

TEORETYCZNE PODSTAWY ZAGĘSZCZANIA I PRASOWANIA  
MATERIAŁÓW SYPKICH POCHODZENIA ROŚLINNEGO O CECHACH  
PLASTYCZNYCH

*Jarosław Czaban, Zbigniew Kamiński*

Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka  
ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok  
e-mail: jczaban@pb.edu.pl

**Streszczenie.** Procesy zagęszczania i prasowania materiałów roślinnych w stanie sypkim są wykorzystywane w produkcji granulatów i brykietów przeznaczonych do skarmiania zwierząt oraz na opał. Procesy te wymagają dużych nakładów energetycznych sięgających  $40-70 \text{ kWh}\cdot\text{t}^{-1}$ . W pracy przedstawiono podstawy teorii plastyczności materiałów sypkich ze wzmocnieniem gęstościowym. Opierając się o warunek plastyczności sformułowany przez Kuhna i Downey'a oraz jego modyfikacje, opisano związki fizyczne umożliwiające analizę stanu odkształcenia i naprężenia w modelowaniu procesów zagęszczania materiałów roślinnych o cechach plastycznych. W analizie wykorzystano podstawowe funkcje porowatości oraz prawa tarcia Amontonsa-Coulomba i Prandla dla ośrodka porowatego. Badania doświadczalne i teoretyczne prasowania mieszanki paszowej z udziałem słomy przeprowadzono w komorze zamkniętej. Identyfikacji podstawowych stałych materiałowych dokonano na drodze numerycznej wykorzystując metody regresji nieliniowej oraz zależności opisującej naciski na stemplu komory. Wyniki przedstawionych badań wskazały na możliwość szerszego wykorzystania teorii plastyczności materiałów sypkich do modelowania innych, bardziej skomplikowanych procesów brykietowania i granulowania sypkich materiałów roślinnych w prasach stemplowych i rotacyjnych.

Słowa kluczowe: materiał sypki, zagęszczanie, prasowanie, warunek plastyczności

WSTĘP

Procesy zagęszczania i prasowania materiałów roślinnych w stanie sypkim są szeroko wykorzystywane w produkcji granulatów i brykietów przeznaczonych do skarmiania zwierząt oraz na opał. Scalenie sypkich składników w trwały produkt (aglomerat) o określonych cechach geometrycznych i fizycznych w prasach stemplowych lub rotacyjnych z układem roboczym typu „matryca-rolki” wymaga dużych nakładów energetycznych – na granulowanie mieszanek paszowych zużywa

się do  $40 \text{ kWh}\cdot\text{t}^{-1}$ , na brykietowanie trocin i materiałów żdźbłowych nawet do  $70 \text{ kWh}\cdot\text{t}^{-1}$  (Hejft 1991).

Do najważniejszych czynników wpływających na przebieg procesu prasowania i zagęszczania zalicza się:

- cechy fizyczne i chemiczne prasowanego materiału, w tym: gęstość, właściwości reologiczne, podatność na zagęszczanie (parametry te są zależne od wilgotności i temperatury),
- cechy geometryczne układu roboczego,
- parametry kinematyczne układu roboczego,
- parametry eksploatacyjne np. podaż strumienia masy do układu roboczego,
- wymagane cechy produktu finalnego (kształt i wymiary, gęstość, twardość, spoistość, czyli całość wytworzonych cech wytrzymałościowych determinujących zachowanie kształtu).

Dokonanie analizy kompleksowego wpływu tak wielu różnorodnych czynników na przebieg procesu prasowania i właściwości produktu finalnego wymaga prowadzenia wielu badań eksperymentalnych, które przy użyciu metod planowania eksperymentu mogą posłużyć do optymalizacji wskaźników pracy urządzeń granulująco-brykietujących (wydajności, poboru energii). Należy zaznaczyć, że uzyskane w ten sposób wyniki są słuszne tylko dla określonych warunków prowadzenia procesu (rodzaj i właściwości zagęszczanego materiału, parametry konstrukcyjne i techniczno-eksploatacyjne danej prasy) i nie mogą być praktycznie wykorzystywane do prognozowania przebiegu procesu zagęszczania oraz jego oceny dla innych materiałów czy też pras z innymi układami roboczymi.

Ta niedogodność skłoniła autorów do zastosowania nowych metod analizy procesu zagęszczania i prasowania materiałów pochodzenia roślinnego opartych o modelowanie matematyczne ośrodków sypkich i porowatych (Czaban 2000, Kamiński 1995). W pracy przedstawiono teoretyczne podstawy teorii plastyczności materiałów sypkich ze wzmocnieniem gęstościowym, zwracając szczególną uwagę na możliwości jej wykorzystania do opisu stanu naprężenia i odkształcenia w materiałach pochodzenia roślinnego o cechach plastycznych. Zamieszczono przykład modelowania procesu prasowania w komorze zamkniętej mieszanki paszowej z udziałem słomy, którą potraktowano jako idealnie plastyczne ciało sypkie. Możliwość stosowania takiej idealizacji w stosunku do mieszanek paszowych została potwierdzona przez Poliščuka (1988).

