

RAFAŁ PODLASKI

Modelowanie rozkładów pierśnic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych

II. Aproksymacja rozkładów pierśnic w lasach wielopiętrowych

Modelling tree diameter distributions using mixture models.

II. Approximation the breast height diameter distributions of multi-storeyed forests

ABSTRACT

Podlaski R. 2011. Modelowanie rozkładów pierśnic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych. II. Aproksymacja rozkładów pierśnic w lasach wielopiętrowych. Sylwan 155 (5): 293-300.

The aim of the study is to (1) test the procedure of estimating mixture distribution parameters proposed in Podlaski [2011] and (2) present the universality and usefulness of mixture distributions for modelling the empirical distributions of breast height diameters on the example of two-generation stands with an asymmetric breast height diameter distributions. The tested procedure of estimating mixture distribution parameters allowed to calculate parameters for all analysed plots. Weibull and gamma distributions correctly approximated empirical distributions of breast height diameters of all investigated stands. The results presented in the study show the usefulness of mixture distributions to model asymmetric unimodal and poorly developed bimodal distributions of breast height diameters.

KEY WORDS

finite mixture models, Weibull distribution, gamma distribution, irregularly descending distributions, forest dynamics, Świętokrzyski National Park, Poland

ADDRESSES

Rafał Podlaski – e-mail: r_podlaski@pro.onet.pl

Pracownia Ochrony Przyrody; Uniwersytet Jana Kochanowskiego; ul. Świętokrzyska 15; 25-406 Kielce

Wstęp

Modelowanie rozkładów pierśnic w drzewostanach gospodarczych oraz zbliżonych do naturalnych ma duże znaczenie w hodowli i urządzaniu lasu oraz w ekologii i ochronie przyrody. Rozkłady pierśnic są wykorzystywane m.in. do modelowania dynamiki lasu oraz do konstruowania modeli struktury i budowy drzewostanów, co ma istotne znaczenie podczas projektowania zabiegów w lasach gospodarczych oraz w strefach ochrony częściowej [Bernadzki 1994; Zasada 1995]. Znajomość rozkładów pierśnic oraz innych cech charakteryzujących drzewostany znajdujące się np. w określonych stadiach i fazach rozwojowych jest konieczna m.in. w trakcie prowadzenia zabiegów hodowlanych kształtujących żywotne drzewostany o budowie, a przede wszystkim sposobie zmieszania i udziale powierzchniowym, maksymalnie zbliżonym do lasów naturalnych oraz podczas przekształcania stref ochrony częściowej w strefy ochrony ścisłej [Bruchwald 2001; Zasada, Cieszewski 2005]. Podczas analizy dynamiki drzewostanów często nie dysponujemy szczegółowymi danymi, ale tylko niektórymi statystykami charakteryzującymi badane drzewo-

stany (najczęściej jest to wartość średniej pierśnicy i odchylenia standardowego pierśnic) oraz opisem drzewostanu (np. znany stadium i fazę rozwojową lasu). W tej sytuacji można wygenerować brakujące dane wykorzystując różne modele rozkładów pierśnic.

W latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XX wieku w Świętokrzyskim Parku Narodowym występowało zjawisko zamierania i regresji jodły [Gądek 1993]. W wyniku tego zjawiska cykle rozwojowe lasów świętokrzyskich zostały w różnym stopniu zniekształcone. Wytworzyły się stadia i fazy rozwojowe notowane tylko w okresie działania czynników powodujących zaburzenia średniej wielkości, między wydzielaniem się pojedynczych drzew a katastrofalnym rozpadem drzewostanu [Podlaski 2008a]. W lukach oraz pod rozluźnionym okapem drzewostanu odnawiał się buk i jodła. W wyniku tego procesu wykształciły się drzewostany jodłowo-bukowe, wielopiętrowe, o asymetrycznych rozkładach pierśnic, w których można wyróżnić dwie główne generacje wiekowe [Podlaski 2008b]. W drzewostanach z udziałem jodły i buka uzyskano dobre rezultaty podczas aproksymacji rozkładów pierśnic pojedynczymi rozkładami, m.in. Weibulla i gamma [Zasada 1995; Rymer-Dudzińska, Dudzińska 1999, 2001; Podlaski 2006]. Dokładniejsze modelowanie tych rozkładów oraz identyfikowanie różnych grup drzew (np. generacji wiekowych) możliwe jest tylko w przypadku zastosowania bardziej złożonych modeli, np. rozkładów mieszanych.

