

RADOSŁAW JAGIEŁŁO, CEZARY BEKER

Uproszczony model rozkładu pierśnic jednowiekowych niepielegnowanych drzewostanów sosnowych (*Pinus sylvestris* L.)

Simplified model of diameter distribution for even-aged unthinned Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) stands

ABSTRACT

Jagiello R., Beker C. 2017. Uproszczony model rozkładu pierśnic jednowiekowych niepielegnowanych drzewostanów sosnowych (*Pinus sylvestris* L.). Sylwan 161 (10): 822-830.

Although modelling of the diameter at the breast height (DBH) distributions has long history, theoretical discrete distributions have not so far been used for this purpose. In this study we use measurements covering 25 years (six inventories) without silvicultural influence on 14 even-aged Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) stands to develop the DBH distribution models. Analysed stands are located in Murowana Goślina Forest Experimental Station (W Poland). The objective of the study was to elaborate the most simplified model that applies stand variables easy to assess and uncomplicated theoretical distribution. We employed two-parameter Gamma Poisson (GP) distribution and compared it to Weibull (W) and Sb Johnson (SbJ) ones. When maximum likelihood estimation (MLE) was used, GP gave similar results to W and both were slightly worse than SbJ. We found that both DBH standard deviation and stand density have substantial impact for model bias when above distributions used. Stepwise regression analysis was used for obtaining linear equations for parameter prediction of GP distribution. Then, GP model was simplified by removing standard deviation of DBH (SDD) from equation for overdispersion parameter. Results showed slight increase in mean of error values (i.e. modified Reynolds e index and root mean square error) for simplified model (SGP) compared with those for model including SDD, but differences in means were insignificant. Minimal and mean DBH represent enough variability of diameter distribution to obtain appropriate model based on Gamma Poisson distribution. Error was only 5% greater from four-parameter SbJ (MLE) distribution with similar range: 8.2-28.8% against 5.1-25.5% for SGP and SbJ respectively. The presented model can be used in many branches of forestry for more accurate calculation of stand level variables, when additional allometric equations employed, for instance assimilation apparatus volume or below- and above-ground biomass.

KEY WORDS

diameter distribution, Gamma Poisson, Scots pine, unthinned stand

ADDRESSES

Radosław Jagiełło ⁽¹⁾ – e-mail: rjagiello@man.poznan.pl
Cezary Beker ⁽²⁾ – e-mail: bekerce@up.poznan.pl

⁽¹⁾ Instytut Dendrologii PAN; ul. Parkowa 5, 62-035 Kórnik

⁽²⁾ Katedra Urządzenia Lasu, Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu; ul. Wojska Polskiego 71C, 60-625 Poznań

Wstęp

Modelowanie rozkładów pierśnic było obierane za cel badań od przeszło stulecia – począwszy od Liocourta w roku 1898 [Kerr 2014], po najnowsze prace, w których modelowanym obiektem jest struktura grubości drzewostanów wielogeneracyjnych o bardzo zróżnicowanej budowie [Podlaski 2016]. Dla drzewostanów o budowie mniej złożonej najczęściej uznawanymi przez badaczy za odpowiednie były rozkłady opisane przez Weibulla [1951] oraz Johnsona [1949]. Rozkłady tych autorów są dobrze poznane pod względem metod estymacji parametrów [Siekiński 1992; Zhang i in. 2003; Cao 2004] na cele aproksymacji rozkładów pierśnic drzew.

Sosna zwyczajna jest w Polsce ważnym gatunkiem wykorzystywanym w produkcji drewna, a ponadto coraz częściej podkreśla się udział drzewostanów sosnowych w sekwestracji węgla. Biomasa sosny można oszacować przy pomocy równań allometrycznych [Repola 2009], w których formuły oparte są najczęściej na dwóch zmiennych: pierśnicy oraz wysokości drzewa. Znajomość rozkładu pierśnicy jest przydatna dla ustalenia ilości zakumulowanej biomasy na poziomie drzewostanu, może być również pomocna przy szacowaniu ilości aparatu asymilacyjnego [Socha, Wężyk 2007; Turski i in. 2008]. Model rozkładu pierśnic stanowi też cenne narzędzie przy pracach planistycznych i prognostycznych.

Podlaski i Roesch [2013] poruszyli w swojej pracy zagadnienie ciągłości modelowanej zmiennej – pierśnicy. W przypadku klasyfikacji pierśnic drzew w szeregu rozdzielczym (klasy pierśnic) pierśnica zostaje przekształcona ze zmiennej ciągłej w dyskretną (skokową). Celem pracy była aproksymacja empirycznych rozkładów pierśnic niepielęgowanych drzewostanów sosnowych przy pomocy rozkładu gamma Poissona (rozkładu zmiennej dyskretnej). Dopasowanie tego rozkładu porównano z wcześniej wspomnianymi rozkładami Weibulla oraz Johnsona. Na podstawie łatwych do ustalenia cech drzewostanu – najmniejszej oraz średniej pierśnicy – zbudowano uproszczony model rozkładu grubości drzew. Zaproponowany model stanowi dopełnienie modelu referencyjnego i bonitacyjnego PINUS [Beker, Andrzejewski 2013a, b].

