

## NAPRĘŻENIA GRANICZNE W KORYCIE OTWARTYM Z PŁĄSKIM DNEM PIASZCZYSTYM

Zbigniew Popek, Katarzyna Marisch

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono metodykę określania naprężeń granicznych oraz zasadnicze wyniki badań eksperymentalnych początku ruchu ziaren materiału piaszczystego. W badaniach użyto 6 rodzajów piasku aluwialnego o różnej jednorodności i równomierności uziarnienia oraz przeciętnej średnicy ziaren  $d_{50} = 0,201,7$  mm. Pomiary wykonano w warunkach ruchu jednostajnego ustalonego w korycie laboratoryjnym o przekroju prostokątnym z piaszczystym dnem, przy zmiennym napelnieniu i spadku dna. Badania potwierdziły wpływ nierównomierności uziarnienia piaszczystego materiału korytowego na wielkość bezwymiarowych naprężeń granicznych. Na podstawie wyników pomiarów, wykonanych w zakresie  $Re_* = 3-55$ , określono zależności do wyznaczania chropowatości powierzchni płaskiego dna w warunkach początku ruchu ziaren, z uwzględnieniem jednorodności i równomierności uziarnienia.

**Słowa kluczowe:** początek ruchu rumowiska wlezonego, naprężenia graniczne, chropowatość dna piaszczystego

### WSTĘP

Jednym z podstawowych zagadnień w badaniach procesów fluwialnych w korytach rzecznych jest określenie warunków, w których rozpoczyna się ruch ziaren materiału korytowego. Wielkościami determinującymi przebieg tego zjawiska są [Yung, 1996]:

$\tau_o$  – naprężenie styczne [Pa],

$(\rho_r - \rho)$  – różnica między gęstością właściwą materiału, z jakiego powstały ziarna, a gęstością wody [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ],

$d$  – średnica ziarna [m],

$\nu$  – współczynnik lepkości kinematycznej cieczy [ $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ],

$g$  – przyspieszenie ziemskie [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ].

Jeżeli rozpatrujemy określoną wielkość ziarna w wodzie o stałej temperaturze, to przejście ziarna ze stanu spoczynku w ruch będzie uzależnione jedynie od wartości naprężenia stycznego ( $\tau_o$ ). Ruch ziarna nastąpi wtedy, gdy naprężenie styczne ( $\tau_o$ ) bę-

---

dzie większe od naprężenia granicznego ( $\tau_{kr}$ ), charakterystycznego dla danego materiału aluwialnego. Można więc przyjąć, że dokładnie w chwili rozpoczęcia się ruchu ziarna jest spełniony warunek:

$$\tau_{gr} = \tau_o \quad (1)$$

Wartość naprężenia granicznego zależy od siły tarcia wewnętrznego ziarna względem ziaren sąsiednich, tworzących pewną strukturę przestrzenną na dnie koryta, nawet wtedy, gdy uznajemy, że powierzchnia dna jest płaska. Naprężenie graniczne jest wielkością fizyczną, jednak bezpośredni pomiar tej wielkości jest praktycznie niemożliwy, zwłaszcza w korytach z dnem rozmywalnym. Dlatego też naprężenia graniczne wyznacza się z równania (1), na podstawie określanych doświadczalnie wartości  $\tau_o$ , zależnych od parametrów przepływu, przy których rozpoczyna się ruch ziaren.

Z wymienionych wcześniej pięciu parametrów determinujących ruch ziaren rumowiska można utworzyć dwa wyrażenia bezwymiarowe, które z uwzględnieniem zależności (1) dla warunków początku ruchu rumowiska mają następującą postać:

$$Re_* = \frac{d}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_{gr}}{\rho}} = \frac{dv_*}{\nu} \quad (2)$$

$$\theta_{gr} = \frac{\tau_{gr}}{dg(\rho_r - \rho)} = \frac{\tau_{gr}}{d\rho g \left( \frac{\rho_r}{\rho} - 1 \right)} = \frac{\tau_{gr}}{d\rho g(s-1)} = \frac{v_*^2}{dg(s-1)} \quad (3)$$

gdzie:  $Re_*$  – liczba Reynoldsa dla ziaren o średnicy  $d$ ,

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_{gr}}{\rho}} \text{ – prędkość dynamiczna,}$$

$\theta_{gr}$  – bezwymiarowe naprężenie graniczne, nazywane parametrem (liczbą) ruchliwości Shieldsa,

$$s = \frac{\rho_r}{\rho} \text{ – względna gęstość właściwa rumowiska.}$$

W 1936 roku Shields jako pierwszy określił eksperymentalnie zależność:

$$\theta_{gr} = f(Re_*) \quad (4)$$

przedstawioną w postaci wykresu, na którym punkty z pomiarów nie tworzyły wyraźnej linii określającej stan graniczny, lecz układały się z pewnym rozrzutem, tworząc rodzaj „wstęgi” wartości granicznych. Shields w swoich badaniach użył ziaren o kształtach kulistych i średnicach: 1,06, 1,71, 2,44 i 2,46 mm, wykonanych z bursztynu, lignitu (odmiana węgla brunatnego), granitu i barytu o gęstości względnej ( $s$ ) wynoszącej odpowiednio: 1,06, 1,27, 2,7 i 4,25  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$  [Yalin 1977].



Wyniki badań Shieldsa, uzyskane głównie dla sztucznego rumowiska dennego, są od prawie 70 lat przedmiotem stałego zainteresowania i dyskusji wielu badaczy. Autorzy badań raczej potwierdzali ogólny przebieg krzywej Shieldsa, jednakże uzyskiwane przez nich wartości  $\theta_{gr}$  osiągały nieraz duży rozrzut względem tej krzywej. Zasadnicza trudność w porównywaniu wyników badań wynika zarówno z pośredniego sposobu określania naprężeń krytycznych, jak i braku jednoznacznej definicji początku ruchu ziaren. Najczęściej naprężenie krytyczne było określane według następujących kryteriów (definicji) [van Rijn, 1993]:

- zerowego natężenia wleczenia rumowiska lub materiału dennego – określanego na podstawie ekstrapolacji wyników pomiarów przy minimalnym natężeniu wleczenia (takie kryterium przyjął Shields),
- liczby ziaren przemieszczanych na jednostkowej powierzchni dna w jednostce czasu,
- jakościowej oceny początku ruchu na podstawie obserwacji wzrokowej dna.

