

Celina Skrobisz

PROGNOZOWANIE BAYESOWSKIE W PRZYPADKU BRAKU PEŁNEJ INFORMACJI NA PRZYKŁADZIE PRODUKCJI ENERGII ELEKTRYCZNEJ

BAYESIAN PREDICTION FOR NON-FULL INFORMATION ON THE EXAMPLE OF ELECTRICITY

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
ul. Klemensa Janickiego 31, 71-270 Szczecin

Abstract. The article was consecrated the bayesian modelling and forecasting on the ground the hierarchical models of time series in case missing data. The principles of bayesian modeling and forecasting were put-upon to analysis of production of electric power. In the article to building, estimation and prediction the bayesian, hierarchical models were used numerical methods Monte Carlo.

Słowa kluczowe: analiza bayesowska, brakujące dane, modele hierarchiczne.
Key words: bayesian analysis, hierarchical models. missing data.

ISTOTA BAYESOWSKIEGO WNIOSKOWANIA W EKONOMETRII

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie bayesowskiego modelowania hierarchicznego w przypadku braku pełnej informacji oraz porównanie otrzymanych wyników z wynikami uzyskanymi klasycznymi metodami prognozowania dla brakujących danych.

Bayesowski model statystyczny charakteryzowany jest przez gęstość łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora obserwowanego, wektora prognozowanego oraz wektora parametrów. Zapis analityczny tego modelu jest następujący:

$$p(y, y_f, \theta) = p(y_f / y, \theta) p(y / \theta) p(\theta) \quad (1)$$

gdzie:

y – wektor obserwacji;

θ – wektor parametrów;

$p(\theta)$ – wstępna (niezależna od obserwacji) wiedza badacza o parametrze θ , wyrażona za pomocą rozkładu *a priori* o gęstości $p(\theta)$;

$p(y/\theta)$ – funkcja wiarygodności określająca stopień przekonania, dotyczący przyjmowanych przez badane zjawisko wartości względem hipotetycznych wartości parametru θ ;

$p(\theta/y)$ – wiedza badacza o parametrze θ oparta na całej dostępnej informacji (na podstawie próby i wiedzy wstępnej), wyrażona w postaci gęstości rozkładu *a posteriori*.

Estymacja parametrów modelu polega na wyznaczeniu na podstawie wektora obserwacji i wektora parametrów warunkowej gęstości parametrów, przy danym wektorze y , czyli gęstości rozkładu *a posteriori*.

Wnioskowanie bayesowskie opiera się na twierdzeniu Bayesa:

$$p(\theta / y) = \frac{p(y / \theta) p(\theta)}{\int_{\theta} p(y / \theta) p(\theta) d\theta} \quad (2)$$

gdzie:

$$p(y) = \int p(\theta)p(y/\theta)d\theta \quad - \text{ gęstość brzegowego rozkładu wektora } X.$$

Predykcja jest wyznaczeniem z łącznej gęstości $p(y, y_f, \theta)$ gęstości rozkładu warunkowego dla wektora prognozowanego, przy zaobserwowanym wektorze y ; jest to tzw. gęstość rozkładu predyktywnego:

$$p(y_f/y) = \frac{p(y, y_f)}{p(y)} = \frac{\int_{\Theta} p(y, y_f, \theta) d\theta}{p(y)} = \int_{\Theta} p(y_f/y, \theta) \frac{p(y, \theta)}{p(y)} d\theta = \int_{\Theta} p(y_f/y, \theta) p(\theta/y) d\theta \quad (3)$$

Uzyskany rozkład *a posteriori* $p(\theta/y)$ i rozkład predyktywny $p(y_f/y)$ reprezentuje całą dostępną wiedzę o szacowanych wielkościach parametrów θ i wektorze y_f w następstwie wektora y . W stosowaniu metod bayesowskich podstawowymi problemami, z którymi należy się uporać, są problemy natury numerycznej. Wyznaczenie podstawowych charakterystyk rozkładów *a posteriori* i predyktywnego wymaga obliczenia całek wielokrotnych. Oznacza to, że w przypadku wielowymiarowych przestrzeni parametrów i zmiennych ukrytych, które są przedmiotem wnioskowania, jedynymi dostępnymi metodami obliczeniowymi są symulacyjne metody Monte Carlo. W procesie symulacyjnym wykorzystywane są różne, np. Gibbsa, Metropolisa i Hastingsa czy algorytm eliminacji.