Celem pracy jest (1) przetestowanie zaproponowanej w pracy Podlaskiego [2011] procedury estymacji parametrów rozkładów mieszanych oraz (2) zaprezentowanie uniwersalności i przydatności rozkładów mieszanych do modelowania rzeczywistych rozkładów pierśnic na przykładzie dwugeneracyjnych drzewostanów o asymetrycznym rozkładzie pierśnic.

Teren badań

Badania wykonano w leśnictwach Święta Katarzyna i Święty Krzyż, w Świętokrzyskim Parku Narodowym, w Górach Świętokrzyskich (50°50′-50°53′N, 20°48′-21°05′E). Na terenie objętym badaniami zdecydowanie dominowały gleby brunatne kwaśne i płowe właściwe [Kowalkowski 2000]. W tych warunkach wykształciły się zespoły *Dentario glandulosae-Fagetum*, *Abietetum polonicum* i *Quercu roboris-Pinetum* [Matuszkiewicz 2008]. Z danych uzyskanych na podstawie obserwacji w latach 1955-1994, przeprowadzonych na stacji meteorologicznej na Świętym Krzyżu (575 m n.p.m.) wynika, że w analizowanym okresie średnia roczna temperatura wynosiła +5,9°C, średnia temperatura stycznia -5,2°C, a lipca +15,9°C. Średnia roczna suma opadów to 923 mm, a okres wegetacyjny trwał około 182 dni [Olszewski i in. 2000].

Metodyka

W lasach mieszanych z udziałem jodły i buka założono 15 kołowych powierzchni badawczych (BS01-BS15) o wielkości od 0,25 do 0,40 ha, rozmieszczonych losowo na obszarze objętym badaniami. Po wytyczeniu powierzchni zmierzono pierśnice wszystkich żywych drzew o pierśnicy równej i większej od 7 cm.

Do modelowania rozkładów pierśnic zastosowano (1) pojedynczy rozkład Weibulla, (2) pojedynczy rozkład gamma, (3) rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych Weibulla oraz (4) rozkład mieszany złożony z dwóch rozkładów składowych gamma. Funkcje gęstości rozkładu Weibulla i gamma mają odpowiednio następującą postać:

$$f_{(Weib)}(x | \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha}} \quad [1]$$

$$f_{(gam)X}(x | \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\beta^\alpha (x-\gamma)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta(x-\gamma)} \quad [2]$$

gdzie:

- parametr kształtu $\alpha > 0$,
- parametr skalujący $\beta > 0$,
- $x \geq$ od parametru przesunięcia γ ,
- $\Gamma(\cdot)$ – funkcja gamma.

Funkcje gęstości rozkładu mieszanego, złożonego odpowiednio z dwóch rozkładów składowych Weibulla i gamma, można przedstawić jako:

$$f_{(Weib)X}(x | \psi) = \pi_1 f_{(Weib)1}(x | \theta_1) + \pi_2 f_{(Weib)2}(x | \theta_2) \quad [3]$$

$$f_{(gam)X}(x | \psi) = \pi_1 f_{(gam)1}(x | \theta_1) + \pi_2 f_{(gam)2}(x | \theta_2) \quad [4]$$

gdzie:

- π_1, π_2 – wagi (frakcje) rozkładów składowych $f_{(\cdot)1}(\cdot), f_{(\cdot)2}(\cdot)$,
- θ_1, θ_2 – wektory parametrów rozkładów składowych $f_{(\cdot)1}(\cdot), f_{(\cdot)2}(\cdot)$,
- ψ – zestaw wszystkich parametrów danego rozkładu mieszanego.