Analizy wyników badań wykonane przez Grafa [1971], Yalina [1977], Dąbkowskiego [1990] i Ditricha [1998] w odniesieniu do innych wyników badań ujawniły również inne wątpliwości co do przebiegu wykresu Shieldsa. Oprócz wymienionych wyżej przyczyn niezgodności wyników niektórych badań, autorzy ci za istotny uznali wpływ niejednorodności (wielofakcyjności) uziarnienia naturalnego materiału korytowego oraz kształt ziaren, często odbiegający od kulistego. Wpływ wymienionych czynników potwierdziły między innymi wyniki badań Bartnika [1992], prowadzone na rzekach podkarpaccich, posiadających gruboziarnisty i wielofrakcyjny materiał korytowy. Badania własne, których wyniki są prezentowane w niniejszej pracy, miały na celu wyjaśnienie wpływu niejednorodności materiału piaszczystego na wartości naprężeń granicznych.

## METODYKA OKREŚLANIA NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH

W warunkach przepływu jednostajnego ustalonego w korycie pryzmatycznym o swobodnej powierzchni wody występuje równowaga sił działających na powierzchnię obwodu zwilżonego. Składowa siły ciężkości (tzw. siła poruszająca), skierowana zgodnie z kierunkiem przepływu, jest równoważona przez siłę tarcia zewnętrznego, która działa stycznie do powierzchni zwilżonej, przeciwnie do kierunku przepływu. Wielkość siły stycznej działającej na jednostkę powierzchni zwilżonej jest naprężeniem stycznym  $\tau_o$  [Kubrak i Nachlik, 2003], które można wyrazić następującą zależnością:

$$\tau_o = \rho g R J \quad (5)$$

gdzie:  $\tau_o$  – średnie naprężenie styczne na obwodzie zwilżonym koryta [Pa],

$R$  – promień hydrauliczny [m],

$J$  – spadek hydrauliczny [-].

Między naprężeniem stycznym a prędkością przepływu istnieje ścisły związek wynikający z faktu, że na obie wielkości wpływają bezpośrednio opory ruchu, wywołane chropowatością powierzchni koryta. Równanie (5) wyraża średnią wartość naprężeń, stąd można je odnieść do średniej prędkości przepływu. Z ogólnej zależności wyrażającej prędkość dynamiczną:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} \quad (6)$$

wynika, że:

$$\tau_o = \rho v_*^2 \quad (7)$$

Porównując prawe strony równań (5) i (7), po przekształceniach otrzymuje się:

$$v_* = \sqrt{gRJ} \quad (8)$$

Jeżeli średnią prędkość  $V$  w przekroju poprzecznym koryta wyrazi się zależnością Darcyego-Weisbacha:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{8gRJ} \quad (9)$$

to równanie (8) można zapisać następująco:

$$v_* = V \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad (10)$$

gdzie  $\lambda$  jest bezwymiarowym współczynnikiem oporów przepływu. Wartość współczynnika  $\lambda$  można określić ze wzoru Colebrooka-White'a [Kubrak i Nachlik 2003], który dla koryt otwartych o zwartym przekroju poprzecznym i w przepływach o liczbie Reynoldsa  $Re > 25\,000$  ( $Re = 4RV/v$ ), ma następującą postać:

$$\lambda = \left[ -2,0 \log \left( \frac{k_s}{14,84R} \right) \right]^{-2} \quad (11)$$

gdzie  $k_s$  jest bezwzględną chropowatością powierzchni zwilżonej.

W zwartych korytach o zróżnicowanej szorstkości obwodu zwilżonego wartość współczynnika oporu  $\lambda$  dla całego przekroju jest równa:

$$\lambda = \frac{\sum \lambda_i O_i}{O} \quad (12)$$

gdzie:  $\lambda_i$  – współczynnik oporu na wyodrębnionej powierzchni, jednorodnej pod względem chropowatości charakteryzowanej przez  $k_{s,i}$ ,

$O_i$  – długość obwodu cząstkowego,

$O$  – całkowita długość obwodu zwilżonego.

Każdemu z wyodrębnionych obwodów cząstkowych ( $O_i$ ) odpowiada ściśle określona część pola przekroju poprzecznego ( $A_i$ ), w której wartość średniej prędkości przepływu ( $V_i$ ) zależy od oporów ruchu powstających na tej powierzchni. Według Einstaina-Hortona [Mertens, 1999; Kubrak i Nachlik 2003], średnie prędkości ( $V_i$ ) w poszczególnych częściach przekroju poprzecznego są równe średniej prędkości ( $V$ ) w całym prze-



kroju koryta o powierzchni  $A$ . Oznacza to, że między wydzielonymi polami cząstkowymi przekroju nie ma wymiany pędu, a na liniach rozgraniczających te pola naprężenie styczne jest równe zeru. Najczęściej przekroje poprzeczne dzieli się na trzy części: część odnoszącą się do dna i dwie części odnoszące się do ścianek (skarp) koryta. Linie podziału prowadzi się ortogonalnie do izolinii prędkości w przekroju, rozpoczynając w punktach styku ścianek (skarp) z dnem koryta. W przypadku podziału przekroju prostokątnego, którego obie ścianki mają jednakową chropowatość, spełnione są następujące zależności:

- prędkości średnie w poszczególnych częściach przekroju:

$$V = V_s = V_d \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{8gRJ} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} \sqrt{8gR_s J} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_d}} \sqrt{8gR_d J} \quad (14)$$

- powierzchnia przekroju poprzecznego:

$$A = 2A_s + A_d \quad (15)$$

- promienie hydrauliczne:

$$R = \frac{A}{O}, \quad R_s = \frac{A_s}{h}, \quad R_d = \frac{A_d}{B} \quad (16)$$

gdzie: indeksy  $s$ ,  $d$  – parametry odnoszące się odpowiednio do ścianek i dna koryta,  
 $h$  – głębokość wody (napelnienie koryta w przekroju prostokątnym),  
 $B$  – szerokość dna koryta.

## METODYKA POMIARÓW

### Charakterystyka gruntów

Badania naprężeń granicznych wykonano dla 6 różnych aluwialnych gruntów piaszczystych, sklasyfikowanych jako: piasek drobny – materiał A, piasek średni – materiał B, C i D, piasek gruby – materiał E i F. Próbkę gruntu poddano analizie sitowej, a następnie wyznaczono wielkości średnic zastępczych ( $d_{p\%}$ ), stanowiących wraz z ziarnami mniejszymi określony procent wagi całej próbki. Następnie określono średnicę miarodajną:

$$d_m = \frac{\sum d_i p_i}{100} \quad (17)$$

gdzie:  $d_i$  – średnia arytmetyczna wielkość ziaren danej frakcji,  
 $p_i$  – procentowa zawartość wagowa tej frakcji w próbce.