BAYESOWSKIE HIERARCHICZNE MODELE SZEREGU CZASOWEGO

Ogólne zapisy analityczne – zarówno hierarchicznych modeli klasycznych, jak i bayesowskich – są takie same. Różnice i to o zasadniczym charakterze dotyczą sposobów estymacji, weryfikacji i budowy prognoz.

Hierarchiczny model dwustopniowy z liniowym trendem i periodycznym składnikiem sezonowym można zapisać następująco (Zawadzki 2003):

$$Y_{srt} = \alpha_1 t + \alpha_0 + \sum_{s=1}^m b_{0s} Q_{st} + \sum_{r=1}^m b_{0sr} Q_{srt} + U_{srt}, \quad \sum_s b_{0s} = \sum_r b_{0sr} = 0 \quad (4)$$

Model 3-stopniowy wyraża się wzorem:

$$Y_{srlt} = \alpha_1 t + \alpha_0 + \sum_{s=1}^m b_{0s} Q_{st} + \sum_{r=1}^m b_{0sr} Q_{srt} + \sum_{l=1}^m b_{0srl} Q_{srlt} + U_{srlt} \quad (5)$$

przy warunkach:

$$\sum_{s=1}^m b_{0s} = \sum_{r=1}^m b_{0sr} = \sum_{l=1}^m b_{0srl} = 0$$

W modelach (1), (2) zmienne Q_{kt} , Q_{srt} oraz Q_{srlt} są zmiennymi zero-jedynkowymi, przyjmującymi wartości równe 1 dla poszczególnych podokresów, wynoszących odpowiednio $\frac{m}{p_1}$, $\frac{m}{p_2}$ oraz $\frac{m}{p_3}$, gdzie p_1, p_2, p_3 są dzielnikami odpowiadającymi kolejnym stopniom w hierarchii. Z kolei liczba szacowanych parametrów w modelach hierarchicznych jest

równa sumie podzielników pomniejszonych o liczbę stopni w hierarchii. W przypadku modelu dwuczynnikowego:

$$L_2 = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) = p_1 + p_2 - 2$$

Natomiast w modelu trzyczynnikowym:

$$L_3 = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + (p_3 - 1) = p_1 + p_2 + p_3 - 3$$

W przypadku, gdy cykl wahań wynosi 12 miesięcy ($m = 12$), otrzymamy cztery modele dwustopniowe i trzy modele trójstopniowe. Zestawienie tych modeli zawiera tab. 1.

Tabela 1. Specyfikacja regularnych modeli hierarchicznych dla danych miesięcznych

Model	Czynnik pierwszy		Czynnik drugi		Czynnik trzeci		Liczba szacowanych parametrów
	rodzaj zmienności	macierz	rodzaj zmienności	macierz	rodzaj zmienności	macierz	
M12	miesiąc w roku	IN					11
H26	półrocze w roku	PR	miesiąc w półroczu	MP			6
H34	kwartał w roku	K	miesiąc w kwartale	MK			5
H43	okres czterech miesięcy w roku	CZ	miesiąc w okresie czterech miesięcy	MCZ			5
H62	okres dwóch miesięcy w roku	D	miesiąc w okresie dwóch miesięcy	MD			6
H232	półrocze w roku	PR	dwa miesiące w półroczu	PD	miesiąc w okresie dwóch miesięcy	TMD	4
H223	półrocze w roku	PR	kwartał w półroczu	KP	miesiąc w kwartale	MK	4
H322	okres czterech miesięcy w roku	CZ	dwa miesiące w okresie czterech miesięcy	MDCZ	miesiąc w okresie dwóch miesięcy	MD	4

Źródło: Zawadzki (2003).