Standardową procedurą obliczania parametrów rozkładów mieszanych jest metoda największej wiarygodności, wykorzystująca do znalezienia ekstremum funkcji wiarygodności algorytm EM połączony z metodą Newtona [Böhning 2000]. Obliczenia przeprowadzono stosując schemat postępowania zaproponowany w pracy Podlaskiego [2011], bazujący na metodzie min.k/max.k (dla $k=1, 3, 6$) i 0,5/1,5/średnia wyboru wartości startowych dla procedury numerycznej (algorytm EM + metoda Newtona) szukającej minimum globalnego funkcji wiarygodności o postaci:

$$LL_2(\psi) = -2 \sum_{j=1}^l n_j \log \left(\frac{P_j(\psi)}{O_j} \right), \quad O_j = \frac{n_j}{N} \quad [5]$$

gdzie:

- $P_j(\psi)$ – teoretyczne prawdopodobieństwo zdarzenia, że dana pierśnica należy do j -tego stopnia grubości,
- O_j – empiryczna częstość względna dla j -tego stopnia,
- l – liczba stopni.

Ponadto w celu przetestowania proponowanego schematu postępowania, dla każdej powierzchni zastosowano metodę wielopunktową, pozwalającą na znalezienie minimum globalnego dla rozkładów jednomodalnych i słabo wykształconych dwumodalnych [McLachlan, Krishnan 2008; Podlaski 2011].

Do oceny zgodności dopasowania rozkładów teoretycznych do rozkładów rzeczywistych wykorzystano test chi-kwadrat o $(l-np-1)$ stopni swobody (np – liczba estymowanych parametrów) [Macdonald, Pitcher 1979; Reynolds i in. 1988]:

$$\chi^2 = -2 \sum_{j=1}^l n_j \log \left(\frac{\hat{n}_j}{n_j} \right) \quad [6]$$

gdzie:

- \hat{n}_j, n_j – odpowiednio oszacowana i rzeczywista liczba drzew w j -tym stopniu grubości,
- l – liczba stopni grubości.

Obliczenia przeprowadzono przy pomocy opracowanego przez Macdonalda i Du [2004] pakietu „mixdist”, wchodzącego w skład środowiska R (<http://www.R-project.org>).

Wyniki

Liczba jodeł w badanych drzewostanach wielopiętrowych kształtowała się od 17 do 77 drzew/ha, a buków – od 255 do 536 drzew/ha. Pozostałe gatunki (głównie grab, dęby, jarzab i klon jawor) występowały w liczbie do 55 drzew/ha. Na dwóch powierzchniach (BS02, BS07) rosły tylko jodła i buk (tab. 1). Pole powierzchni przekroju pierśnicowego wynosiło w przypadku jodły odpowiednio od 0,3591 (BS03) do 7,3058 m²/ha (BS10), natomiast w przypadku buka od 7,6699 (BS05) do 37,8099 m²/ha (BS02). Udział głównych gatunków drzew, określony na podstawie pola powierzchni przekroju pierśnicowego, wskazuje na dominację buka. Na wszystkich powierzchniach udział tego gatunku był większy od udziału jodły i wynosił od 65,5 (BS14) do 96,0% (BS02). Pozostałe gatunki nie przekraczały 16% udziału (tab. 1). Średnia pierśnica drzew na powierzchni kształtowała się od 14,9 (BS05) do 32,4 cm (BS08). Zmienność pierśnic była stosunkowo duża, ponieważ wartość odchylenia standardowego przekroczyła 16 cm (BS11). Decydował o tym przede wszystkim udział drzew najgrubszych. Na niektórych powierzchniach drzewa osiągnęły maksymalną pierśnicę wynoszącą ≥ 100 cm (tab. 1).

Prawidłowa estymacja parametrów rozkładów mieszanych polega na znalezieniu ekstremum globalnego funkcji wiarygodności. Obliczenie ekstremum globalnego jest uzależnione m.in. od wybranych wartości startowych procedury numerycznej. Testowana procedura estymacji parametrów rozkładów mieszanych umożliwiła znalezienie minimum globalnego dla wszystkich analizowanych powierzchni badawczych. Obliczone minima były przynajmniej w jednym przypadku równe minimum globalnemu wyznaczonemu przy pomocy metody wielopunktowej (tab. 2). Minimum globalne znaleziono tylko w jednym przypadku (na cztery możliwe) dla rozkładu mieszanego Weibulla i czterech powierzchni oraz dla rozkładu mieszanego gamma i pięciu powierzchni. Rezultaty wyznaczania minimum globalnego wykazały przydatność obu metod wyboru wartości startowych do estymacji parametrów rozkładów mieszanych

Tabela 1.