Charakterystykę niejednorodności uziarnienia gruntów wykonano, posługując się następującymi wskaźnikami:

Odchylenie krzywej przesiewu:

$$\sigma = \frac{d_{84}}{d_{50}} \quad (19)$$

Według Gesslera [Shen, 1971], materiał gruntowy jest niejednorodny, gdy  $\sigma > 2$ .

Geometryczne odchylenie standardowe krzywej przesiewu:

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{d_{84}}{d_{16}}} \quad (20)$$

Według Little i Mayera [1976], materiał gruntowy jest niejednorodny, gdy  $\sigma_g > 1,3$ .

Stopień wysortowania według Hazena [Dąbkowski i in., 1982]:

$$u = \frac{d_{60}}{d_{10}} \quad (21)$$

Materiał gruntowy dobrze wysortowany, gdy  $u < 5$ .

Wskaźnik różnoziarnistości według Knoroza [Dąbkowski i in., 1982]:

$$\varepsilon = \frac{d_{95}}{d_5} \quad (22)$$

Materiał gruntowy różnoziarnisty, gdy  $\varepsilon > 4-5$ .

Wskaźnik różnoziarnistości według Schöberla [Dittrich, 1998]:

$$\sigma_s = \frac{d_{90}}{d_{50}} \quad (23)$$

Materiał gruntowy jest różnoziarnisty, gdy  $\sigma_s > 1,55$ .

Wskaźnik jednorodności (cecha dominacji) według Kollisa [Skibiński, 1976]:

$$C_d = \frac{d_{90}d_{10}}{d_{50}^2} \quad (24)$$

Materiał gruntowy jest jednorodny, gdy  $C_d \approx 1,0$ .

Wartości wybranych średnic charakterystycznych oraz wymienionych wyżej wskaźników dla badanych gruntów podano w tabeli 1.

Tabela 1. Charakterystyka uziarnienia gruntów aluwialnych wykorzystanych w badaniach  
 Table 1. Granulation characteristics of alluvial materials used in experiments

Parametr Parameter	Grunt aluwialny Alluvial material					
	A	B	C	D	E	F
$d_{50}$ [mm]	0,20	0,26	0,38	0,41	1,20	1,70
$d_m$ [mm]	0,21	0,27	0,45	0,44	1,24	1,77
$d_{16}$ [mm]	0,13	0,20	0,26	0,27	1,03	1,43
$d_{84}$ [mm]	0,28	0,33	0,61	0,60	1,41	2,02
$d_{90}$ [mm]	0,30	0,36	0,70	0,61	1,45	2,10
$\sigma$ (19)	1,40	1,27	1,61	1,46	1,18	1,19
$\sigma_g$ (20)	1,44	1,26	1,53	1,48	1,17	1,18
$u$ (21)	1,83	1,53	1,86	2,00	1,23	1,33
$\varepsilon$ (22)	2,91	2,38	4,35	3,33	1,5	1,77
$\sigma_s$ (23)	1,48	1,38	1,84	1,49	1,21	1,24
$C_u$ (24)	0,89	0,96	1,07	0,84	1,02	0,98

### Pomiary hydrauliczne

Badania hydrauliczne wykonano w korycie uchylnym z prostokątnym przekrojem poprzecznym, o szerokości dna  $B = 0,203$  m i wysokości ścian bocznych 0,4 m. Materiał gruntowy był układany warstwą o miąższości 10 cm między dwoma poprzecznymi przegrodami na dnie, ograniczającymi odcinek pomiarowym długości 4,5 m. Warunki graniczne początku ruchu ziaren dla każdego materiału dennego były określone na podstawie kilku, kilkunastu pomiarów wykonanych w 6 seriach pomiarowych, oznaczonych odpowiednio do rodzaju badanego gruntu literami od A do F. Przed każdym pomiarem dno koryta było wyrównywane do uzyskania płaskiej powierzchni. W trakcie pomiarów mierzono następujące parametry:

- natężenie przepływu ( $Q$ ) – za pomocą elektronicznego miernika przepływu MPP-02 o dokładności pomiaru  $0,01 \text{ l}\cdot\text{s}^{-1}$ ,
- wysokość podniesienia koryta na ruchomej podporze dla uzyskania spadku dna – za pomocą wskaźnika elektronicznego o dokładności odczytu 0,1 mm,
- napełnienia koryta  $h_1$  i  $h_2$ , odpowiednio w przekroju na końcu i początku odcinka pomiarowego (zgodnie z kierunkiem przepływu) – za pomocą wodowskazów szpilkowych z noniuszem o dokładności odczytu 0,1 mm,
- temperaturę wody – z dokładnością do  $0,1^\circ\text{C}$ .

Doświadczenia rozpoczynano od napełnienia koryta przy poziomo ustawionym dnie i powolnym zwiększaniu natężeniu przepływu do przyjętej wartości w danej próbie. Po ustaleniu się przepływu stopniowo zwiększano spadek dna i jednocześnie, za pomocą zastawek umieszczonych na końcu koryta, regulowano napełnienie tak, aby uzyskać jednakowe napełnienia  $h_1$  i  $h_2$  w przekrojach pomiarowych, tj. warunki ruchu ustalonego jednostajnego. Jednocześnie obserwowano dno koryta, aby uchwycić moment, w którym pojedyncze ziarna zaczną się poruszać. Parametry przepływu w warunkach początku ruchu ziaren przyjęto jako warunki graniczne, miarodajne do wyznaczenia



naprężeń granicznych. W celu wyeliminowania ewentualnych błędów, spowodowanych nierównoległością dna i linii zwierciadła wody, zastosowano metodę iteracyjną do określenia wartości współczynnika szorstkości ( $n$ ), aby przy danym natężeniu przepływu ( $Q$ ) oraz spadku dna ( $i$ ) uzyskać zmierzone napelnienia  $h_1$  i  $h_2$ . Obliczenia wykonano według wzoru różnicowego, przyjmując  $\alpha = 1,0$  i krok obliczeniowy na długości od przekroju „2” do „1” równy  $\Delta x = 0,5$  m:

$$\frac{\alpha V_1^2}{2g} + h_1 + i\Delta x = \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_2 + \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\Delta x \quad (25)$$

gdzie:  $V_1, V_2$  – średnia prędkość, odpowiednio w przekroju 1 i 2,

$J_1, J_2$  – spadki lokalne, odpowiednio w przekroju 1 i 2, obliczane ze wzoru:

$$J_{1,2} = \frac{n^2 V_{1,2}^2}{R_{1,2}^{4/3}} \quad (26)$$

Za miarodajne wyniki pomiaru przyjmowano wartości określone w przekroju leżącym w środku odcinka pomiarowego, tj. napelnienie ( $h$ ) i lokalny spadek linii energii ( $J$ ). Zastosowana procedura umożliwiła ponadto dokonanie weryfikacji wyników pomiarów i odrzucenia części z nich jako błędnych. Za kryterium poprawności pomiaru przyjęto otrzymaną wartość współczynnika szorstkości ( $n$ ), która powinna zawierać się w przedziale  $n_{\min} < n < n_{\max}$ . Minimalną i maksymalną wartość  $n$  obliczano dla poszczególnych pomiarów, przyjmując następujące założenia:

- minimalne opory przepływu w korycie ze ściankami gładkimi i dnem piaszczystym nie powinny być mniejsze niż w korycie gładkim na całym obwodzie zwilżonym,
- maksymalne opory całkowite w korycie ze ściankami gładkimi i dnem piaszczystym nie powinny być większe niż w korycie o chropowatości całego obwodu zwilżonego równej chropowatości dna piaszczystego.

Na podstawie badań wstępnych wykonywanych w korycie pomiarowym bez materiału gruntowego stwierdzono, że bezwzględna jego chropowatość wynosi  $k_s = 4,3 \cdot 10^{-4}$  m i tę wartość przyjęto za miarodajną dla ścianek koryta. Natomiast dla dna piaszczystego przyjęto  $k_{sd} = 3d_{90}$ , jako maksymalną z podawanych w literaturze [van Rijn, 1993; Kubrak i Nachlik, 2003]. Odpowiednie wartości  $n_{\min}$  i  $n_{\max}$  obliczano dla każdego pomiaru według następującej zależności:

$$n = R^{1/6} \sqrt{\frac{\lambda}{8g}} \quad (27)$$

w której za  $\lambda$  podstawiano wartości  $\lambda_{\min}$  lub  $\lambda_{\max}$ , wyznaczone z równania (11) dla podanych wyżej odpowiednich wielkości  $k_s$ .

Na podstawie mierzonej w trakcie pomiarów temperatury wody obliczano wartość współczynnika lepkości kinematycznej ( $\nu$ ) oraz gęstość wody ( $\rho$ ), stosując odpowiednie wzory empiryczne [Stefański i Wyszkowski, 1979].

Pomiary były wykonywane przy różnych natężeniach przepływu, napelnieniach koryta i spadkach hydraulicznych. W tabeli 2 przedstawiono charakterystykę pomiarów



wykonanych w poszczególnych seriach, podając zakresy wartości zmierzonych bezpośrednio natężeń przepływu ( $Q$ ) i temperatury wody ( $T$ ), a także obliczonych wartości podstawowych parametrów hydraulicznych: liczby  $Re$ , głębokości wody ( $h$ ), średnich prędkości przepływu –  $V = Q / (h \cdot B)$  i lokalnych spadków linii energii ( $J$ ).

Tabela 2. Liczba i zakres pomiarów wykonanych w korycie hydraulicznym  
Table 2. The number and range of measurements carried out in hydraulic flume

Seria Serie	Liczba pomiarów Number of runs	Zakres pomiarów Range of measurements					
		$Q \times 10^{-3}$ [m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	$h \times 10^{-2}$ [m]	$J$ [%e]	$T$ [°C]	$V$ [m·s <sup>-1</sup> ]	$Re \times 10^4$ [-]
A	9	2,07 – 6,59	3,50 – 10,3	0,57 – 1,33	17,7 – 19,6	0,285 – 0,347	2,98 – 6,06
B	5	1,53 – 6,51	2,78 – 10,5	0,64 – 1,26	18,4 – 19,2	0,256 – 0,305	2,82 – 6,00
C	10	2,07 – 7,54	3,50 – 11,5	0,75 – 2,02	13,7 – 14,8	0,291 – 0,350	2,62 – 5,85
D	7	2,60 – 6,55	4,23 – 10,2	0,67 – 1,61	11,6 – 11,7	0,303 – 0,332	2,89 – 5,27
E	10	2,09 – 7,52	3,34 – 11,8	0,78 – 2,30	13,9 – 14,3	0,308 – 0,359	2,64 – 6,32
F	12	2,62 – 7,04	2,89 – 7,01	2,07 – 5,31	12,6 – 13,4	0,425 – 0,503	3,28 – 6,82

Na podstawie wyznaczonych doświadczalnie wartości parametrów, charakteryzujących warunki początku ruchu ziaren badanego materiału dennego, dla każdego pomiaru obliczano wartość krytycznej prędkości dynamicznej i naprężenie krytyczne według następującej procedury:

1. Na podstawie pomierzonych wartości  $V$ ,  $R$  i  $J$  z przekształconego równania (9) określano  $\lambda$ .
2. Dla przyjętej wartości  $k_{ss}$  dla ścianek koryta, stosując metodę iteracyjną, dobierano wartości  $R_s$  w równaniu (11) tak, aby uzyskana wartość  $\lambda_s$ , po jej wstawieniu do wzoru (9), dała wartość  $V_s$  spełniającą warunek (13).
3. Z przekształcenia odpowiedniej zależności (16), dla znanych  $R_s$  i  $h$  obliczano powierzchnię cząstkową  $A_s$ .
4. Z przekształconego równania (15) obliczano powierzchnię cząstkową  $A_d$ , a następnie  $R_d$  z odpowiedniej zależności (16).
5. Na podstawie znanych wartości  $\lambda$  i  $\lambda_s$  z przekształconych wzorów (12) i (11) obliczano kolejno wartości  $\lambda_d$  i  $k_{sd}$  dla dna.
6. Na podstawie znanego  $R_d$ , stosując równanie (8), obliczano prędkość dynamiczną  $v_*$  dla dna koryta, a następnie z równania (7) naprężenie graniczne  $\tau_{gr}$ .

## WYNIKI BADAŃ I DYSKUSJA

Uzyskane z pomiarów wartości  $\theta_{gr}$  pokazano na wykresie Shieldsa (rys. 1a) w zależności od wartości  $Re_*$  obliczonych dla  $d = d_{50}$ . Punkty w poszczególnych seriach pomiarów ułożyły się wzdłuż linii wzajemnie do siebie równoległych i nachylonych

w stosunku około 2 : 1. Wartości  $\theta_{gr}$  na wykresie nie pokrywają się z krzywą Shieldsa, przy czym najbliższej niej zgrupowane są punkty z pomiarów w serii E i F. Dla pozostałych badanych gruntów wartości  $\theta_{gr}$  leżą powyżej krzywej Shieldsa.