#### WARUNEK PLASTYCZNOŚCI I PRAWO PŁYNIĘCIA

W przypadku procesów zagęszczania materiałów sypkich, szczególnie przy użyciu dużych nacisków, warunek plastyczności powinien być funkcją zarówno naprężeń stycznych (reprezentowanych przez drugi niezmiennik dewiatora naprężeń  $J_2$ ) jak i naprężeń normalnych (reprezentowanych przez pierwszy niezmiennik

tensora naprężenia  $J_1$ ) (Dec 1992, Kisiel 1982, Klassien i Griszajew 1989). Z tego względu warunek Hubera-Misesa-Hencky'go i klasyczny warunek Coulomba-Mohra (stosowany dla materiałów drobnoziarnistych poddawanych działaniu stosunkowo niewielkim naprężeniom) nie znajdują zastosowania w procesach zagęszczania materiałów sypkich i porowatych pod działaniem dużych nacisków.

Spośród wielu przytaczanych w literaturze warunków plastyczności (Dec 1992, Drujanov 1989, Drzymała 1988, Laptev 1982, Nowak 1996) najszersze zastosowanie w teorii zagęszczania materiałów sypkich i porowatych znajduje warunek plastyczności sformułowany przez Kuhna i Downey'a (1971):

$$f(\sigma_i)_j = 3J_2' - (1-2\nu)J_2 - Y_{pl}^2 \quad (1)$$

gdzie:  $J_2$  – długi niezmiennik tensora naprężenia,  $Y_{pl}$  – granica plastyczności na ściskanie,  $\nu$  – współczynnik Poissona dla materiału zagęszczanego (zależny od porowatości).

Warunek plastyczności (1) można przekształcić do postaci:

$$f(\sigma_i)_j = 3J_2' + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} J_1^2 - \frac{3Y_{pl}^2}{2(1+\nu)} \quad (2)$$

Przy założeniach upraszczających można przyjąć, że w przypadku zagęszczania materiałów drobnoziarnistych granica plastyczności jest, podobnie jak współczynnik Poissona, funkcją tylko porowatości (lub gęstości) zagęszczanego materiału:

$$Y_{pl} = \varphi(\Theta)\sigma_{pl} \quad (3)$$

gdzie:  $\Theta$  – porowatość materiału,  $\sigma_{pl}$  – granica plastyczności na ściskanie materiału o zerowej porowatości ( $\Theta = 0$ ),  $\varphi(\Theta)$  – funkcja opisująca zmianę granicy plastyczności  $Y_{pl}$  materiału.

Porowatość  $\Theta$  materiału zagęszczanego definiuje się następująco:

$$\Theta = 1 - \frac{\rho}{\rho_L} \quad (4)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość materiału zagęszczanego,  $\rho_L$  – gęstość litego materiału (osnowy).

Przyjmując oznaczenia:

$$\alpha(\Theta) = \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad , \quad \beta(\Theta) = \frac{3\varphi(\Theta)}{2(1+\nu)} \quad (5)$$

i podstawiając do równania (2) otrzymuje się często spotykaną w literaturze postać warunku plastyczności zaproponowaną przez Greena (1972):

$$f(\sigma_i)_j = 3J_2' + \alpha(\Theta)J_1^2 - \beta(\Theta)\sigma_p^2 = 0 \quad (6)$$

Funkcje  $\alpha(\theta)$  i  $\beta(\theta)$  noszą nazwę funkcji porowatości.

Warunek plastyczności (6) przy stałej porowatości opisuje w przestrzeni naprężeń głównych  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  powierzchnię w kształcie wydłużonej elipsoidy obrotowej, której osie przecinają się w początku układu współrzędnych, a dłuższa oś pokrywa się z osią izotropowych stanów naprężenia. Warunek plastyczności przyjmuje różne formy w zależności od postaci funkcji porowatości, które mogą być wyznaczone doświadczalnie lub teoretycznie.

Spełnienie warunków:

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} \alpha(\Theta) = 0; \quad \lim_{\Theta \rightarrow 0} \beta(\Theta) = 1 \quad (7)$$

zapewnia (przy osiągnięciu gęstości litego materiału ( $\Theta=0$ )) przejście warunku plastyczności (6), do warunku plastyczności Hubera-Misesa. Zależność (6) jest podawana w literaturze w formie równania elipsy:

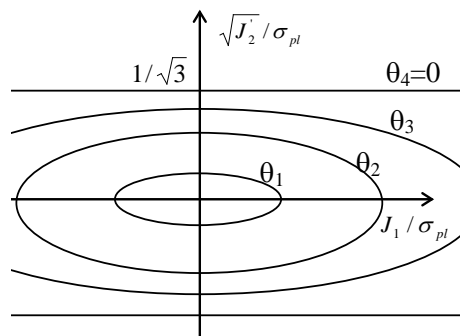
$$\frac{J_1^2}{A^2} + \frac{J_2^2}{B^2} = 1 \quad (8)$$

gdzie:  $A, B$  – zależności opisane wyrażeniami:

$$A = \sqrt{\frac{\beta(\Theta)}{\alpha(\Theta)}} \sigma_{pl} \quad (9)$$

$$B = \sqrt{\frac{\beta(\Theta)}{3}} \sigma_{pl}$$

Równanie (8) przedstawia we współrzędnych  $J_1/\sigma_{pl}$  i  $\sqrt{J_2}/\sigma_{pl}$  elipsę o półosiach  $A$  i  $B$  ze środkiem w początku układu współrzędnych (rys. 1). Nieliniowość funkcji porowatości powoduje, że zmiany powierzchni plastyczności nie mają charakteru izotropowego.