Skład gatunkowy badanych drzewostanów i charakterystyka pierśnic
Species structure and dbh characteristics of analysed stands

Powierzchnia	Udział pierśnicowego pola przekroju [%]			Pierśnica [cm]			
	Jodła	Buk	Pozostałe	Średnia	Odchylenie standardowe	Minimum	Maksimum
BS01	8,2	79,5	12,3	25,8	13,3	9	76
BS02	4,0	96,0	0,0	30,5	13,7	11	87
BS03	12,2	81,9	5,9	16,8	10,1	8	63
BS04	8,3	90,4	1,3	18,5	11,9	8	68
BS05	4,7	92,4	2,9	14,9	6,3	7	39
BS06	9,5	88,6	1,9	16,0	4,8	8	36
BS07	8,7	91,3	0,0	26,0	12,9	10	68
BS08	10,5	81,1	8,4	32,4	13,5	12	78
BS09	14,3	84,0	1,7	24,7	11,5	10	79
BS10	16,6	69,4	14,0	31,8	15,8	11	109
BS11	4,2	85,9	9,9	29,1	16,1	10	81
BS12	9,9	76,8	13,3	26,2	13,6	11	81
BS13	6,6	87,7	5,7	24,5	12,7	11	79
BS14	19,1	65,5	15,4	25,6	13,6	9	100
BS15	19,7	74,1	6,2	27,8	13,8	11	79

Tabela 2.

Rezultaty wyznaczania minimum globalnego przy wykorzystaniu różnych metod wyboru wartości startowych algorytmu estymującego parametry rozkładu mieszanego Weibulla i gamma

Determination of global minimum with use of various methods of choosing the initial values for the algorithm of mixture distribution parameters estimation

Powierzchnia	Weibull										Metoda wielopunktowa	Metoda wielopunktowa	
	min.k/max.k					0,5/1,5/średnia							
	k=1	k=3	k=6	min.k/max.k	k=6	k=1	k=3	k=6	min.k/max.k	k=6			0,5/1,5/średnia
BS01	x	20,48	20,48	20,48	20,48	20,48	20,48	20,48	20,28	20,28	20,28	20,28	20,28
BS02	x	36,71	36,51	36,51	36,51	36,51	36,51	36,51	38,17	38,17	38,17	37,46	37,46
BS03	27,37	27,37	27,37	27,37	27,37	27,37	27,37	27,37	34,03	33,92	33,92	34,03	33,92
BS04	x	26,03	26,03	26,03	26,03	26,03	26,03	26,03	25,72	25,72	25,72	30,93	25,72
BS05	x	x	9,57	x	x	9,57	x	9,57	8,62	8,62	8,62	8,62	8,62
BS06	6,18	6,18	6,18	6,59	6,18	6,18	6,18	6,18	8,94	8,94	8,94	7,05	7,05
BS07	x	25,31	25,31	34,94	34,94	25,31	25,31	25,31	35,92	27,15	35,92	35,92	27,15
BS08	x	x	x	37,12	37,12	37,12	37,12	37,12	39,59	39,59	39,59	39,59	39,59
BS09	x	33,01	x	x	x	33,01	x	33,01	35,77	35,77	35,77	x	35,77
BS10	27,15	27,15	27,15	27,15	27,15	27,15	27,15	27,15	x	x	x	27,51	27,51
BS11	x	35,62	35,62	35,62	35,62	35,62	35,62	35,62	36,38	36,38	36,38	35,62	35,62
BS12	x	36,83	36,83	36,83	36,83	36,83	36,83	36,83	36,88	36,88	36,88	36,88	36,88
BS13	34,64	34,64	34,64	34,64	34,64	34,64	34,64	34,64	35,11	35,11	35,11	35,30	35,11
BS14	x	37,29	x	37,29	37,29	37,29	37,29	37,29	36,62	36,62	36,62	37,45	36,62
BS15	29,54	32,56	32,56	32,56	32,56	29,54	29,54	29,54	32,76	32,76	32,76	32,76	32,76

x – brak zbieżności procedury numerycznej; lack of convergence of numerical procedure

złożonych z dwóch rozkładów składowych Weibulla i gamma. Brak zbieżności procedury numerycznej wystąpił w przypadku rozkładu mieszanego Weibulla dla 17 aproksymacji, natomiast w przypadku rozkładu mieszanego gamma – dla 5 (tab. 2).