Na większe wartości  $\theta_{gr}$  uzyskane z pomiarów niż z krzywej Shieldsa może mieć wpływ metoda określania stanu granicznego, oparta na wzrokowej obserwacji ziaren na powierzchni dna. W przypadku piasków drobniejszych uchwycenie momentu, w którym ziarna zaczynają poruszać się, jest dużo trudniejsze niż w przypadku grubszych ziaren.

Rozkład punktów z poszczególnych serii badań wzdłuż linii ukośnych (rys. 1a) jest pewną prawidłowością, na którą zwrócił uwagę Yalin [1977]. Zdaniem autora, w ten sposób objawia się wpływ lepkości dynamicznej cieczy, powodującej powstawanie dodatkowych naprężeń stycznych w laminarnej warstwie przyściennej. Aby wyeliminować ten efekt, Yalin dokonał modyfikacji wykresu Shieldsa, zastępując liczbę Reynoldsa ( $Re_*$ ) wyrażeniem:

$$D_* = d_{50} \left[ \frac{(s-1)g}{v^2} \right]^{1/3} \quad (28)$$

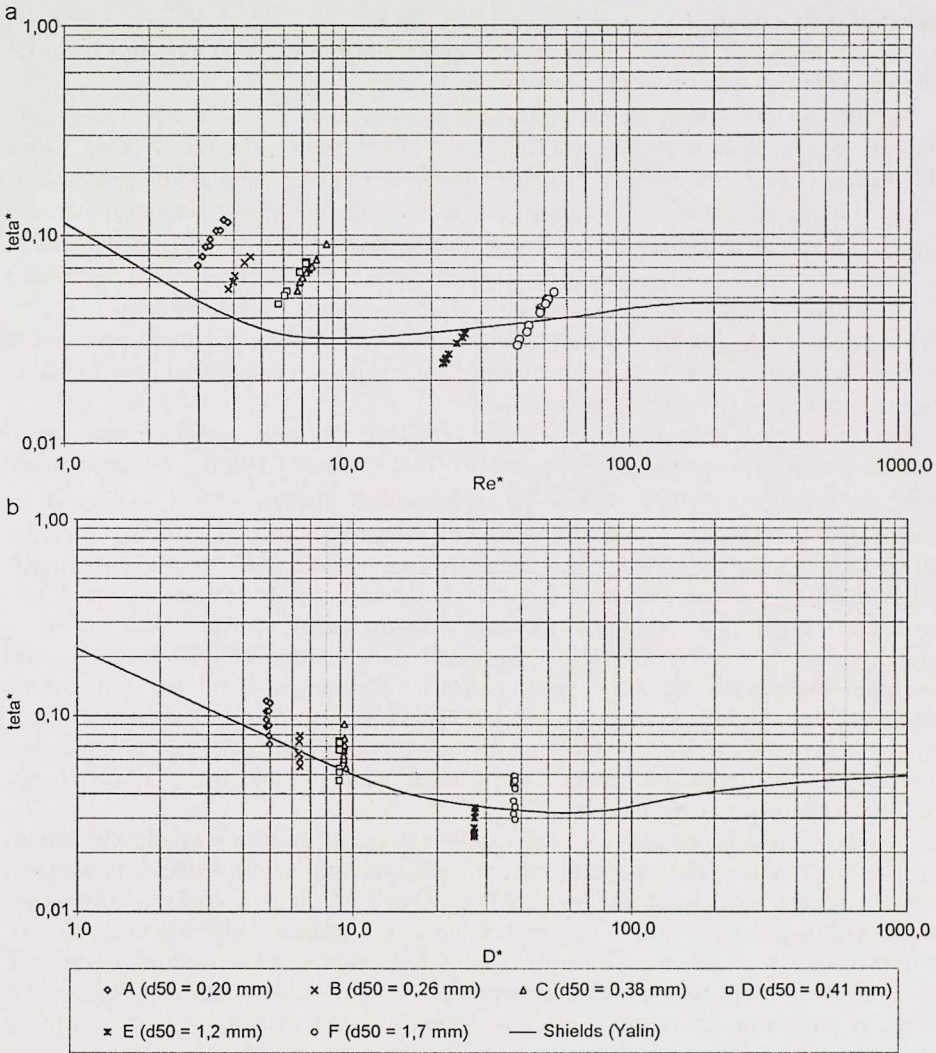
nazywanym obecnie bezwymiarowym parametrem ziarna. Modyfikacja wykresu Shieldsa (rys. 1b) miała również istotne znaczenie praktyczne. W oryginalnym układzie współrzędnych  $XY$  na wykresie Shieldsa, zmienne na obu osiach są zależne od  $v_*$ . Stąd korzystanie z wykresu wymaga stosowania procedury iteracyjnej.

Zmodyfikowany wykres Shieldsa wraz z wartościami  $\theta_{gr}$  z badań własnych pokazano na rysunku 1b. W tym wypadku punkty ułożyły się wzdłuż linii pionowych, wyraźnie bliżej krzywej Shieldsa. Uzyskane średnie wartości  $\theta_{gr}$  dla piasków A, C i D są większe o 20–22% od wartości odczytanych z krzywej Shieldsa, dla piasku B o 2%, a dla F o 30%. Natomiast dla piasku E wartość średnia  $\theta_{gr}$  jest mniejsza o 16% od odczytanej z krzywej Shieldsa. Podobne jakościowo wyniki uzyskał Kasperek [1998], który określał w badaniach hydraulicznych początek ruchu rumowiska piaszczysto-żwirowego. Autor podaje, że dla materiałów o średnicy  $d_{50} = 0,24$  i  $0,31$  mm, uzyskane w pomiarach wartości naprężeń granicznych ( $\tau_{gr}$ ) były większe od wartości określonych na podstawie  $\theta_{gr}$  odczytanych z krzywej Shieldsa, natomiast dla gruntów z  $d_{50} = 1,03$  i  $2,34$  mm – wartości  $\tau_{gr}$  określone na podstawie pomiaru były mniejsze.

Według badań Grassa [van Rijn 1993], średnie naprężenia krytyczne określane na podstawie pomiarów są około 35% większe od wartości odczytywanych z krzywej Shieldsa. W świetle badań własnych i obcych stwierdzenie to wydaje się zbyt uproszczone, ale jednocześnie potwierdza wątpliwości co do przebiegu krzywej Shieldsa.