PROGNOZOWANIE HIERARCHICZNE W PRZYPADKU BRAKUJĄCYCH DANYCH

W procesie modelowania predyktywnego i prognozowania zmiennych wykazujących wahania sezonowe przy braku pełnej informacji należy wyróżnić dwa zasadnicze przypadki, gdy:

- a) w szeregu czasowym występują luki niesystematyczne,
- b) w szeregu czasowym występują luki systematyczne.

Z lukami niesystematycznymi mamy do czynienia wtedy, gdy dysponujemy przynajmniej jedną obserwacją o danym podokresie cyklu wahań periodycznych (miesiącu, kwartale itp.).

Gdy natomiast brakuje takich danych o przynajmniej jednym podokresie, mamy do czynienia z szeregiem z lukami systematycznymi. Z występowaniem luk w danych wiążą się konsekwencje powodujące komplikacje w przebiegu procesu. W przypadku luk niesystema-

tycznych składowe należące do różnych czynników (stopni w hierarchii) mogą być skorelowane. Tym samym nie będzie możliwy indywidualny pomiar udziału zmienności danego czynnika w ogólnej wariancji sezonowej.

Ze znacznie dalej idącymi konsekwencjami mamy do czynienia w szeregach z lukami systematycznymi.

Do możliwych następstw należy zaliczyć:

- 1) skorelowanie składowych należących do różnych czynników,
- 2) stałość niektórych składowych,
- 3) wystąpienie zjawiska polegającego na tym, że niektóre składowe mogą być kombinacjami liniowymi innych składowych.

To, z którą ze wskazanych wyżej sytuacji będziemy mieć do czynienia, zależy będzie od liczby i rozmieszczenia luk w danych.

Na podstawie predyktorów w sytuacji, gdy w danych występują luki, wyznaczane są dwa rodzaje prognoz – interpolacyjne i ekstrapolacyjne.

Prognozy interpolacyjne dotyczą podokresów przedziału czasowego „próby”, w których wystąpiły luki w danych. Natomiast prognozy wybiegające wprzód poza okres estymacji są prognozami ekstrapolacyjnymi.

WNIOSKOWANIE BAYESOWSKIE W PRZYPADKU BRAKUJĄCYCH DANYCH

Do szacowania parametrów bayesowskich modeli hierarchicznych w przypadku niepełnej informacji zastosowany zostanie algorytm EM (Expectation–Maximalization). Algorytm EM jest uniwersalną numeryczną metodą postępowania. Istota metody polega na cyklicznym powtarzaniu dwóch etapów polegających odpowiednio na przewidywaniu określonych parametrów (krok E), a następnie na wyliczeniu zmiennych maksymalizujących określoną funkcję celu (krok M). W każdym z tych etapów korzysta się z wielkości obliczonych w etapie poprzednim. Etap wstępny polega na przyjęciu założenia dotyczącego wartości każdej z brakujących danych, np. średniej lub mediany. Korzystając z tych wartości, w kroku E estymuje się parametry rozkładu. Następnie w kroku M wcześniej przyjęte brakujące wartości są zastępowane wartościami dającymi w efekcie największą wartość funkcji wiarygodności. Funkcja wiarygodności zależy ściśle od parametrów rozkładu wyznaczonych w poprzednim kroku. Formalny zapis postępowania w algorytmie EM jest następujący: mamy dany wektor obserwacji y_i , który zawiera dane obserwowane (y_{obs}) i dane brakujące (y_{mis}). Przez $\theta^{\text{old}} = (\mu^{\text{old}}, \sigma^{\text{old}})$ oznaczamy bieżące oszacowania.