**Rys. 1** Graficzny obraz warunku plastyczności Greena (6) ( $\theta_4 < \theta_3 < \theta_2 < \theta_1$ )

**Fig. 1.** Schematic of Green (6) yield criterion ( $\theta_4 < \theta_3 < \theta_2 < \theta_1$ )

Symetria względem osi pionowej oznacza, że znak  $J_1$  jest nieistotny, czyli materiał ma te same właściwości przy ściskaniu i rozciąganiu. Badania doświadczalne wykazują różnice tych właściwości. Według Okońskiego (1993) związane jest to z powstawaniem szczelin w zagęszczanym materiale, które nie odgrywają większej roli przy ściskaniu, a zasadniczą przy rozciąganiu. Efekt ten może być uwzględniony przez wprowadzenie translacji powierzchni (6) wzdłuż osi hydrostatycznej o wartość  $c$  (Drujanov 1989, Okoński 1993). Wartość  $c$  jest nieujemną stałą lub funkcją porowatości. Równanie (6) przyjmie wówczas postać:

$$f(\sigma_i)_j = 3J_2' + \alpha(\Theta) J_1(+c)^2 - \beta(\Theta)\sigma_p^2 = \rho \quad (10)$$

Inna modyfikacja polega na zróżnicowaniu funkcji  $\alpha(\theta)$  (Okoński 1993)

$$\alpha(\Theta) = \begin{cases} \alpha(\Theta) d & IJq \leq 0 \\ \alpha'(\Theta) d & IJq > 0 \end{cases} \quad (11)$$

Zdaniem Drujanova (1989), warunki plastyczności w postaci (6) i (10) są uniwersalne i mogą być stosowane nie tylko do opisu proszków metali, ale także materiałów otrzymanych przez prasowanie lub prasowanie i spiekanie.

Warunek plastyczności (stanu granicznego) (10) proponowany jest także przez Kisielea i Mroza w pracy dotyczącej mechaniki skał i gruntów (Kisiel 1982). Warunek ten został przedstawiony w nieco innej postaci:

$$f(\sigma_i) = \frac{(J_1 + C)^2}{A^2} + \frac{J_2'}{B^2} - 1 = 0 \quad (12)$$

gdzie:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są skalarnymi funkcjami gęstości lub wskaźnika porowatości materiału. Warunek ten pozwala na ujęcie koncepcji linii krytycznej, stosowanej w mechanice gruntów oddzielającej stateczne stany deformacji (po stronie zagęszczania) od stanów niestatecznych (po stronie rozluźniania). Wprowadzając uproszczenie, że linia krytyczna na płaszczyźnie  $J_1, \sqrt{J_2'}$  jest linią prostą nachyloną pod kątem  $\varphi_c$  do osi ciśnień (rys. 2a), materiał można opisać stałym kątem  $\text{tg}(\varphi_c) = B/C$  oraz dwoma funkcjami materiałowymi  $C = C(\Theta)$  i  $A = A(\Theta)$ . Korzystając z funkcji porowatości  $\alpha(\theta)$ ,  $\beta(\theta)$  w warunku plastyczności (10) przyjmując one postać:

$$\begin{aligned} \text{tg}\varphi_c &= \frac{B}{C} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\beta}{3}} \sigma_{pl} \\ C &= c \\ A &= \sqrt{\frac{\alpha}{3}} \end{aligned} \quad (13)$$

Kąt  $\varphi_c$  nosi nazwę efektywnego lub krytycznego kąta tarcia i określa cechy materiału w stanie zaawansowanego płynięcia. Warunek ten stosowany jest do gruntów o zmiennej spójności, zależnej od porowatości. W przypadku  $C = 0$  krytyczny kąt tarcia wynosi  $\pi/2$ , a warunek (12) przechodzi w warunek plastyczności Greena (6).

W szczególnym przypadku  $C^2 = A^2$  warunek plastyczności (12) może przybrać postać przedstawioną na rysunku 2b. Warunek ten może być stosowany wyłącznie dla materiałów sypkich bez spójności.