Jak wspomniano we wstępie niniejszej pracy, wielu badaczy zajmujących się zagadnieniem początku ruchu rumowiska podkreślało, że jedną z zasadniczych przyczyn niezgodności wyników pomiarów i wartości naprężeń granicznych określanych według krzywej Shieldsa jest niejednorodność (wielofrakcyjność) uziarnienia materiału korytoowego. W kryterium Shieldsa wpływ ten nie jest uwzględniany, ponieważ występującą w parametrach  $\theta_{gr}$ ,  $Re_*$  i  $D_*$  średnicę charakterystyczną ( $d$ ) przyjmuje się jako wartość





Rys. 1. Porównanie wyników pomiarów własnych z krzywą: a – Shieldsa oryginalną, b – Shieldsa w modyfikacji Yalina [1977]

Fig. 1. Comparison of author's measurement results with: a – Shields original curve, b – Shields curve modified by Yalin [1977]

stałą. Wartość wymienionych wyrażeń będzie więc zależęć od właściwego przyjęcia wartości średnicy. Problem ten może być rozwiązany poprzez podział uziarnienia na frakcje o średnich średnicach  $d_i$ , dla których oddzielnie określa się naprężenia graniczne. W metodzie tej uwzględnienia się tzw. współczynnik ukrzycia (klinowania się ziaren), którego zastosowanie umożliwi określenie poprawnych wartości naprężeń granicznych dla poszczególnych wielkości ziaren w wielofrakcyjnym materiale korytowym [Bartnik, 1992]. Procedura ta jest na ogół stosowana w przypadku określania warunków

początku ruchu rumowiska w potokach i rzekach górskich i podgórszych, natomiast w rzekach nizinnych, gdzie najczęściej występuje materiał piaszczysty, zwykle jej się nie stosuje, przyjmując materiał za jednorodny.

Najczęściej za średnicę charakterystyczną przyjmuje się  $d_{50}$  lub  $d_m$ , przy czym dla piasków rzecznych obie te wielkości mają zwykle zbliżone wartości. Według badań Skibińskiego [1976], na rzekach nizinnych środkowej Polski materiał korytowy stanowią głównie piaski, dobrze wysortowane i uziarnione. W opracowanej przez autora funkcji wleczenia uwzględniony został wskaźnik równomierności uziarnienia, jakim jest cecha dominacji  $C_d$  (24). Biorąc pod uwagę wartości  $C_d$  (tab. 1), materiały gruntowe E i F można uznać za najbardziej równomiernie uziarnione spośród badanych. Uziarnienie pozostałych gruntów trudno jednoznacznie ocenić. Biorąc jednak pod uwagę wartości wszystkich wskaźników zestawionych w tabeli 1, za najbardziej niejednorodne (różnoziarniste) można uznać grunty C i D.

Na problem przyjęcia właściwej średnicy charakterystycznej w gruntach naturalnych zwrócili uwagę w swych pracach Yalin [1977] i Dąbkowski [1990]. Według Yalina, przez zastąpienie w wyrażeniu  $Re_*$  (2) średnicy charakterystycznej  $d$  wielkością  $k_{sd}$  można lepiej uwzględnić wpływ chropowatości powierzchni dna, która zależy nie tylko od wielkości ziaren, ale również od wzajemnego ich „dopasowania” się w masie materiału korytowego, co ma wpływ na opory tarcia wewnętrznego i wartość naprężeń granicznych. Wniosek ten Yalin oparł na analizach teoretycznych, określił również hipotetyczny przebieg krzywej Shieldsa dla gruntów niejednorodnych. Autor zasugerował potrzebę sprawdzenia tej hipotezy w badaniach laboratoryjnych, ale jednocześnie stwierdził, że wyniki dotychczasowych badań wskazują na istnienie „rodziny” krzywych Shieldsa, a nie jednej zależności uniwersalnej odpowiadającej wszystkim gruntom aluwialnym, niezależnie od charakterystyki uziarnienia. Wyniki badań własnych pozwoliły na sprawdzenie tej hipotezy.

W tabeli 3 podano zakresy i wartości średnie bezwzględnych i względnych chropowatości dna uzyskanych w poszczególnych seriach pomiarów. Zmienność uzyskanych wartości (pomijając zawsze możliwe błędy pomiaru) świadczy o stochastycznym charakterze ułożenia ziaren gruntu na powierzchni dna w poszczególnych pomiarach. Pomimo występującej zmienności, średnie wartości chropowatości względnej są wyraźnie mniejsze dla gruntów równomiernie uziarnionych E i F niż dla gruntów C i D. Po zastąpieniu w wyrażeniu (2) średnicy  $d_{50}$  wartościami  $k_{sd}$  otrzymanymi w poszczególnych pomiarach serii C i D oraz E i F, uzyskano nowe wartości  $\theta_{gr}$  i  $Re_*$  pokazane na rysunku 2. Na rysunku tym wyraźnie widać, że w przypadku gruntów E i F uzyskano dużą zgodność wyników pomiaru z przebiegiem krzywej Shieldsa. Natomiast dla gruntów niejednorodnych C i D, rozłożenie punktów na wykresie wyraźnie wskazuje na kształt „nowej” krzywej Shieldsa. Otrzymane wyniki są zatem zgodne z sugestiami wyrażonymi przez Yalina [1977].

Warunki graniczne można również określać na podstawie kryterium Bonnefille'a [Dittrich, 1998], które opisane jest następującymi równaniami:

$$D_* = 2,5 Re_*^{0,8} \quad \text{dla } Re_* < 10 \quad (29)$$

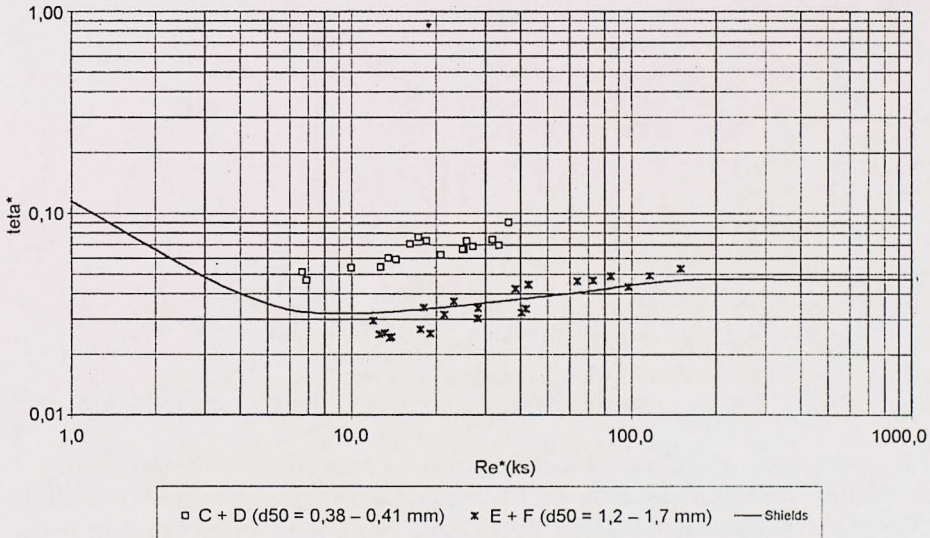
$$D_* = 3,8 Re_*^{0,625} \quad \text{dla } Re_* > 10 \quad (30)$$