Wartości zmiennej y^{old} wyznaczone są ze wzoru:

$$y^{\text{old}} = \begin{cases} y_{ij} & \text{jeśli } y_{ij} \text{ jest obserwowane} \\ E(y_{ij}/y_{\text{obs}}, \theta^{\text{old}}) & \text{jeśli brakuje } y_{ij} \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:

$$E\left(\sum_{i=1}^n y_{ij}/y_{\text{obs}}, \theta^{\text{old}}\right) = \sum_{i=1}^n y_{ij}^{\text{old}}$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n y_{ij}y_{ik}/y_{\text{obs}}, \theta^{\text{old}}\right) = \sum_{i=1}^n (y_{ij}^{\text{old}}y_{ik}^{\text{old}} + c_{ijk}^{\text{old}})$$

Kolejne oszacowania: $\theta^{\text{new}} = (\mu^{\text{new}}, \sigma^{\text{new}})$ wyznacza się ze wzorów:

$$\mu_j^{\text{new}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{ij}^{\text{old}}$$

$$\sigma_{jk}^{\text{new}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{ij}^{\text{old}} y_{ik}^{\text{old}} + c_{ijk}^{\text{old}}) - \mu_j^{\text{new}} \mu_k^{\text{new}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(y_{ij}^{\text{old}} - \mu_j^{\text{new}})(y_{ik}^{\text{old}} - \mu_k^{\text{new}}) + c_{ijk}^{\text{old}}]$$

gdzie:

$$c_{ijk}^{\text{old}} = \begin{cases} 0 & \text{dla danych obserwowanych} \\ \text{cov}(y_{ij}, y_{ik}/y_{\text{obs}}, \theta^{\text{old}}), & \text{gdzie danych brakuje} \end{cases} \quad (7)$$

Rozkład *a posteriori* jest następujący:

$$p(\theta/y_{\text{obs}}, y_{\text{mis}}) \propto \pi(\theta)L(\theta/y_{\text{obs}}, y_{\text{mis}}) \quad (8)$$

Co tożsame jest z:

$$p(\theta/y_{\text{obs}}) = \int p(\theta, y_{\text{mis}}/y_{\text{obs}}) dy_{\text{mis}} = \int p(\theta/y_{\text{mis}}, y_{\text{obs}}) p(y_{\text{mis}}/y_{\text{obs}}) dy_{\text{mis}} \quad (9)$$

Wartość oczekiwana *a posteriori* przyjmuje wówczas następującą postać:

$$E(\theta/y_{\text{obs}}) = E[E(\theta/y_{\text{mis}}, y_{\text{obs}})/y_{\text{obs}}] \quad (10)$$

Wariancja *a posteriori* natomiast ma postać:

$$\text{Var}(\theta/y_{\text{obs}}) = E[\text{Var}(\theta/y_{\text{mis}}, y_{\text{obs}})/y_{\text{obs}}] + \text{Var}[E(\theta/y_{\text{mis}}, y_{\text{obs}})/y_{\text{obs}}] \quad (11)$$

Równanie powyższe można aproksymować:

$$p(\theta/y_{\text{obs}}) \approx \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D p(\theta/y_{\text{mis}}^d/y_{\text{obs}})$$

gdzie:

$$y_{\text{mis}}^d \sim p(y_{\text{mis}}/y_{\text{obs}}).$$

Podobnie wartość oczekiwana i wariancja mogą być aproksymowane przez:

$$E(\theta/y_{\text{obs}}) \approx \int \theta \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D p(\theta/y_{\text{mis}}^d, y_{\text{obs}}) d\theta = \bar{\theta} \quad (12)$$

gdzie:

$$\bar{\theta} = \sum_{d=1}^D \hat{\theta}_d / D, \quad \hat{\theta}_d = E(\theta/y_{\text{mis}}^d, y_{\text{obs}})$$

$$\text{Var}(\theta/y_{\text{obs}}) \approx \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D V_d + \frac{1}{D-1} \sum_{d=1}^D (\hat{\theta}_d - \bar{\theta})^2 = \bar{V} + B$$

