne. Niestaranne wykonanie koryta może uniemożliwić prowadzenie badań w warunkach ruchu ustalonego jednostajnego.

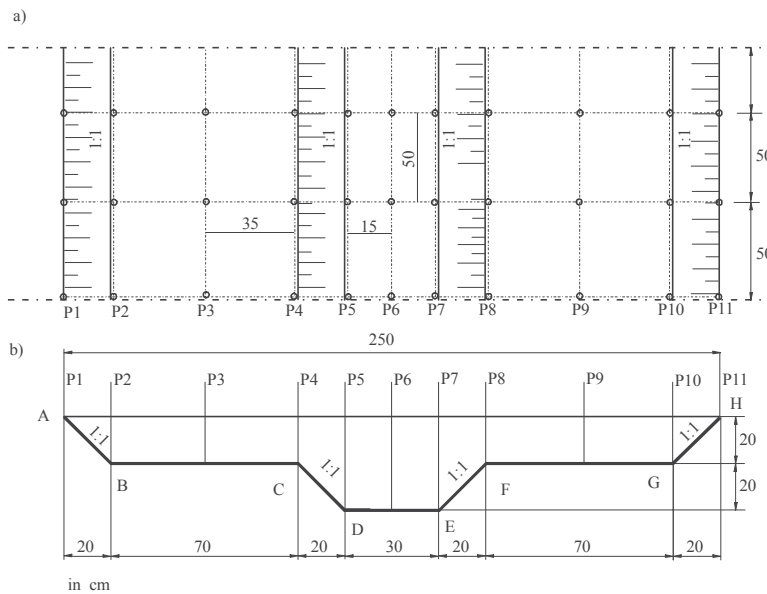
Wyniki niwelacji koryta

W celu statystycznej weryfikacji powierzchni dna i skarp laboratoryjnego kanału wykonano niwelację całego koryta. Pomiar wysokościowy koryta prowadzono w 11 punktach przekroju poprzecznego (rys. 2b). Kolejne przekroje poprzeczne, w których dokonywano po-



RYSUNEK 1. Widok wybudowanego kanału o dwudzielnym przekroju poprzecznym
 FIGURE 1. View built of compound channel

miarów wysokościowych, były oddalone od siebie o 0,50 m. W rozmieszczonych jak na rysunku 2a przekrojach zmierzono wysokość położenia 363 punktów (11 punktów w 33 przekrojach poprzecznych). Wyniki niwelacji powierzchni koryta przedstawiono w tabeli 1 dla wybranych przekrojów.



RYSUNEK 2. Schemat przekroju poprzecznego koryta i rozmieszczenia punktów pomiaru wysokości:
 ◦ punkty pomiaru wysokości, P1, ..., P11 – oznaczenie profili wyznaczonych przez punkty pomiaru wysokości w przekroju koryta
 FIGURE 2. Schema of cross-section channels and distributions of points of measurement of height:
 ◦ points of measurement of height, P1, ..., P11 – mark of appointed sections by points of measurement of height in section of channel

TABELA 1. Przykładowe wyniki niwelacji koryta
TABLE 1. Example – results levelling of channel

Odległość ^a Distance ^a [m]	Rzędne punktów przekroju [m] Points elevations of the cross-section										
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11
0	90,49	70,49	70,39	70,41	50,41	50,22	50,34	70,32	70,41	70,32	90,33
0,5	90,41	70,33	70,21	70,22	50,02	50,10	50,11	70,26	70,21	70,28	90,30
1,0	90,42	70,41	70,27	70,29	50,09	50,04	50,02	70,19	70,16	70,30	90,29
1,5	90,29	70,29	70,19	70,11	50,01	50,01	49,96	70,12	70,08	70,29	90,23
2,0	90,26	70,31	70,12	70,09	50,01	50,00	49,89	70,09	69,99	70,19	90,13
2,5	90,32	70,42	70,19	70,12	49,99	49,92	49,91	69,99	69,97	70,08	90,08
3,0	90,27	70,19	70,18	70,11	49,93	49,85	49,97	70,11	70,00	70,00	90,03
3,5	90,30	70,11	70,18	70,08	50,01	49,91	49,99	70,09	70,02	70,03	89,96
4,0	90,23	70,19	70,02	69,96	50,19	49,91	49,97	69,98	69,99	69,95	89,83
4,5	90,19	70,11	70,02	69,99	50,09	49,83	49,95	69,96	69,81	70,00	89,79
5,0	90,14	69,94	69,92	69,72	50,01	49,82	49,92	69,76	69,79	69,79	89,72
5,5	90,17	69,91	69,62	69,59	49,99	49,79	49,89	69,58	69,59	69,72	89,58