Materiał i metody

Badania przeprowadzono na danych zebranych z 14 stałych powierzchni (poletek) doświadczalnych Zakładu Dendrometrii i Produkcyjności Lasu (UP Poznań), zlokalizowanych na terenie Leśnego Zakładu Doświadczalnego Murowana Goślina. Każde poletko, o powierzchni od 0,16 do 1,00 ha, zostało wyznaczone w innym drzewostanie i w trakcie pierwszej inwentaryzacji obejmowało drzewostany od II do V klasy wieku. Od roku 1990 w drzewostanach nie prowadzono zabiegów pielęgnacyjnych. Pierwszą inwentaryzację wykonano w latach 1990-1991, następną w latach 1993-1994, a kolejne w interwałach pięcioletnich, do roku 2014 włącznie. Według ostatniej rewizji urzędzania lasu badane drzewostany rosną na siedliskach BMśw (3) oraz LMśw (11). Pierśnice wszystkich żywych drzew mierzono w dwóch prostopadłych kierunkach, a następnie uśredniano ($\pm 0,1$ cm). Obliczone średnie pierśnice drzew z poszczególnych inwentaryzacji każdego poletka doświadczalnego zaklasyfikowano do dwucentymetrowych klas grubości. Następnie dla każdej inwentaryzacji oddzielnie nadano numery klasom grubości, poczynając od zera dla najniższej klasy, przypisując następnym klasom kolejne liczby ze zbioru liczb naturalnych. Powyższa czynność ma na celu częściowe zmniejszenie błędu aproksymacji wynikającego z możliwości wystąpienia w modelu drzew mniejszych od najniższej klasy pierśnicy. Rozkład teoretyczny, nieposiadający w swojej formule wartości progowej, zyskuje dzięki tej czynności ukryty (niewystępujący w równaniu) parametr. Do budowy modelu rozkładu pierśnic zastosowano rozkład zmiennej dyskretnej gamma Poissona (GP) o następującej funkcji masy prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(x + \frac{\lambda}{\sigma - 1}\right)}{\Gamma(x+1) \cdot \Gamma\left(\frac{\lambda}{\sigma - 1}\right)} \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right)^x \cdot \sigma^{-\frac{\lambda}{\sigma - 1}}, \text{ dla } x=0, 1, 2, \dots, n; 0 < \lambda; 1 \leq \sigma \quad [1]$$

gdzie:

- x – numer klasy pierśnicy, gdzie najniższa klasa otrzymuje wartość 0,
- $\Gamma(\cdot)$ – funkcja gamma,
- λ, σ – parametry rozkładu.

Dla celów porównawczych dopasowano do rozkładów pierśnic również dwa inne rozkłady, popularne w modelowaniu rozkładów pierśnic – Weibulla (W) (równanie 2) oraz Sb Johnsona (SbJ) (wzór 3) – o następującej postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad [2]$$

gdzie:

- x – zmienna losowa (pierśnica),
- α, β – parametry rozkładu Weibulla.

$$f(x, \xi, \lambda, \gamma, \delta) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(\xi + \lambda - x)(x - \xi)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{x - \xi}{\xi + \lambda - x}\right)\right)^2\right] \quad [3]$$

gdzie:

- x – zmienna losowa (pierśnica),
- $\xi, \lambda, \gamma, \delta$ – parametry rozkładu Sb Johnsona.

Ocenę dopasowania rozkładów teoretycznych do rozkładów empirycznych oparto o indeks błędu zaproponowany przez Reynoldsa i in. [1988] w formie zmodyfikowanej, w której z oceny wyłączony jest wpływ zagęszczenia, a wynikiem ewaluacji jest względna liczba drzew błędnie zaklasyfikowanych przez aproksymowany rozkład:

$$e = \sum_{i=0}^k (p_i - p_i') \quad [4]$$

gdzie:

- p_i – obserwowana względna częstość drzew w i -tej klasie pierśnicy,
- p_i' – modelowa (oczekiwana) względna częstość drzew w i -tej klasie pierśnicy,
- k – liczba klas pierśnic.

Drugim parametrem użytym do oceny aproksymacji, który uwzględni zagęszczenie, był pierwiastek błędu średniokwadratowego:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^k (n_i - n_i')^2}{k}} \quad [5]$$

gdzie:

- n_i – obserwowana liczba drzew w i -tej klasie pierśnicy,
- n_i' – modelowa (oczekiwana) liczba drzew w i -tej klasie pierśnicy,
- k – liczba klas pierśnic.