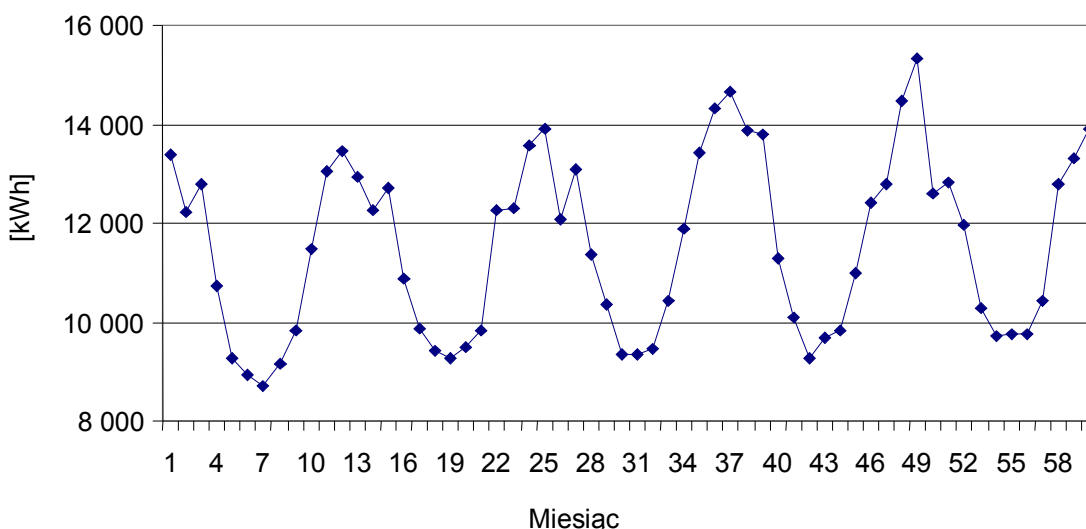
gdzie:

$$V_d - \text{wariancja } a \text{ posteriori oszacowana } (y_{\text{mis}}^d, y_{\text{obs}}), \quad \bar{V} = \sum_{d=1}^D V_d / D.$$

PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Dotychczasowe rozważania zostaną zilustrowane przykładem empirycznym dotyczącym miesięcznej produkcji energii elektrycznej ENEL.

Rysunek 1 przedstawia kształtowanie się miesięcznej produkcji energii elektrycznej.



Rys. 1. Kształtowanie się produkcji energii elektrycznej

W badaniu rozpatrzonych zostało pięć wariantów luk systematycznych w danych miesięcznych:

- I – luki występują w czwartym i ósmym miesiącu cyklu rocznego,
- II – luki występują w piątym, siódmym i jedenastym miesiącu cyklu rocznego,
- III – luki występują w pierwszym kwartale każdego roku,
- IV – luki występują w drugim kwartale każdego roku,
- V – luki występują w co drugim miesiącu i obejmują miesiące nieparzyste,

Luki w danych otrzymano poprzez usunięcie odpowiednich danych z pełnych szeregów czasowych; kierowano się między innymi odległością między lukami oraz występowaniem minimów i maksimów sezonowych.

W analizie produkcji energii elektrycznej w przypadku wszystkich wariantów luk w danych szacowaniu poddano siedem modeli hierarchicznych, w tym cztery dwustopniowe oraz trzy trzystopniowe.