^aOd początku koryta. / From beginning of the channel.

Opracowanie statystyczne wyników pomiaru wysokości koryta

Opracowanie statystyczne wyników wysokościowych, uzyskanych w pomiarach niwelacji nowo wybudowanego koryta dwudzielnego, wykonano metodą opisaną w pracy Koziola i innych (1997).

Na podstawie pomiarów rzędnych wybranych punktów koryta głównego i terenów zalewowych (rys. 2) opisano dno i skarpy płaszczyznami o równaniu:

$$z = b_0 + b_1x + b_2y \quad (1)$$

gdzie x , y – współrzędne punktów pomiarowych.

Współczynniki regresji wielokrotnej \hat{b}_0 , \hat{b}_1 , \hat{b}_2 szacowano metodą najmniejs-

szych kwadratów z układu równań normalnych:

$$\begin{cases} \hat{b}_1 \cdot \text{var}(x) + \hat{b}_2 \cdot \text{cov}(x, y) = \text{cov}(x, z) \\ \hat{b}_1 \cdot \text{cov}(x, y) + \hat{b}_2 \cdot \text{var}(y) = \text{cov}(y, z) \\ \hat{b}_0 = \bar{z} - \hat{b}_1\bar{x} - \hat{b}_2\bar{y} \end{cases} \quad (2)$$

Rozwiązanie układu (2) przedstawiono w postaci macierzowej:

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{C} \quad (3)$$

gdzie:

\mathbf{B}_1 – macierz współczynników regresji

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{V} – macierz współczynników przy nie-wiadomych

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \text{var}(x) & \text{cov}(x, y) \\ \text{cov}(x, y) & \text{var}(y) \end{bmatrix}$$

\mathbf{V}^{-1} – macierz odwrotna

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{var}(y) & -\text{cov}(x, y) \\ -\text{cov}(x, y) & \text{var}(x) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{V}}$$

\mathbf{C} – macierz kowariancji

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{cov}(x, z) \\ \text{cov}(y, z) \end{bmatrix}$$

Wartości wariancji, kowariancji i wyznacznika $\det \mathbf{V}$ obliczono z zależności:

$$\text{var}(x) = \Sigma x_i^2 - \bar{x} \Sigma x_i \quad (4)$$

$$\text{cov}(x, y) = \Sigma x_i y_i - \bar{y} \Sigma x_i \quad (5)$$

$$\text{var}(y) = \Sigma y_i^2 - \bar{y} \Sigma y_i \quad (6)$$

$$\text{cov}(x, z) = \Sigma x_i z_i - \bar{z} \Sigma x_i \quad (7)$$

$$\text{cov}(y, z) = \Sigma y_i z_i - \bar{z} \Sigma y_i \quad (8)$$

$$\text{var}(z) = \Sigma z_i^2 - \bar{z} \Sigma z_i \quad (9)$$

$$\det \mathbf{V} = \text{var}(x) \text{var}(y) - \text{cov}(x, y)^2 \quad (10)$$

gdzie:

x_i, y_i, z_i – współrzędne punktów pomiarowych dla $i = 1, 2, \dots, 363$,

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ – ich wartości średnie.