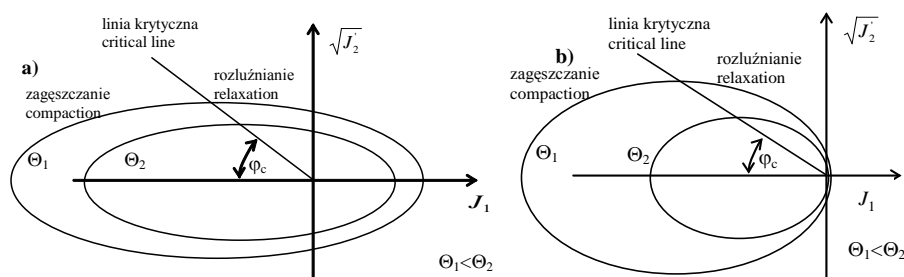
Stateczne i niestateczne stany deformacji materiału możliwe są do uwzględnienia przez warunek plastyczności Suha (Dec 1992, Laptev 1988), otrzymany na drodze modyfikacji warunku Coulomba-Mohra:

$$f(\sigma_i)_{\bar{f}} = \left[ \left( -\frac{1}{3}J_1 + k \right)^2 + \frac{1}{3}J_2' \right]^{1/2} - \beta c \left( \frac{\pi \Theta}{2 \varphi} \right)^n = 0 \quad (14)$$

gdzie:

$$\Theta = a \cdot r \left[ \left( \frac{2}{3}J_1' \right)^{1/2} a / \left( -\frac{1}{3}J_1 + k \right) \right],$$

$k, n, \beta$  i  $\varphi$  - stałe lub funkcje porowatości zależne od materiału.



**Rys. 2** Graficzny obraz modyfikacji warunku plastyczności postaci (12): a) ze zmienną spójnością, b) z zerową spójnością (Kisiel 1982)

**Fig. 2.** Schematic of modified yield criterion (12): a) with variable cohesion, b) with zero cohesion (Kisiel 1982)

Zdaniem Deca (1992), wyznaczenie parametrów materiałowych w tym warunku plastyczności wymaga przeprowadzenia złożonych prób ścinania w aparaturze o specjalnej konstrukcji oraz stosowania skomplikowanych metod interpretacji uzyskanych wyników. Z tego względu stwierdza on, że większą szansę praktycznego stosowania ma warunek plastyczności w postaci (1).

W literaturze można również spotkać, oprócz gładkich powierzchni plastyczności, także uproszczone warunki w postaci prostych brył zamkniętych z narożami wywodzące się z mechaniki gruntów, stanowiące modyfikację warunku plastyczności Coulomba-Mohra (Kisiel 1982).

Model plastyczny materiału jest jednoznacznie określony w przypadku, jeśli obok warunku plastyczności znane jest również prawo płynięcia. Zakładając, że powierzchnia plastyczności jest gładka i wypukła, a funkcja  $g(\sigma_{ij})$  jest potencjałem dla prędkości odkształceń, można sformułować je w postaci:

$$e_{ij} = \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (15)$$

gdzie:  $\lambda$  – dodatnio określony mnożnik,  $e_{ij}$  – tensor prędkości odkształcenia plastycznego.

Założenie o istnieniu potencjału plastycznego, stosowane dla metali, znalazło również zastosowanie w analizie procesu zagęszczania materiałów porowatych i sypkich. Można wyróżnić stowarzyszone i niestowarzyszone z warunkiem plastyczności prawo płynięcia. W przypadku, gdy w równaniu (15) miejsce funkcji zajmie warunek plastyczności, np. postaci (6), otrzymujemy stowarzyszone prawo płynięcia, które przyjmie postać:

$$e_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (16)$$

Oznacza to, że warunek plastyczności określa jednoznacznie mechanizm plastycznego płynięcia. W takim przypadku kierunek wektora prędkości odkształceń jest ortogonalny do powierzchni plastyczności.

Wykorzystując stowarzyszone prawo płynięcia i warunek plastyczności Greena (6) otrzymuje się równania konstytutywne (Okoński 1993):

$$\sigma_{ij} = \frac{2\sqrt{\alpha(\Theta)\beta(\Theta)}\sigma_p}{\sqrt{e_k^2 + 1} \alpha(\Theta)e_i^2} \left( e_i + \frac{1-2\alpha(\Theta)}{6\alpha(\Theta)} e_k \delta_{ik} \right) \quad (17)$$

gdzie:  $e_{kk}$  – intensywność odkształceń objętościowych,  $e_{int}$  – intensywność odkształcenia.

#### FUNKCJE POROWATOŚCI

Wykorzystanie warunku plastyczności (6) do modelowania procesów zagęszczania materiałów porowatych wymaga przyjęcia konkretnych postaci funkcji porowatości  $\alpha$  i  $\beta$ . Jest to zagadnienie podstawowe, ponieważ zmiany tych funkcji

decydują o przebiegu zmian powierzchni plastyczności w trakcie procesu zagęszczania materiału porowatego. Funkcje porowatości mogą być określone teoretycznie lub identyfikowane na drodze eksperymentalnej. Postać tych funkcji powinna być dobrana tak, aby spełnione były warunki (7). Według Okońskiego (1993), w większości prac dotyczących zagęszczania proszków metali, funkcje porowatości traktowane są jako uniwersalne, niezależne od rodzaju materiału, temperatury, wymiarów ziaren, prędkości odkształcenia i stosowane są w szerokim zakresie zmian porowatości. Postulat uniwersalności nie został jednak nigdzie wyraźnie sformułowany. Okoński w świetle swoich badań stwierdza, że funkcje porowatości należy jednak traktować jako funkcje materiałowe i konsekwentnie identyfikować doświadczalnie, a postulat uniwersalności traktować jako przybliżony i słuszny dla niskich wartości porowatości. W przypadku braku odpowiednich danych eksperymentalnych należy stosować funkcje teoretyczne. Uniwersalność teoretycznych funkcji porowatości w odniesieniu do modelowania procesu zagęszczania mieszanek paszowych przedstawiono w pracy (O'Dogherty 1989). Natomiast Dec (1992), w modelowaniu zagęszczania węgla brunatnego i chlorku sodu w prasie walcowej, stosuje doświadczalnie określone funkcje materiałowe występujące w warunku plastyczności (1). Przykładowe postaci funkcji porowatości spotykane w literaturze przedstawiono w tabeli 1.