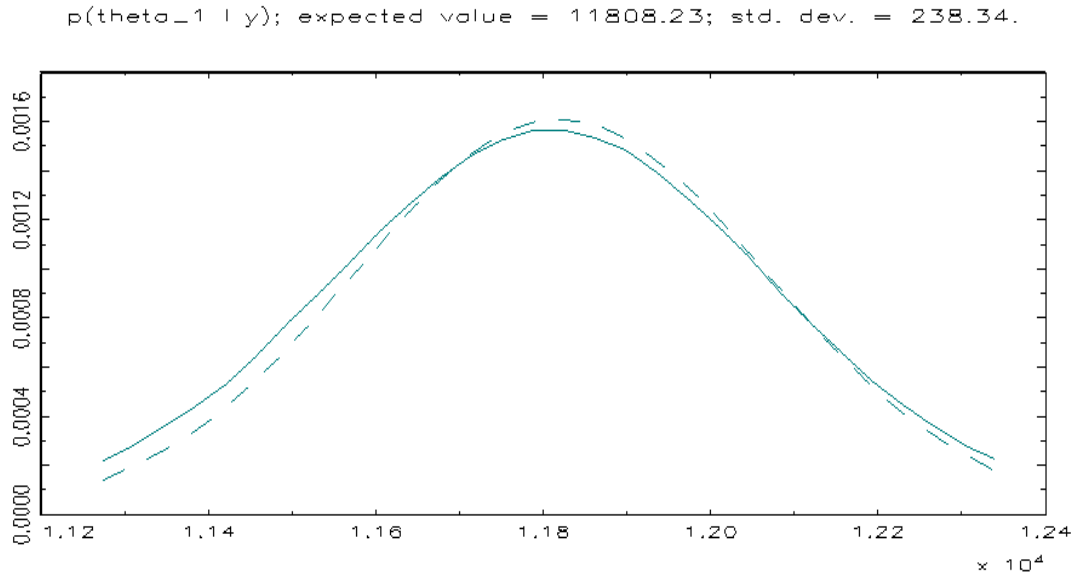
Rysunek 2 przedstawia brzegowy rozkład *a posteriori* parametru θ_1 zmiennej ENEL w pierwszym wariacie luk w danych.

Tabela 2 przedstawia wartości oczekiwane i odchylenia standardowe *a posteriori* parametrów siedmiu modeli hierarchicznych badanej zmiennej ENEL w pierwszym przypadku luk w danych.

Parametr μ oznacza warunkowy rozkład *a posteriori*; zależy od danych oraz innych parametrów modelu. Założono, że parametr μ ma rozkład normalny, σ – warunkowy rozkład *a posteriori* odpowiadający wariancji, τ – warunkowy rozkład *a posteriori* o rozkładzie χ^2 .

Tabela 2. Zestawienie wartości oczekiwanych (A) i odchyłeń standardowych (B) *a posteriori* parametrów siedmiu modeli w pierwszym wariancie luk w danych

Parametry	H26		H43		H34		H62		H223		H232		H322	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
θ_1	11 808,23	238,34	13 123,74	272,51	13 164,04	268,79	13 173,30	380,80	11 759,51	197,56	11 790,18	199,82	13 136,60	357,14
θ_2	11 793,57	241,58	9671,16	273,73	9736,94	267,55	12 076,61	370,62	11 782,92	199,43	11 842,25	225,83	9654,22	358,60
θ_3	11 907,91	255,85	11 441,88	306,50	9905,01	266,98	9771,71	376,42	11 728,20	217,60	11 799,31	220,82	11 406,98	248,63
θ_4	11 787,63	242,23	11 377,01	306,69	11 692,69	230,12	9619,27	377,52	11 677,68	224,20	11 721,20	204,90	11 609,84	248,81
θ_5	11 857,22	243,63	11 770,04	306,84	11 829,72	230,17	11 238,27	368,96	–	–	–	–	–	–
θ_6	11 747,29	249,53	–	–	–	–	11 604,81	217,27	–	–	–	–	–	–
σ	1616,24	120,66	1389,62	102,36	1187,37	87,40	1374,35	105,45	1681,74	111,86	1701,52	113,06	1571,28	111,71
τ	246,68	201,26	1858,06	899,9	2143,43	1028,34	1867,76	753,62	295,08	288,49	302,01	293,94	2649,78	1799,13
μ	11 817,39	196,98	11 477,00	763,15	11 266,55	872,55	11 247,36	700,22	11 737,17	217,46	11 787,89	220,72	11 453,32	1223,83



Rys. 2. Brzegowy rozkład *a posteriori* parametru θ_1 w modelu H26 w pierwszym wariancie luk w danych

W tabeli 3 przedstawiono wartości kwantyli brzegowych rozkładów predyktywnych w przypadku występowania luk w pierwszym wariancie, tj. w 4 i 8 miesiącu każdego roku.