Wartości statystyki χ^2 i obliczonego poziomu istotności (p) świadczą o poprawnym aproksymowaniu danych rzeczywistych przez rozkłady mieszane Weibulla i gamma w przypadku wszystkich badanych drzewostanów (tab. 3). Najdokładniej rozkłady rzeczywiste zostały aproksymowane modelami teoretycznymi dla powierzchni BS10, BS11 i BS01. Zastosowanie mieszanych rozkładów zwiększyło dokładność aproksymacji, w porównaniu do odpowiednich pojedynczych rozkładów, w przypadku 14 powierzchni dla rozkładu Weibulla i 10 powierzchni dla rozkładu gamma (tab. 3).

Dyskusja

W przypadku stosowania rozkładów mieszanych do aproksymacji jednomodalnych i słabo wykształconych dwumodalnych rozkładów pierścic konieczne jest zastosowanie odpowiednich metod określania wartości startowych dla procedury numerycznej obliczającej parametry rozkładów mieszanych. Zastosowane metody wyboru wartości startowych tylko dla trzech powierzchni w przypadku rozkładu Weibulla (BS03, BS10, BS13) i dla pięciu powierzchni w przypadku rozkładu gamma (BS01, BS05, BS08, BS12, BS15) pozwoliły na uzyskanie zbieżności i znalezienie minimum globalnego dla wszystkich trzech wariantów metod $\min.k/\max.k$ oraz 0,5/1,5/średnia. W pozostałych aproksymacjach przynajmniej dla jednego przypadku (1) nie uzyskano zbieżności albo (2) proces znajdowania minimum globalnego zatrzymał się po znalezieniu minimum lokalnego lub punktu przegięcia funkcji wiarygodności. Przedstawione wyniki dowodzą, że wykorzystanie odpowiedniej metody określania wartości startowych podczas estymacji parametrów rozkładów mieszanych jest kluczowe dla otrzymania prawidłowych wyników. Ekstremum globalne jest możliwe do znalezienia w przypadku wyznaczenia dużej liczby różnych wartości startowych regularnie pokrywających cały zbiór danych rzeczywistych i uruchamiania kolejno

Tabela 3.

Zgodność dopasowania badanych rozkładów teoretycznych do rozkładów rzeczywistych
Goodness-of-fit of analysed theoretical and empirical distributions

Powierzchnia	Pojedynczy rozkład	Rozkład mieszany		Pojedynczy	Rozkład mieszany	
	Weibulla	Weibulla		rozkład gamma	gamma	
	p	χ^2	p	p	χ^2	p
BS01	0,8116	20,48	0,8774	0,9097	20,28	0,8842
BS02	0,1673	36,51	0,3529	0,3242	37,46	0,2854
BS03	0,2377	27,37	0,3903	0,2302	33,92	0,3992
BS04	0,2105	26,03	0,4617	0,2034	25,72	0,4784
BS05	0,1730	9,57	0,6535	0,3374	8,62	0,7350
BS06	0,0358	6,18	0,8003	0,3538	7,05	0,5378
BS07	0,1185	25,31	0,4452	0,1425	27,15	0,3484
BS08	0,1577	37,12	0,1433	0,1159	39,59	0,0981
BS09	0,1843	33,01	0,3223	0,2435	35,77	0,2158
BS10	0,9488	27,15	0,9837	0,9801	27,51	0,9815
BS11	0,6758	35,62	0,9747	0,9032	35,62	0,9685
BS12	0,0976	36,83	0,2611	0,1505	36,88	0,2155
BS13	0,1093	34,64	0,2560	0,1553	35,11	0,2386
BS14	0,0593	37,29	0,6363	0,2709	36,62	0,6656
BS15	0,3883	29,54	0,4895	0,4336	32,76	0,3331

dla każdej z nich procedury numerycznej [McLachlan, Krishnan 2008]. Ze wzrostem liczby wartości startowych i wzrostem regularności pokrycia zwiększa się prawdopodobieństwo startu procedury numerycznej w pobliżu ekstremum globalnego. Na tej zasadzie oparta jest metoda wielopunktowa, wykorzystana do znalezienia minimum globalnego w niniejszym opracowaniu. Stosowanie tej metody jest jednak bardzo pracochłonne. Jej wersja opisana w pracy Podlaskiego [2011] wymaga m.in. 45-krotnego uruchomienia procedury numerycznej. Z tego względu zaproponowano procedurę wykorzystującą i porównującą wyniki uzyskane dla metody $\min.k/\max.k$ ($k=1, 3, 6$) i $0,5/1,5/\text{średnia}$, a dopiero w przypadku braku przynajmniej dwóch takich samych rozwiązań, uwzględniającą dodatkowo metodę wielopunktową [Podlaski 2011].