**Tabela 1.** Przykładowe funkcje porowatości  $\alpha(\theta)$  i  $\beta(\theta)$   
**Table 1.** Examples of functions of porosity  $\alpha(\theta)$  and  $\beta(\theta)$

Lp.	$\alpha(\theta)$	$\beta(\theta)$	Literatura References
1	$\frac{1-\theta}{4(1-\theta)}$	$(1-\theta)^3$	Skorochod i Tučinskij 1978, Skorochod 1979, Štern 1982
2	$\frac{1-\theta}{4(1-\theta)}$	$(1-\theta)^2 \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0}$	Katašinskij & Štern 1983
3	$\frac{1}{4} \left[ \frac{3 \left( 1 - \theta^{\frac{1}{3}} \right)}{\left( 3 - 2\theta^{\frac{1}{4}} \right) \ln \theta} \right]^2$	$\left[ \frac{3 \left( 1 - \theta^{\frac{1}{3}} \right)}{3 - 2\theta^{\frac{1}{4}}} \right]^2$	Green 1972
4	$A\theta^m$	$(1-\theta)^n$	Shima i Oyane 1976
5	$\frac{1}{4} \left[ \frac{\left( \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0} \right)^5}{\ln \left[ 1 - \left( \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0} \right)^{2.6} \right]} \right]^2$	$\left( \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0} \right)^5$	Kamiński 1995, Miedukov1991



Osobnym zagadnieniem jest wprowadzenie do opisu funkcji materiałowych wartości porowatości zerowej  $\Theta_0$ , określającej gęstość ośrodka w fazie początkowej procesu zagęszczania. Gęstość ta, w przypadku materiałów pochodzenia roślinnego, nie jest równoważna gęstości usypowej (Kamiński 1995, Nowak 1996).

Najszerze zastosowanie w analizie zagęszczania materiałów porowatych znajdują funkcje w formie proponowanej przez Shima-Oyane (tab. 1). Stosowane one są powszechnie przez badaczy do doświadczalnej identyfikacji przebiegu funkcji  $\alpha(\theta)$  i  $\beta(\theta)$  poprzez poszukiwanie stałych  $A$ ,  $m$  i  $n$  (tab.1, poz. 3).

#### PRAWA TARCIA DLA MATERIAŁÓW POROWATYCH

Prawa tarcia odgrywają znaczącą rolę w procesie zagęszczania materiałów porowatych i określają wielkość sił tarcia działających na materiał i narzędzia formujące. W analizie zagęszczania ośrodków porowatych wykorzystuje się zwykle dwa prawa tarcia: ślizgowe Amontonsa-Coulomba oraz przylgowe Prandtla (Dec 1992, Drujanov 1989).

Prawo tarcia Amontonsa-Coulomba określa zależność pomiędzy naprężeniem stycznym  $\tau_n$  a normalnym  $\sigma_n$  związanych między sobą współczynnikiem tarcia  $\mu$ :

$$\tau_n = \mu \sigma_n \quad (18)$$

Jak wykazują badania eksperymentalne (Drzymała 1988, Hejft 1995, Nowak 1996), wartość współczynnika tarcia  $\mu$  zależy od porowatości (gęstości lub stopnia zagęszczenia) materiału. Dla większości badanych materiałów porowatych i sypkich wartość tego współczynnika maleje wraz ze spadkiem porowatości. Zmiany te autorzy aproksymują prostymi funkcjami matematycznymi, zależnymi od gęstości materiału lub nacisku normalnego. Dodatkowo wprowadzają do opisu również wilgotność i temperaturę materiału.

Drujanov (1989) zaproponował przybliżoną zależność opisującą przebieg zmian współczynnika tarcia w funkcji porowatości materiału w postaci:

$$\mu = \mu_L (1 - \Theta)^{-\frac{2}{3}} \quad (19)$$

gdzie:  $\mu_L$  – współczynnik tarcia materiału o porowatości  $\theta = 0$ .

Uwzględniając wyrażenie (19) w równaniu (18), prawo tarcia Amontonsa-Coulomba przyjmie postać:

$$\tau_n = \mu_L (1 - \Theta)^{-\frac{2}{3}} \sigma_n \quad (20)$$

W przypadku osiągnięcia dużych nacisków podczas zagęszczania materiałów porowatych, przy stosunkowo dużych wartościach współczynnika tarcia  $\mu$ , osiągnięte wartości sił tarcia mogą przekroczyć wartości wytrzymałości materiału na ścinanie  $\tau_s$ . W takiej sytuacji prawo Amontonsa-Coulomba przestaje być ważne, a materiał „przylega” do elementów roboczych. Zjawisko to uwzględnia prawo tarcia Prandtla:

$$\tau_n = m \tau_s \quad (21)$$

gdzie:  $m$  – współczynnik tarcia Prandtla ( $m \leq 1$ ).