Tabela 3. Charakterystyka względnej chropowatości ziaren materiału piaszczystego użytego w badaniach

Table 3. Characteristics of dimensionless sand-grain roughness of material used in investigations

Seria Serie	Względna chropowatość ziaren ( $m = k_s / d_{90}$ )			Względna chropowatość ziaren ( $m = k_s / d_{50}$ )		
	Dimensionless of sand-grain roughness			Dimensionless sand-grain roughness		
	wartość minimalna minimal value	wartość maksymalna maximal value	wartość średnia mean value	wartość minimalna minimal value	wartość maksymalna maximal value	wartość średnia mean value
A	0,80	2,36	1,41	1,18	3,48	2,08
B	0,54	2,51	1,42	0,75	3,48	1,97
C	1,05	2,50	1,62	1,89	4,52	2,92
D	0,74	2,94	1,73	1,10	4,38	2,58
E	0,52	1,32	0,77	0,63	1,60	0,94
F	0,24	1,62	1,00	0,30	2,01	1,24



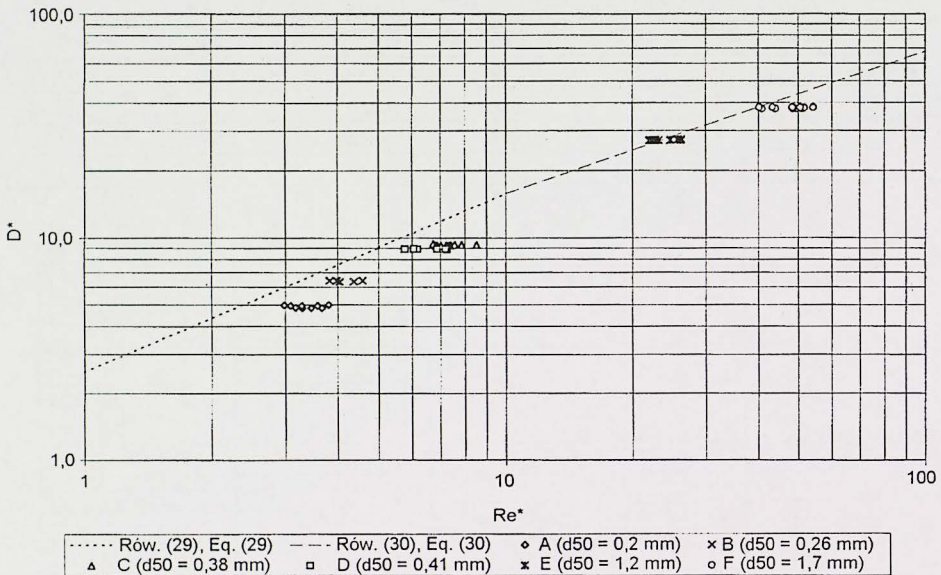
Rys. 2. Porównanie wyników pomiarów własnych dla materiałów niejednorodnych C, D i materiałów jednorodnych E, F – wartości  $Re_*$  obliczone dla  $d = k_s$

Fig. 2. Comparison of author's measurement results for not uniform materials C, D and uniform materials E, F – values  $Re_*$  calculated for  $d = k_s$

w których  $D_*$  określone jest zależnością (28), a  $Re_*$  zależnością (2). Wielkości naprężeń określa się na podstawie wzoru (7), wykorzystując wyznaczone z powyższych równań wartości  $v_*$ .

Na wykresie w układzie współrzędnych logarytmicznych (rys. 3) równania (29) i (30) są prostymi rozgraniczającymi obszar ruchu ziaren, znajdujący się poniżej prostych, od obszaru spoczynku – obszar powyżej prostych. Wyniki pomiarów własnych,

zaznaczone punktami na rysunku 3, znalazły się w strefie ruchu ziaren, ale dość blisko linii wartości granicznych. Punkty z poszczególnych serii pomiarów zgrupowane są wzdłuż linii wzajemnie do siebie równoległych, co wynika z przyjęcia stałej wartości średnicy  $d = d_{50}$  w wyrażeniu  $D_*$ . W przypadku jednorodnych piasków gruboziarnistych E i F punkty z pomiaru praktycznie pokrywają się z zależnością (30). Natomiast punkty dla piasków mniej jednorodnych są bardziej oddalone od wykresu zależności (29). A zatem, stosując kryterium Bonnefille'a, również widoczny jest wyraźny wpływ niejednorodności materiału korytowego.



Rys. 3. Ocena wyników pomiarów własnych według kryterium Bonnefille'a [Dittrich 1998]

Fig. 3. Estimation of author's measurement results according to Bonnefille criteria [Dittrich 1998]

Przeprowadzone dodatkowe analizy wskazują, że można uzyskać dużo lepszą zgodność między wartościami określonymi według pomiarów i z zależności (29), jeżeli dla piasków mniej jednorodnych jako średnicę charakterystyczną przyjmie się  $d_{75}$  zamiast  $d_{50}$ .

Na zakończenie warto jeszcze zwrócić uwagę na uzyskane w badaniach wartości  $k_s$  (tab. 3). W literaturze można znaleźć wiele zależności do określania  $k_s$  dla powierzchni dna koryt naturalnych (np. w pracy Kubraka i Nachlik [2003]). Wyrażenia te najczęściej są podawane w następującej postaci:

$$k_s = m \cdot d_{p\%} \quad (31)$$

w której zarówno stała  $m$ , jak i średnica charakterystyczna  $d_{p\%}$  są różnie przyjmowane przez autorów. Z podanego w tabeli 3 zestawienia wynika, że wartości względne  $k_s$  zmieniają się w zależności od stopnia jednorodności materiału korytowego. Z tego prawdopodobnie powodu w wzorze (31) różni autorzy dla tej samej średnicy  $d_{p\%}$  podają różne wartości  $m$ . Korzystając z tego rodzaju zaleceń, należy więc brać pod uwagę



stopień niejednorodności materiału korytowego. Na podstawie wykonanych badań można podać następujące rekomendacje:

- grunty jednorodne, równomiernie uziarnione –  $\sigma_g < 1,2$ ,  $C_d \approx 1,0$  (piaski gruboziarniste: E –  $d_{50} = 1,2$  mm i F –  $d_{50} = 1,7$  mm):

$$k_s = 0,9d_{90} \quad \text{lub} \quad k_s = 1,1d_{50} \quad (32)$$

- grunty niejednorodne, nierównomiernie uziarnione –  $\sigma_g = 1,3-1,4$ ,  $C_d \neq 1,0$  (piaski drobno- /średnioziarniste: A –  $d_{50} = 0,20$  mm i B –  $d_{50} = 0,26$  mm):

$$k_s = 1,5d_{90} \quad \text{lub} \quad k_s = 2,0d_{50} \quad (33)$$

- grunty niejednorodne, nierównomiernie uziarnione –  $\sigma_g \approx 1,5$ ,  $C_d \neq 1,0$  (piaski średnioziarniste C i D):

$$k_s = 1,7d_{90} \quad \text{lub} \quad k_s = 2,8d_{50} \quad (34)$$

## WNIOSKI

Na podstawie wyników badań laboratoryjnych, wykonanych w zakresie liczb Reynoldsa dla ziaren  $Re_* = 3-55$ , z zastosowaniem 6 rodzajów piasku aluwialnego o różnej jednorodności i równomierności uziarnienia oraz przeciętnej średnicy ziaren  $d_{50} = 0,20-1,7$  mm, można sformułować następujące wnioski:

1. Wielkość bezwymiarowych naprężeń granicznych  $\theta_{gr}$  dla gruntów piaszczystych zależy zarówno od wielkości ziaren, jak i od jednorodności oraz równomierności uziarnienia materiału gruntowego.
2. Dla gruntów jednorodnych uzyskuje się dużą zgodność wartości  $\theta_{gr}$ , otrzymanych z pomiarów i określonych według krzywej Shieldsa, jeżeli w obliczeniach wartości  $Re_*$  zamiast stałej średnicy  $d_{50}$  przyjmie się zmienne wartości  $k_s$  – określane dla poszczególnych pomiarów. W przypadku piasków niejednorodnych na wykresie Shieldsa punkty z pomiarów ułożyły się powyżej krzywej, zachowując jednak kształt krzywej Shieldsa, charakterystycznej dla gruntów jednorodnych.
3. Porównanie wyników pomiarów z wykresem Shieldsa zmodyfikowanym przez Yalina oraz z zależnością Bonnefille'a potwierdza podaną wyżej prawidłowość, że im materiał piaszczysty jest bardziej jednorodny, tym punkty leżą bliżej odpowiednich linii określających warunki graniczne.
4. Jednorodność i równomierność uziarnienia piasków wpływa na chropowatość powierzchni dna płaskiego. Dla celów praktycznych, przy doborze wartości  $k_{sd}$ , można korzystać z odpowiednich zależności (32)–(34).

## PIŚMIENNICTWO

- Bartnik W., 1992. Hydraulika potoków i rzek górskich z dnem ruchomym. Początek ruchu rumowiska. Rozp. hab., Zesz. Nauk. AR w Krakowie, 171.
- Dąbkowski Sz.L., 1990. Kryterium Shieldsa po pięćdziesięciu latach. Mat. konf. „Współczesne problemy budownictwa wodnego”, SGGW, Warszawa.
- Dąbkowski Sz.L., Skibiński J., Żbikowski A., 1982. Hydrauliczne podstawy projektów wodno-melioracyjnych. PWRiL, Warszawa.
- Dittrich A., 1998. Wechselwirkung Morphologie/strömung naturnaher Fließgewässer. Mitteilungen des Institutes für Wasserwirtschaft und Kulturtechnik der Universität Karlsruhe (TH), Heft 198.
- Graf W.H., 1971. Hydraulics of Sediment transport. McGraw-Hill Book Company, New York.
- Kasperek R., 1998. Laboratoryjne badanie transportu rumowiska wlezonego. Mat. XVII Ogólnopolskiej Szkoły Hydrauliki, Zawoja 15–18.09.
- Kubrak J., Nachlik E., 2003. Hydrauliczne podstawy obliczania przepustowości koryt rzecznych. Wydaw. SGGW, Warszawa.
- Little W.C., Mayer P.G., 1976. Stability of channel beds by armoring. Jour. of the Hydraulic Division, 102, HY 11, 1647–1661.
- Marisch K., 2002. Badania naprężeń stycznych w gruntach niespoistych. Maszynopis pracy magisterskiej. Wydz. Inżynierii i Kształtowania Środowiska SGGW, Warszawa.
- Mertens W., 1999. Basic calculations for open channels. Mat. „Course on sediment transport”. SGGW, Warszawa.
- Shen H.W., 1971. River mechanics. Shen Editor, Fort Collins.
- Skibiński J., 1976. Próba ilościowej oceny intensywności transportu rumowiska wlezonego w rzekach środkowej Polski. Rozprawy Naukowe, 74, Wydaw. SGGW, Warszawa.
- Stefański W., Wyszkowski K., 1979. Tablice i wykresy do obliczeń z mechaniki płynów. Wydaw. Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Yalin M.S., 1977. Mechanics of sediment transport. Pergamon Press, Oxford.
- Yung Ch.T., 1996. Sediment transport – theory and practice. McGraw-Hill Book Company, New York.
- van Rijn L.C., 1993. Principles of sediment transport in rivers, estuaries and coastal seas. Aqua Publications, Amsterdam.

## CRITICAL SHEAR STRESS IN OPEN CHANNEL WITH FLAT SANDY BOTTOM

**Abstract.** In this paper a methodology of shear stress determination and the main results of experimental investigation on the beginning of grain's movement of sandy materials are presented. Six kinds of alluvial sand with mean grain diameter  $d_{50} = 0,20-1,7$  mm and different uniformity and regularity of granulation were used in experiments. The measurements, in steady uniform flow conditions in laboratory flume with rectangular cross-section and sandy bottom were carried out at variable water depths and bottom slopes. Investigations confirmed influence of granulation irregularity of sandy bed material on dimensionless critical shear stress. Based on measurements carried out in range  $Re_* = 3-55$  were determined expressions for sand-grain height of flat bottom surface in conditions of beginning grain's movement, with consideration of uniformity and regularity of granulation.



**Key words:** beginning of bedload movement, critical shear stress, sand-grain height

*Z. Popek, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Katedra Inżynierii Wodnej i Rekultywacji Środowiska, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa  
e-mail: popek@alpha.sggw.waw.pl*

*K. Marisch, Freie Universität Berlin, Institut für Geographische Wissenschaften, Matteser Str. 74-100, D-12249 Berlin*