Miarą dopasowania równania (1) regresji dwukrotnej do danych empirycznych jest ocena współczynnika determinacji, który wyrażony w procentach informuje, w jakim stopniu rzędne z zależą od x i y :

$$\hat{\mathbf{R}}^2 = \frac{\hat{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{C}}{\text{var}(z)} \quad (11)$$

Średnie odchylenie wysokości punktów pomiarowych od wyznaczonej płaszczyzny regresji podanej równaniem (1) scharakteryzowano pierwiastkiem z nieobciążonego estymatora wariancji odchyleń od regresji (Smolik 1994):

$$\hat{s}_{z-x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i^2)^2}{n - k - 1} = \frac{\text{var}(z) - \hat{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{C}}{n - k - 1} \quad (12)$$

$$\hat{s}_{z-x} = \sqrt{\hat{s}_{z-x}^2} \quad (13)$$

gdzie:

n – liczba punktów pomiarowych o współrzędnych (x_i, y_i, z_i) ,

k – liczba zmiennych opisujących, $k = 2$ (liczba współczynników regresji),

$\hat{\mathbf{B}}_1^T$ – macierz transponowana współczynników regresji, $\hat{\mathbf{B}}_1^T = [\hat{b}_1 \hat{b}_2]$.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń statystycznych dla powierzchni dna i skarp koryta zestawiono w tabeli 2. W tabeli przyjęto oznaczenia płaszczyzn koryta od ① do ⑦, jak na rysunku 3.

Wartości współczynników determinacji dla płaszczyzn, stanowiących dno koryta głównego ①, dno lewego terenu zalewowego ③ i dno prawego terenu zalewowego ⑥, wynoszą odpowiednio: 94,6, 95,3 i 92,9%. Średnie odchylenie pomierzonych wysokości punktów od obliczonych z równań płaszczyzn wynosi 0,1 cm, tzn. około 1 mm. Wyrównany spadek tych płaszczyzn w kierunku przepływu wynosi odpowiednio: 0,86‰ (płaszczyzna ①), 1,01‰ (płaszczyzna ③) i 0,92‰ (płaszczyzna ⑥). Współczynniki determinacji płaszczyzn ②, ④, ⑤, ⑦ mają wartości z przedziału od 92,9 do 99,9% i spadek podłużny między 0,86 a 1,08‰. Oznacza to, że mo-

TABELA 2. Wyniki obliczeń statystycznych dla powierzchni koryta
 TABLE 2. Results of statistical calculations for surface areas of the channel

Wielkość Quantity	Płaszczyzny / Surface areas						
	Dno koryta Bottom of channel	Skarpa lewa Left slope	Zalew lewy Left floodplain	Skarpa lewego zalewu / Slope left floodplain	Skarpa prawa Right slope	Zalew prawy Right floodplain	Skarpa prawego zalewu / Slope right floodplain
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
Σx_i	79 200	52 800	79 200	52 800	52 800	79 200	52 800
Σx_i^2	85 800 000	57 200 000	85 800 000	57 200 000	57 200 000	85 800 000	57 200 000
Σy_i	0	-1650	-6930	-7590	1650	6930	7590
Σy_i^2	15 075	47 850	565 950	879 450	47 850	565 950	879 450
Σz_i	4906,64	3 933,16	6889,5	21 275,6	3929,29	6881,98	5250,22
$\Sigma x_i y_i$	0	-1 320 000	-5 544 000	-6 072 000	1 320 000	5 544 000	6 072 000
$\Sigma x_i z_i$	3906 064,5	3 133 464	548 888,5	4 191 304	3 130 220	5 484 914,5	4 186 674
$\Sigma y_i z_i$	-30,9	-104 899	-482 360,6	-611 444,3	1 048 17,4	481 781	610 375,3
Σz_i^2	24 3200,5	240 942,6	479 463,8	425 762,3	240 511,9	478 421	424 261,8
\bar{x}	800	800	800	800	800	800	800
\bar{y}	0	-25	-70	-115	25	70	115
\bar{z}	49,56	59,59	69,59	79,69	59,53	69,51	79,55
var(x)	22 440 000	14 960 000	22 440 000	14 960 000	14 960 000	22 440 000	14 960 000
cov(x, y)	0	0	0	0	0	0	0
var(y)	15 075	6600	80 850	6600	6600	80 850	6600
cov(x, z)	-19 247,5	-13 064	-22 679,5	-16 136	-3212	-20 669,5	-13502
cov(y, z)	-30,9	-6570	-99,1	-6624,8	6585,1	42,35	6600
var(z)	17,53	6552,53	24,19	6667,78	6582,81	20,53	6613,16
det V	$3,38 \cdot 10^{11}$	$9,87 \cdot 10^{10}$	$1,81 \cdot 10^{12}$	$9,87 \cdot 10^{10}$	$9,87 \cdot 10^{10}$	$1,81 \cdot 10^{12}$	$9,87 \cdot 10^{10}$