Wartość wytrzymałości materiału porowatego na ścinanie  $\tau_s$  dla warunku plastyczności w postaci (6) wynosi:

$$\tau_s = \sqrt{\frac{\beta(\Theta)}{3}} \sigma_p \quad (22)$$

Ze względu na wzrost powierzchni kontaktu materiału przy wzroście jego gęstości, wartość współczynnika tarcia Prandtla  $m$  ulega zmianom. Do opisu tego zjawiska Drujanov (1989) proponuje zależność:

$$m = m_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \quad (23)$$

gdzie:  $m_L$  – współczynnik tarcia materiału o porowatości  $\theta=0$ .

Należy zaznaczyć, że wartość współczynnika tarcia Prandtla  $m$  (23) rośnie wraz ze wzrostem gęstości prasowanego materiału, co jest zgodne z wynikami badań doświadczalnych (Drujanov 1989).

Uwzględniając równania (22) i (23) prawo tarcia Prandtla (21) można opisać zależnością:

$$\tau_n = m_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\beta(\Theta)}{3}} \sigma_p \quad (24)$$

Tak więc przy zagęszczaniu materiałów porowatych w szerokim zakresie porowatości ogólnie prawa tarcia można zapisać w postaci (Drujanov 1989):

$$\tau_n = \begin{cases} \mu_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \sigma_n & \text{dla } \mu_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \sigma_n < m_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\beta(\Theta)}{3}} \sigma_p \\ m_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\beta(\Theta)}{3}} \sigma_p & \text{dla } \mu_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \sigma_n \geq m_L (1 - \Theta)^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\beta(\Theta)}{3}} \sigma_p \end{cases} \quad (25)$$

Jak wykazują badania, wartości współczynników tarcia  $\mu_L$  i  $m_L$  materiału litego są zależne od rodzaju materiału. Współczynniki te powinny być zidentyfikowane na drodze eksperymentalnej.

## PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA

Wykorzystując równania (17) wraz z funkcjami porowatości Katašinskogo-Šterna (poz. 2 tab. 1) oraz model tarcia Prandtla (24) otrzymano, po dokonaniu niezbędnych przekształceń, zależność opisującą nacisk jednostkowy na stemplu  $p_{st}$  od średniej gęstości  $\rho$  prasowanego w komorze zamkniętej (jednoosiowy stan odkształcenia) materiału sypkiego:

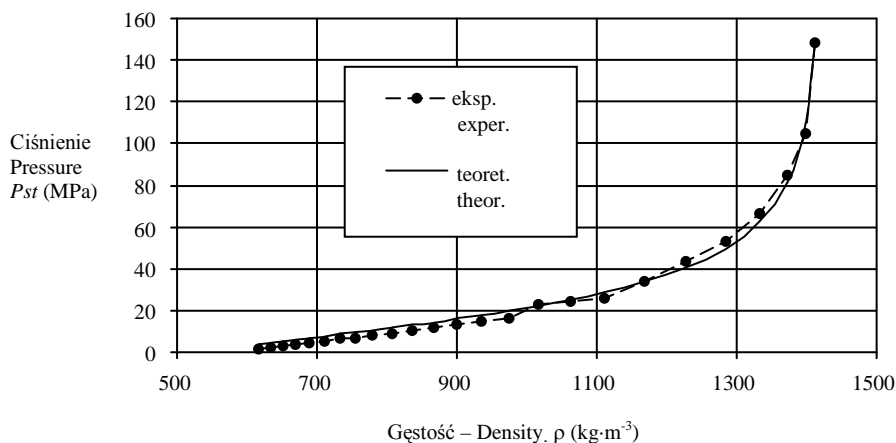
$$p_s = \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{\rho}{\rho_L} \sqrt{\frac{\rho_L(\rho - \rho_o)}{(\rho_L - \rho_o)(\rho_L - \rho)}} \left[ 1 + \sqrt{3} \left( \frac{\rho}{\rho_L} \right)^{2/3} \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_L} \frac{h}{2R}} \right] \quad (26)$$

gdzie:  $\rho$  – gęstość materiału,  $\rho_o$  – gęstość osiadania,  $\rho_L$  – gęstość maksymalna (gęstość przy zerowej porowatości),  $Y_{pl}$  – stała materiałowa,  $h$  – odległość stempla od dna komory,  $R$  – promień komory.