Badane wielopiętrowe, dwugeneracyjne drzewostany Świętokrzyskiego Parku Narodowego charakteryzowały się asymetrycznymi rozkładami pierśnic. Modelowanie tego typu rozkładów pierśnic z wykorzystaniem rozkładów mieszanych zwiększa precyzję aproksymacji, a przede wszystkim umożliwia identyfikację różnych grup drzew [Zasada, Cieszewski 2005; Podlaski 2010]. Podobne wnioski przedstawili inni autorzy prowadzący badania w lasach o różnym składzie gatunkowym i o różnej budowie [Zhang i in. 2001; Hessenmoller, von Gadow 2001; Liu i in. 2002; Zasada, Cieszewski 2005].

Podsumowanie

Proponowana procedura estymacji parametrów rozkładów mieszanych może być przydatna podczas aproksymacji rozkładów pierśnic w drzewostanach wielopiętrowych. Przedstawione rezultaty wskazują na uniwersalność i przydatność rozkładów mieszanych do modelowania rzeczywistych rozkładów pierśnic drzewostanów o różnej strukturze oraz sugerują większą możliwość wykorzystania tych rozkładów m.in. podczas analizy dynamiki lasu oraz konstruowania modeli struktury i budowy drzewostanów. Dla jodły i buka modele wzrostu drzew i drzewostanów powinny w szerszym stopniu uwzględniać lasy wielopiętrowe, m.in. dwugeneracyjne [Pretzsch 2001]. Jest to szczególnie ważne w przypadku tych dwóch gatunków ze względu na procesy zamierania, regresji i regeneracji jodły oraz zastępowania jodły przez buka.

Literatura

- Bernadzki E. 1994. Półnaturalna hodowla lasu jest nadal aktualna. *Las Pol.* 4: 7-10.
- Böhning D. 2000. *Computer-Assisted Analysis of Mixtures and Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Bruchwald A. 2001. Möglichkeiten der Anwendung von Wachstumsmodellen in der Praxis der Forsteinrichtung. *Beitr. Forstwirtsch. u. Landschaftsökol* 3: 118-122.
- Gądek K. 1993. Aktualny stan zagrożenia drzewostanów jodlowych Świętokrzyskiego Parku Narodowego przez różne czynniki szkodotwórcze na tle rodzaju i rozmiaru regionalnych i wielkoobszarowych emisji przemysłowych. *Prądnik* 7-8: 53-60.
- Hessenmoller D., von Gadow K. 2001. Beschreibung der Durchmessererteilung von Buchenbeständen mit Hilfe der bimodalen WEIBULLfunktion. *Allg. Forst- und Jagdzeitung* 172: 46-50.
- Kowalkowski A. 2000. *Gleby*. W: Cieśliński S., Kowalkowski A. Świętokrzyski Park Narodowy. Przyroda, gospodarka, kultura. Świętokrzyski Park Narodowy, Bodzentyn. 169-196.
- Liu C., Zhang L., Davis C. J., Solomon D. S., Gove J. H. 2002. A finite mixture model for characterizing the diameter distribution of mixed-species forest stands. *For. Sci.* 48: 653-661.
- Macdonald P. D. M., Du J. 2004. *mixdist: Mixture Distribution Models*.
- Macdonald P. D. M., Pitcher T. J. 1979. Age-groups from size-frequency data: a versatile and efficient method of analyzing distribution mixtures. *J. Fish. Res. Board. Can.* 36: 987-1001.
- Matuszkiewicz J. M. 2008. *Zespoły leśne Polski*. PWN, Warszawa.
- McLachlan G. J., Krishnan T. 2008. *The EM algorithm and Extensions*. Wiley, Hoboken.
- Olszewski J. L., Szałach G., Żarnowiecki G. 2000. *Klimat*. W: Cieśliński S., Kowalkowski A. Świętokrzyski Park Narodowy. Przyroda, gospodarka, kultura. Świętokrzyski Park Narodowy, Bodzentyn. 129-145.
- Podlaski R. 2006. Suitability of the selected statistical distributions for fitting diameter data in distinguished development stages and phases of near-natural mixed forests in the Świętokrzyski National Park (Poland). *For. Ecol. Manage.* 236: 393-402.