cd. tabeli 2
Table 2 cont.

Wielkość Quantity	Płaszczyzny / Surface areas						
	Dno koryta Bottom of channel	Skarpa lewa Left slope	Zalew lewy Left floodplain	Skarpa lewego zalewu / Slope left floodplain	Skarpa prawa Right slope	Zalew prawy Right floodplain	Skarpa prawego zalewu / Slope right floodplain
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
\hat{b}_2	-0,00205	-0,995	-0,00122	-1,00376	0,99642	0,000524	1,00807
\hat{b}_0	50,25	35,41	70,31	34,88	35,30	70,22	34,73
$\hat{R}^2 \cdot 100\%$	94,56	99,98	95,27	99,99	99,98	92,86	99,98
$s_{z,x}$	0,099	0,12	0,11	0,10	0,12	0,12	0,12

del koryta wybudowany został zgodnie z założeniami.

Równania płaszczyzn koryta mają postać:

– dno koryta

$$z = -0,000858x - 0,00205y + 50,25 \quad (14)$$

– skarpa lewa

$$z = -0,000874x - 0,99545y + 35,406 \quad (15)$$

– zalew lewy

$$z = -0,00101x + 0,00122y + 70,313 \quad (16)$$

– skarpa zalewu lewego

$$z = -0,00108x - 1,00376y + 34,883 \quad (17)$$

– skarpa prawa

$$z = -0,000883x + 0,996y + 35,298 \quad (18)$$

– zalew prawy

$$z = -0,000921x - 0,000524y + 70,215 \quad (19)$$

– skarpa zalewu prawego

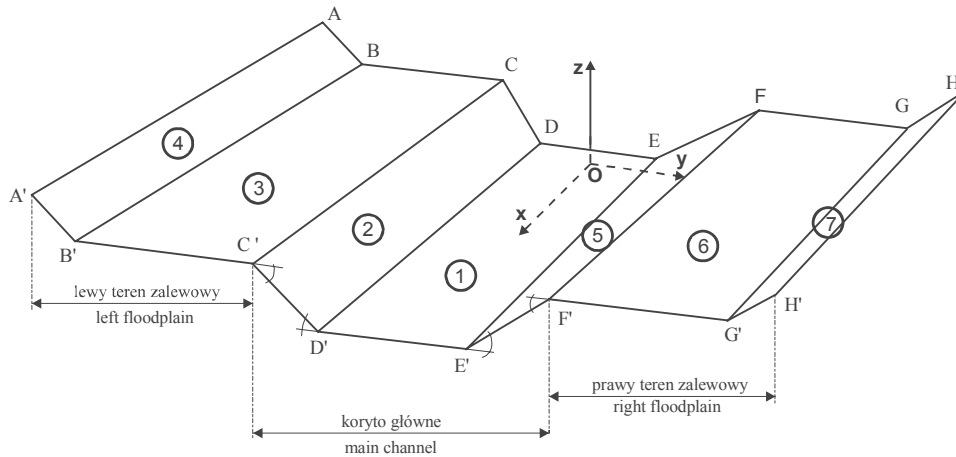
$$z = -0,000903x + 1,00807y + 34,73 \quad (20)$$

Na podstawie równań płaszczyzn koryta określono jego spadek podłużny (w kierunku osi OX), który jest równy odpowiednim współczynnikom kierunkowym \hat{b}_1 (tab. 2). Jak wynika z tabeli 2, wartość spadku dna koryta głównego ① na rysunku 3 wyraźnie różni się od wartości projektowanej.