Do weryfikacji modelu otrzymanej zależności wykorzystano wyniki badań procesu prasowania w komorze zamkniętej mieszanek paszowych z udziałem słomy (Hejft 1995). W badaniach tych, zrealizowanych według ułamkowego planu eksperymentu  $2^{4-1}$ , rejestrowano krzywe prasowania mieszanki przy różnych poziomach zmiennych czynników: wilgotności  $W$  – 9 i 16%, zawartości słomy  $S$  – 25 i 50%, długości siewki  $L_t$  – 6 i 10 mm, temperatury  $T$  – 19 i 65°C. Krzywe eksperymentalne ciśnienia prasowania na stemplu w funkcji gęstości  $p_{st} = f(\rho)$  aproksymowano według zależności teoretycznych (26) wyznaczając każdorazowo stałą materiałową  $Y_{pl}$  i gęstość końcową (maksymalną)  $\rho_L$  aglomerowanego materiału metodami numerycznymi. Gęstość osiadania  $\rho_o$  określano bezpośrednio na podstawie danych eksperymentalnych z przecięcia quasi-liniowego odcinka krzywej prasowania z osią odciętych (przy  $p_{st}=0$ ). Jeden z przebiegów krzywej eksperymentalnej i teoretycznej (według 26) pokazano na rysunku 3. Stopień dopasowania krzywych teoretycznych do eksperymentalnych oceniano na podstawie kwadratu współczynnika regresji nieliniowej. We wszystkich przypadkach uzyskano wartości  $R^2$  większe od 0,98. W pracy (Hejft 1995) przy wykorzystaniu do opisu tych samych krzywych prasowania zależności  $p_{st} = A \exp(B\rho + C\rho^2)$  uzyskano  $R^2$  większe od 0,93.

Następnie w wyniku przeprowadzonej analizy statystycznej metodą regresji wielokrotnej otrzymano zależności  $Y_{pl} = f(W, S, L_t, T)$ ,  $\rho_o = f(W, S, L_t, T)$ ,  $\rho_L = f(W, S, L_t, T)$  opisujące wpływ wilgotności, zawartości słomy, długości siewki i temperatury na stałą materiałową, gęstość osiadania i gęstość końcową (przy  $R^2$  większym od 0,97). I tak na przykład dla stałej materiałowej  $Y_{pl}$  (przy aproksymacji według (26) uzyskano następującą zależność:

$$Y_p = 2,9 - 0,5W - 0,4S - 0,2L_t - 0,07T + 0,005S \cdot L_t, \quad (\text{MPa}) \quad (27)$$



**Rys. 3.** Przebieg teoretycznej  $p_{st} = f(\rho)$  i doświadczalnej krzywej prasowania mieszanki paszowej z udziałem słomy ( $W = 9\%$ ,  $S = 25\%$ ,  $L_t = 10$  mm,  $T = 65^\circ\text{C}$ )

**Fig. 2.** Theoretical and experimental pressure-density relations of fodder mixture with straw  $W = 9\%$ ,  $S = 25\%$ ,  $L_t = 10$  mm,  $T = 65^\circ\text{C}$ )

Należy nadmienić, że podstawowe parametry procesu (współczynniki krzywej prasowania) mają ścisłą interpretację fizyczną. Parametr  $\rho_o$  jest graniczną wartością gęstości, od której zagęszczeniu materiału towarzyszy wyraźny wzrost ciśnienia prasowania. Z kolei parametr  $\rho_L$  jest maksymalną gęstością prasowanej mieszanki, przy osiągnięciu której obserwuje się wzrost nacisków prasujących do nieskończoności. Stałą materiałową  $Y_{pl}$  można zinterpretować jako granicę plastyczności na ścinanie dla materiału o gęstości maksymalnej, czyli o zerowej porowatości (Drujanov 1988).

#### WNIOSKI

1. Dla potrzeb analizy procesów zagęszczania mieszanek paszowych oraz innych materiałów roślinnych o cechach ciała idealnie plastycznego ze wzmocnieniem gęstościowym autorzy preferują kryterium uplastycznienia zależne od niezmienników naprężenia  $J_1$  i  $J_2$  oraz dwóch funkcji porowatości.

2. Stosowalność opisywanego warunku plastyczności Greena (6) rozciąga się zarówno na ośrodki sypkie, ośrodki scalone zawierające pory i wady materiałowe (szczeliny), ośrodki porowate, a wreszcie i na materiały lite. W praktyce umożliwia to zastosowanie jednolitego aparatu matematycznego do opisu przebiegu procesu zagęszczania i scalania mieszanek paszowych w szerokim zakresie zmian gęstości: od stanu sypkiego po kompakt. Odpowiednie związki fizyczne otrzymuje się

przyjmując koncepcję potencjału plastycznego, co prowadzi do stowarzyszonego prawa płynięcia. Konsekwencją takiego podejścia jest możliwość wyrażenia tensora naprężenia przez prędkości odkształceń.

3. Uzyskane wyniki modelowania matematycznego procesu zagęszczania i prasowania w komorze zamkniętej mieszanki paszowej z udziałem słomy wskazują na możliwość szerszego wykorzystania teorii plastyczności materiałów sypkich ze wzmocnieniem gęstościowym do modelowania innych, bardziej skomplikowanych procesów brykietowania i granulowania materiałów roślinnych w prasach stemplowych i rotacyjnych.