Tabela 3. Kwantyle rozkładów predyktywnych *a posteriori* dla poszczególnych parametrów

Kawntyle rzędu	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0,025	10 436,55	10 528,30	10 601,24	12 183,92	12 233,00	12 402,16
0,25	11 304,96	11 353,45	11 385,47	12 269,24	12 424,39	12 680,55
0,5	11 315,62	11 460,03	11 523,47	12 473,80	12 900,93	12 992,65
0,75	11 396,22	11 500,42	11 648,13	12 758,70	12 950,86	13 280,51
0,95	11 836,02	11 634,86	11 737,74	12 355,79	13 030,98	13 435,08
Rzeczywiste wartości	9755	9774	10436	12790	13317	13901

Niewielkie różnice charakterystyk *a posteriori* dla parametrów $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ zawartych w tab. 2 wyraźnie wskazują na bardzo niewielką wrażliwość wyników estymacji bayesowskiej na założenia modelowe i rozkład *a priori*. Analizę jednowymiarowych brzegowych rozkładów predyktywnych opieramy na kwantylach odczytanych z tych rozkładów. Można tu w szczególności wykorzystać jako miarę rozproszenia różnicę między kwantylami wynoszącą 0,75 i 0,25 (odległość międzykwantylową) rozkładu predyktywnego. W tabeli 3, oprócz wartości kwantyli, podano zrealizowane wartości zmiennej ENEL. Okazuje się, że prognoza punktowa na poziomie wszystkich kwantyli jest dość trafna w tym sensie, że zrealizowane wartości leżą w sąsiedztwie tej charakterystyki. Jedynie dwie pierwsze zrealizowane wartości odbiegają dość znacznie od uzyskanych kwantyli rozkładów predyktywnych. Ta sytuacja powoduje, że prognozy punktowe nie są obciążone dość dużym błędem prognozy, co potwierdzi analiza błędów prognoz ekstrapolacyjnych.

W tabelach 4 i 5 przedstawiono wyniki średnich błędów prognoz ekstrapolacyjnych dla zmiennej ENEL w przypadku niepełnej informacji zarówno dla klasycznych modeli hierarchicznych (K), jak i bayesowskich (B) dla dwóch horyzontów czasowych $h = 12$ i $h = 6$.

Tabela 4. Zestawienie wyników prognozowania ekstrapolacyjnego dla $h = 12$

Wariant	H26		H34		H43		H62		H223		H232		H322	
	K	B	K	B	K	B	K	B	K	B	K	B	K	B
I	16,21	13,22	8,34	7,25	12,08	10,23	8,67	17,34	14,36	16,32	14,83	15,11	9,67	8,35
II	15,15	20,18	7,57	13,33	9,06	8,62	6,64	19,38	14,30	14,38	15,01	14,34	7,15	9,35
III	15,33	14,73	15,56	15,89	10,79	10,69	14,02	13,98	15,57	11,87	15,73	10,64	10,14	10,03
IV	20,77	18,46	8,63	8,51	11,84	11,71	8,57	8,41	20,85	15,73	21,33	18,24	11,96	10,98
V	14,13	13,91	>30	25,14	10,09	9,45	11,92	10,82	>30	21,46	14,6	12,85	12,55	10,38

Źródło: wyniki dla modeli klasycznych – Markiewicz (2004); obliczenia własne dla modeli bayesowskich.