Rozwiązując równania powierzchni zalewów i płaszczyzn skarp oraz płaszczyzny dna koryta, otrzymuje się tzw. równania prostych krawędzi koryta. Obliczone równania krawędzi przecięcia się płaszczyzn koryta mają postać:

– krawędź AA'

$$-0,000137x + 0,975342y + 34,907 = 0 \quad (21)$$



RYSUNEK 3. Przyjęte oznaczenie płaszczyzn i krawędzi modelu koryta
 FIGURE 3. Accepted signature of surfaces and of edge model of channel

– krawędź BB'
 $0,00000367x - 0,97622y - 87,8601 = 0$ (22)

– krawędź CC'
 $-0,000137x + 0,975342y + 34,907 = 0$ (23)

– krawędź DD'
 $-0,0000160x + 0,99340y + 14,842 = 0$ (24)

– krawędź EE'
 $0,0000260x - 0,99979y - 14,950 = 0$ (25)

– krawędź FF'
 $-0,0000380x - 0,99826y + 34,917 = 0$ (26)

– krawędź GG'
 $-0,0001143x - 1,00438y + 90,48686 = 0$ (27)

– krawędź HH'
 $-0,00005384x - 1,00343y + 105,3799 = 0$ (28)

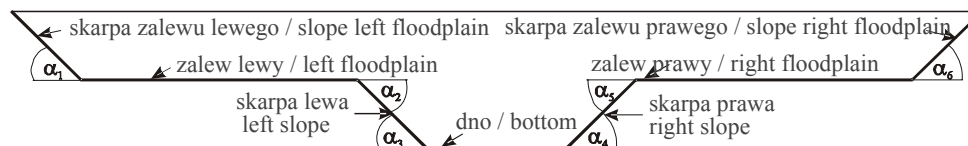
Na podstawie obliczonych równań płaszczyzn (tab. 2) wyznaczono kąty dwuściennie pokazane na rysunku 4.

Kąt dwuścienny (α_i) między dwiema płaszczyznami oblicza się ze wzoru:

$$\cos \alpha = \frac{\hat{b}_1 \hat{b}_2 + \hat{b}'_1 \hat{b}'_2 + 1}{\sqrt{\hat{b}_1^2 + \hat{b}_2^2 + 1} \sqrt{\hat{b}'_1^2 + \hat{b}'_2^2 + 1}} \quad (29)$$

gdzie: \hat{b}_0 , \hat{b}'_1 , \hat{b}'_2 i \hat{b}_0 , \hat{b}_1 , \hat{b}_2 są współczynnikami kierunkowymi odpowiednich płaszczyzn.

Obliczono cosinusy kątów nachylenia płaszczyzn koryta, a następnie wyznaczono wartości kątów:



RYSUNEK 4. Kąty między płaszczyznami
 FIGURE 4. Angles between surfaces

$$\cos\alpha_1 = 0,7076 \rightarrow \alpha_1 = \arccos(\alpha_1) = 44,96^\circ$$

$$\cos\alpha_2 = 0,7084 \rightarrow \alpha_2 = \arccos(\alpha_2) = 44,89^\circ$$

$$\cos\alpha_3 = 0,7058 \rightarrow \alpha_3 = \arccos(\alpha_3) = 45,10^\circ$$

$$\cos\alpha_4 = 0,7108 \rightarrow \alpha_4 = \arccos(\alpha_4) = 44,80^\circ$$

$$\cos\alpha_5 = 0,7099 \rightarrow \alpha_5 = \arccos(\alpha_5) = 44,87^\circ$$

$$\cos\alpha_6 = 0,7070 \rightarrow \alpha_6 = \arccos(\alpha_6) = 45,01^\circ$$

Wartości obliczonych kątów są bardzo zbliżone do wartości projektowanej, tzn. $\alpha = 45^\circ$.