- Podlaski R. 2008a. Dynamics in Central European near-natural *Abies-Fagus* forests: Does the mosaic-cycle approach provide an appropriate model? *J. Veg. Sci.* 19: 173-182.
- Podlaski R. 2008b. Characterization of diameter distribution data in near-natural forests using the Birnbaum-Saunders distribution. *Can. J. For. Res.* 38: 518-527.
- Podlaski R. 2010. Two-component mixture models for diameter distributions in mixed-species, two-age cohort stands. *For. Sci.* 56: 379-390.
- Podlaski R. 2011. Modelowanie rozkładów pierśnic drzew z wykorzystaniem rozkładów mieszanych. I. Definicja, charakterystyka i estymacja parametrów rozkładów mieszanych. *Sylvan* 155 (4): 244-252.
- Pretzsch H. 2001. Models for pure and mixed forests. W: Evans J. *The forests handbook*. Blackwell Science, London. 210-228.
- Reynolds M. R., Burk T., Huang W-H. 1988. Goodness-of-fit tests and model selection procedures for diameter distribution models. *For. Sci.* 34: 373-399.
- Rymer-Dudzińska T., Dudzińska M. 1999. Analiza rozkładu pierśnic w drzewostanach bukowych. *Sylvan* 143 (8): 5-24.
- Rymer-Dudzińska T., Dudzińska M. 2001. Rozkład pierśnic drzew w nizinnych drzewostanach bukowych. *Sylvan* 145 (8): 13-22.
- Zasada M. 1995. Ocena zgodności rozkładów pierśnic w drzewostanach jodlowych z niektórymi rozkładami teoretycznymi. *Sylvan* 139 (12): 61-69.
- Zasada M., Cieszewski C. J. 2005. A finite mixture distribution approach for characterizing tree diameter distributions by natural social class in pure even-aged Scots pine stands in Poland. *For. Ecol. Manage.* 204: 145-158.
- Zhang L. J., Gove J. H., Liu C., Leak W. B. 2001. A finite mixture of two Weibull distributions for modeling the diameter distributions of rotated-sigmoid, uneven-aged stands. *Can. J. For. Res.* 31: 1654-1659.

SUMMARY

Modelling tree diameter distributions using mixture models. II. Approximation the breast height diameter distributions of multi-storeyed forests

In the twentieth century, the processes of the decline and recovery of fir stands, as well as the replacement of fir by beech in the Świętokrzyskie Mountains resulted in the development of two-generation multi-storeyed fir and beech stands.

The aim of the study is to (1) test the procedure of estimating mixture distribution parameters proposed in Podlaski [2011] and (2) present the universality and usefulness of mixture distributions for modelling the empirical distributions of breast height diameters on the example of two-generation stands with an asymmetric breast height diameter distributions.

The study was conducted in the Świętokrzyski National Park in the mixed fir and beech forests, on 15 circular plots with the size ranging from 0.25 ha to 0.40 ha. Single and mixed distributions (as a mixture of two component distributions: Weibull and gamma) were used for modelling actual breast height diameter distributions). The mixture distribution parameters were estimated using the procedure proposed in Podlaski [2011], inter alia, applying and comparing the findings obtained by the methods $\min.k/\max.k$ ($k=1, 3, 6$) and $0.5/1.5/\text{average}$.

The tested procedure of estimating mixture distribution parameters allowed to locate the global minimum for all analysed plots. The conducted approximations showed the usefulness of both methods of selecting initial values $\min.k/\max.k$ (for $k=1, 3, 6$) and $0.5/1.5/\text{average}$ to estimate the mixture distribution parameters. The chi-square test results indicate the correct approximation of actual data ($p>0.05$) by mixed Weibull and gamma distributions for all investigated forest stands.