Tabela 5. Zestawienie wyników prognozowania ekstrapolacyjnego dla $h = 6$

Wariant	H26		H34		H43		H62		H223		H232		H322	
	K	B	K	B	K	B	K	B	K	B	K	B	K	B
I	16,14	14,52	12,30	12,09	13,71	13,35	12,02	15,90	11,91	13,06	13,11	13,22	12,04	11,92
II	11,02	19,86	10,09	12,08	12,55	10,81	6,42	19,02	9,50	13,78	12,80	10,74	7,57	7,94
III	27,56	11,62	27,82	17,19	15,32	10,55	23,55	21,27	27,85	7,02	27,07	7,91	14,74	7,96
IV	37,35	13,81	13,99	12,79	18,84	11,63	12,62	21,02	>30	13,79	>30	13,49	19,21	12,14
V	19,42	10,49	>30	11,66	16,55	7,52	16,28	15,25	>30	10,99	22,06	10,95	16,91	7,60

Źródło: wyniki dla modeli klasycznych – Markiewicz (2004); obliczenia własne dla modeli bayesowskich.

Prognozowanie ekstrapolacyjne na podstawie bayesowskich hierarchicznych modeli szeregu czasowego w warunkach występowania luk systematycznych okazało się we wszystkich przypadkach efektywne i spełniające przyjęte kryterium dopuszczalności prognoz. Natomiast w przypadku klasycznych modeli hierarchicznych w czterech przypadkach warunek ten nie został spełniony, tj. dla H34 (V wariant), H223 (IV i V wariant) oraz H232 (IV wariant).

Tabela 6 przedstawia procent przypadków, w których stosując bayesowską analizę brakujących danych w modelach hierarchicznych, osiągnięto lepsze wyniki średnich błędów prognoz ekstrapolacyjnych niż w przypadku klasycznej analizy tych modeli.

Tabela 6. Procent przypadków, w których lepsze wyniki prognozowania osiągnięto, stosując analizę bayesowską

Wariant luk	Procent przypadków	
	$h = 12$	$h = 6$
I	57,14	57,14
II	28,57	42,85
III	85,71	100
IV	100	100
V	100	100

PODSUMOWANIE

Na pięć wariantów luk w danych jedynie w drugim wariancie dla dwóch okresów prognozowania w większości przypadków lepsze wyniki średnich błędów prognozą osiągnięto, stosując analizę klasyczną. W pozostałych przypadkach lepsze wyniki prognozowania uzyskano, stosując analizę bayesowską. Natomiast w IV i V wariancie luk dla dwóch okresów prognozowania stosując bayesowską analizę, aż w 100% przypadków osiągnięto lepsze wyniki, niż stosując klasyczną analizę. Również w III wariancie luk, ale tylko dla horyzontu czasowego $h = 6$, stosując bayesowską analizę brakujących danych, osiągnięto lepsze wyniki w 100%.

PIŚMIENNICTWO

- Box G.E.P., Tiao G.C.** 1992. Bayesian inference in statistical analysis. Londyn, Wiley Classics Library.
- Markiewicz A.** 2004. Zastosowanie modeli hierarchicznych oraz sieci neuronowych w prognozowaniu zjawisk ekonomicznych. Szczecin, AR.
- Osiewalski J.** 1991. Bayesowska estymacja i predykcja dla jednorównaniowych modeli ekonometrycznych. Zesz. Nauk. AE Krak. 100, 47–50.
- Osiewalski J.** 2001. Ekonometria Bayesowska w zastosowaniach. Kraków, AE.
- Little R.J.A., Rubin D.B.** 2002. Statistical analysis with missing data. New Jersey, Wiley-Interscience.
- Zawadzki J.** 2003. Zastosowanie hierarchicznych modeli szeregów czasowych w prognozowaniu zmiennych ekonomicznych z wahaniami sezonowymi. Szczecin, AR.