Dokładność wykonania modelu koryta prowadzono, sprawdzając także wielkość powierzchni przekroju koryta, obliczonych na podstawie pomiarów i z równań krawędzi. Pole przekroju koryta (P) obliczano jako sumę powierzchni trójkątów P_1, P_2, P_3 i P_4 (rys. 5).

Pola powierzchni trójkątów obliczono na podstawie współrzędnych punktów A, B, C, D, E, F, G, H metodą wyznacznikową:

$$P = 1/2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (30)$$

$$P = P_1 + P_2 \quad (31)$$

gdzie: $(y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3)$ są współrzędnymi wierzchołków trójkąta. Współrzędne te obliczono z równań prostych

opisujących krawędzie koryta dla danych wartości x_p, y_i .

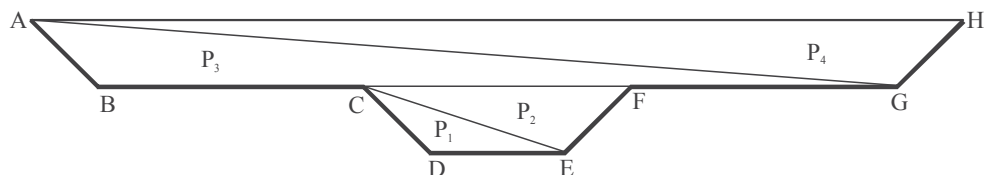
Zmiany powierzchni przekroju koryta głównego, koryta zalewowego oraz dla całkowitego przekroju koryta wraz z jego długością, obliczone na podstawie bezpośrednich pomiarów i z równań krawędzi (21)–(28), przedstawiono na rysunkach 6, 7 i 8. Jak wynika z obliczeń, różnice średniej wartości pola przekroju na długości do pola teoretycznego są odpowiednio równe:

- dla koryta głównego $\Delta P = 2,88 \text{ cm}^2$ (rys. 6),
- dla części zalewowej $\Delta P = 6,59 \text{ cm}^2$ (rys. 7),
- dla całkowitej powierzchni koryta $\Delta P = 9,52 \text{ cm}^2$ (rys. 8).

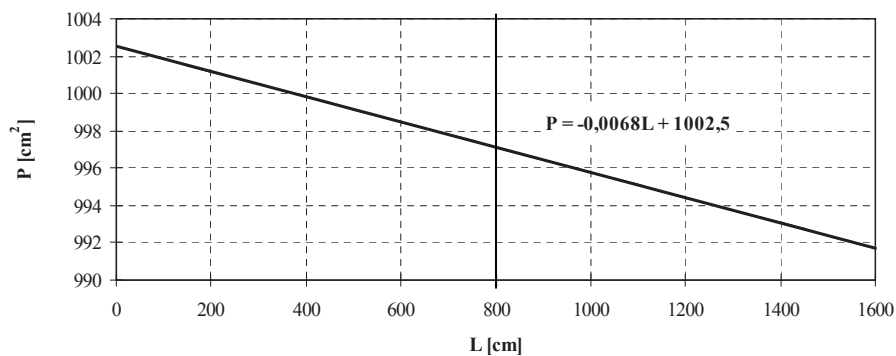
Podsumowanie

Przedstawiono wyniki statystycznych obliczeń założeń technicznych modelu koryta, przeprowadzonych w celu oceny zgodności jego wykonania z projektem. Jest to bardzo istotne, ponieważ daje to pewność, że prowadzone badania hydrauliczne będą mogły być realizowane w warunkach ruchu ustalonego jednostajnego.