#### PIŚMIENNICTWO

- Czaban J., 2000. Ciśnieniowa aglomeracja pasz w układzie roboczym granulatora. Praca doktorska, Politechnika Białostocka, Białystok.
- Dec R., 1992. Modelowanie procesu zagęszczania materiałów drobnopowiatrzystych w prasie walcowej. Zeszyty Naukowe AGH, Mechanika, tom 11, z. 2, 101-109.
- Drujanov B.A., 1989. Prikladnaja teorija plastičnosti poristych tel. Mašinostroenie, Moskwa.
- Drzymała Z., 1988. Podstawy inżynierii procesu zagęszczania i prasowania materiałów. Wydanie I, PWN, Warszawa.
- Green R., 1972. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. of Mech. Sci.*, 14, 215-224.
- Hejft R., 1991. Ciśnieniowa aglomeracja pasz i podstawy konstrukcji urządzeń granulująco-brykietujących. Rozprawy Naukowe Politechniki Białostockiej, nr 11, Białystok.
- Hejft R., 1995. Wpływ nacisków prasujących na gęstość brykietów z pasz słomianych, formowanych w komorach zamkniętych. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej. Budowa i Eksploatacja Maszyn, 3, 43-49.
- Kamiński Z., 1995. Energochłonność procesu ciśnieniowej aglomeracji pasz w urządzeniach granulujących. Praca doktorska, Politechnika Białostocka, Białystok.
- Katašinskij V.P., Štern M.V., 1983. Naprjaženno-deformirovanoe sostojanie prokatyvaemogo poroška v zone uplotnenija. I Matematičeskaja model' prokatki v zone uplotnenija. *Proškovaja Metallurgija*, 11, 17-21.
- Kisiel I., Derski W., Izbicki R., Mróz Z., 1982. *Mechanika Techniczna t. VII, Mechanika Skał i Gruntów*, PWN, Warszawa.
- Klässien P.W., Griszajew L.G. 1989. *Podstawy techniki granulacji*. Wyd. I, WNT, Warszawa.
- Kuhn H.A., Downey C.L., 1971. Deformation Characteristics and Plasticity, Theory of Sintered Powder Materials. *Int. Journal of Powder Metallurgy*, 7 (1), 15-25
- Laptev A.M., 1982. Kriterii plastičnosti poristych metallov. *Proškovaja Metallurgija*, 7, 12-17
- Laptev A.M., 1988. Analiz formirovanija i dopressovki poristych vtulok metodom tonkich sečenij, *Proškovaja Metallurgija*, 7, 30-35
- Midukov V.Z. 1991. Vlijanie vnutrennych napraženij na kriterij plastičnosti poristych metallov. *Proškovaja Metallurgija*, 1, 1-7.
- Nowak M., 1996. Modelowanie procesów zagęszczania materiałów rozdrobnionych. Praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań.
- O'Dogherty M.J., 1989. A review of the mechanical behaviour of straw when compressed to high densities. *J. Agric. Engng. Res.* 44, 241-265.

- Okoński St., 1993. Podstawy plastycznego kształtowania materiałów spiekanych z proszków metali. Monografia 153, Wydawnictwa Politechniki Poznańskiej, Kraków.
- Poliščuk V.Ju., 1988. Naprjažennoe sostojanie kontaktnych poverchnostej rabočich organov granuljatorov. Piščevaja Technologija, 3, 94-99.
- Shima S., Oyane M., 1976. Plasticity theory for porous metals. Int. J. of Mech. Sci., 18( 6), 285-291.
- Skorochod V.V., 1979. Reologičeskie osnovy teorii spekanija. Naukovaja dumka, Kiev.
- Skorochod V.V., Tučinskij L.T., 1978. Uslovie plastičnosti poristych tel. Proškovaja Metallurgija, 11, 83-87
- Štern M.B., 1982. Fenomenologičeskie teorii pressovanija poroškov, Naukovaja dumka, Kiev.

THEORETICAL FOUNDATIONS OF COMPACTION AND COMPRESSION  
OF GRANULAR MATERIALS OF VEGETABLE ORIGIN  
WITH PROPERTIES OF PLASTICITY

*Jarosław Czaban, Zbigniew Kamiński*

Faculty of Mechanical Engineering, Białystok University of Technology  
ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok  
e-mail: jczaban@pb.edu.pl

**Abstract.** The processes of compaction and compression of materials of vegetable origin can be used in loose pellets and briquette production for animal feeding and for fuel. These processes require large amounts of energy, up to 40-70 kWh t<sup>-1</sup>. The study was based on the yield condition formulated by Kuhn and Downey and its modifications. Physical relationships for the analysis of stress and strain in modelling of compaction process of materials of vegetable origin with properties of plasticity are described. The analysis uses the basic functions of porosity and the Amontons-Coulomb and Prandl laws of friction for porous materials. The experimental and theoretical tests of compression of fodder mixture with straw were performed in a closed chamber. The identification of material constants was made by using numerical methods and nonlinear regression equations describing the pressure on the stamp of the chamber. The results of experimental and theoretical compression of fodder mixture with straw indicated a possibility of wider use of the theory of plasticity in the modelling of other more sophisticated briquetting and pelleting processes of granular materials of vegetable origin in piston and rotary presses.

**Keywords:** granular solids, compaction, compression, yield criterion