Otrzymane różnice wartości pól powierzchni przekroju koryta głównego, zalewowego oraz dla całkowitego prze-

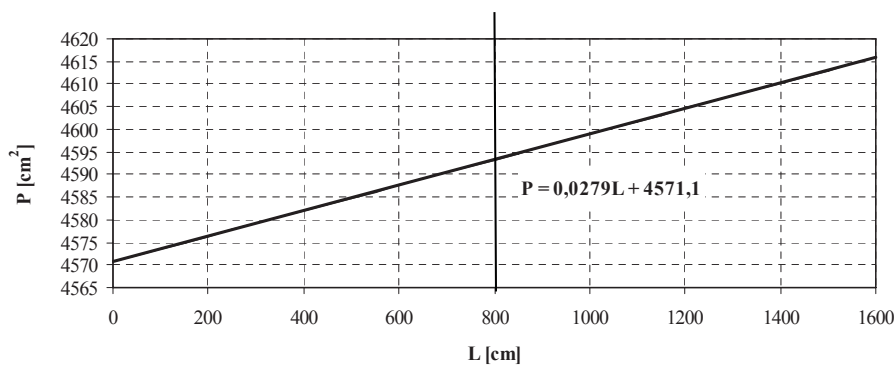


RYSUNEK 5. Stosowany schemat podziału przekroju koryta na trójkąty
FIGURE 5. Practical schema partition of channel section on triangles



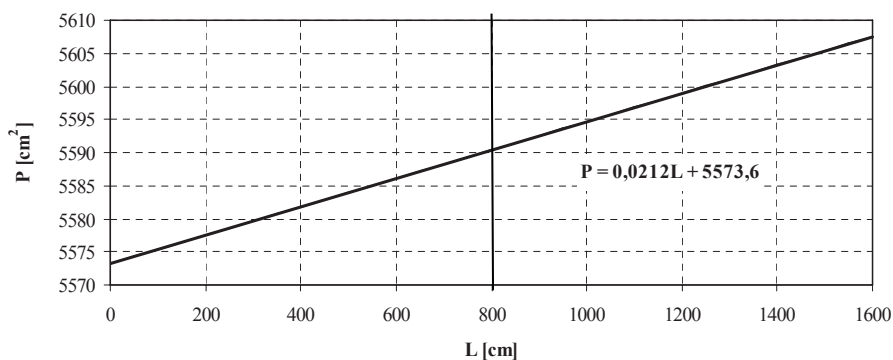
RYSUNEK 6. Zmienność powierzchni przekroju koryta głównego, obliczonych na podstawie równań krawędzi koryta

FIGURE 6. Variability of surface in cross-section of main channel calculated on the basis equalizations edge of the channel



RYSUNEK 7. Zmienność powierzchni przekroju koryta zalewowego, obliczonych na podstawie równań krawędzi koryta

FIGURE 7. Variability of surface in cross-section of floodplain calculated on the basis equalizations edge of the channel



RYSUNEK 8. Zmienność powierzchni przekroju całego koryta, obliczonych na podstawie równań krawędzi koryta

FIGURE 8. Variability of surface in all cross-section of the channel calculated on the basis equalizations edge of the channel

kroju koryta, obliczone na podstawie bezpośrednich pomiarów i z równań powierzchni dna i skarp, potwierdzają dużą dokładność wykonania koryta dwudzielnego. Natomiast uzyskane wyniki obliczeń można wykorzystać w analizach dokładności prowadzonych pomiarów.

Literatura

- KOZIOŁ A., KUŚMIERCZUK K., SMOLIK S. 1997: Statystyczna weryfikacja założeń technicznych modelu koryta używanego w badaniach hydraulicznych. III Konferencja Naukowa „Współczesne problemy inżynierii wodnej”, Wisła, 23–25 kwietnia: 317–326.
- SMOLIK S. 1994: Zadania z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla akademii rolniczych. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.

Summary

Statistical method for verification of technical principles of compound channel model construction for hydraulic research.

Statistical method for verification of technical principles of channel model construction for hydraulic research was introduced. Method and statistical equations applied for model construction accuracy analysis were discussed. Problems of model construction accuracy influence on measurement of flow capacity in two-stage compound open channel was described.

Author's address:

Marcin Krukowski
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska
Zakład Hydrauliki
ul. Nowoursynowska 159, 02-787 Warszawa
Poland
e-mail: marcin_krukowski@sggw.pl