Do wyznaczenia równań estymacji parametrów rozkładu wykorzystano liniowy model regresji wielorakiej. Zmienne modelu zostały wyselekcjonowane przy pomocy regresji krokowej wstecznej poprzedzonej przez postępującą. Wprowadzanie i usuwanie zmiennych z modelu oparto o minimalną wartość kryterium informacyjnego Schwarza (BIC). Porównanie wartości indeksu błędu e oraz RMSE wynikającego z aproksymacji empirycznego rozkładu pierśnic wykonano przy pomocy analizy kowariancji z efektami mieszanymi. Efektem stałym w dwóch analizach był odpowiednio typ rozkładu lub metoda estymacji parametrów rozkładu GP. W związku z powtarzaniem pomiarami (inventaryzacjami) efektem losowym w modelu było poletko doświadczalne (drzewostan). Jako kowariantów użyto logarytmu dziesiętnego zagęszczenia drzew ($\text{Log}_{10}N$) oraz odchylenia standardowego pierśnic (SDD). Na cele analizy kowariancji przetransformowano indeks błędu e , który jest wartością procentową, zgodnie z metodą opisaną przez Bliss [1938]:

$$e' = \frac{\arcsin(\sqrt{e}) \left(\frac{180}{\pi} \right)}{100} \quad [6]$$

Z kolei wartości RMSE, w związku z odrzuceniem hipotezy na temat braku różnic z rozkładem normalnym (test Shapiro-Wilka), przetransformowano przy użyciu logarytmu naturalnego. Po transformacji test Shapiro-Wilka nie odrzucił hipotezy o braku różnic z rozkładem normalnym. Aproksymację rozkładów empirycznych pierśnic oraz analizy statystyczne wykonano w oprogramowaniu JMP 12.1 Pro (SAS Institute).

Wyniki

Średnia pierśnica drzew na poletkach mieściła się w przedziale 11,2-36,0 cm, natomiast pierśnicowe pole przekroju – 22,6-45,3 m². Zmienność pierśnic w analizowanych drzewostanach, wyrażona odchyleniem standardowym (SD) oraz współczynnikiem zmienności, mieściła się odpowiednio w granicach 3,11-7,93 cm oraz 15,5-32,4%. Wartość SD wzrasta proporcjonalnie do wieku drzewostanu (ryc. 1). Współczynnik determinacji dla poszczególnych drzewostanów zawierał się między 0,939 a 0,999 (średnio 0,981). Asymetria rozkładów pierśnic wynosiła średnio 0,248 i tylko w jednym przypadku była lewostronna (–0,024).

Średnia wielkość błędu wyrażona przy pomocy indeksu e oraz RMSE nie różniła się istotnie statystycznie pomiędzy rozkładem GP oraz W, natomiast najmniejszy błąd uzyskano przy pomocy rozkładu Sbj (tab. 1). Czynniki istotnie zwiększającymi błąd aproksymacji była zmienność pierśnic dla indeksu e oraz zagęszczenie drzew w drzewostanie dla RMSE.

Do analizy regresji krokowej mającej na celu znalezienie zmiennych niezależnych dla równań prognostycznych parametrów rozkładu GP użyto następujących zmiennych: wiek drzewostanu, logarytm dziesiętny zagęszczenia ($\text{log}_{10}N$), minimalna (D_{MIN}) i maksymalna (D_{MAX}) pierśnica, średnia pierśnica (D) oraz odchylenie standardowe pierśnic (SDD). W wyniku regresji krokowej postępującej otrzymano następujące równania:

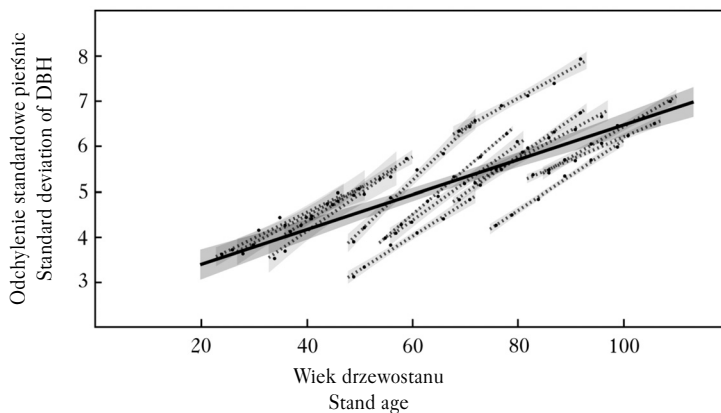
$$\lambda_{.M1} = -0,48721 \cdot D_{\text{MIN}} + 0,4774417 \cdot D + 0,0842759 \cdot SDD - 0,039144 \quad [7]$$

$$R^2 = 0,9587; \text{BIC} = 50,560$$

$$\sigma_{.M1} = -0,0824787 \cdot D_{\text{MIN}} - 0,007394 \cdot D_{\text{MAX}} - 0,073637 \cdot D + 0,3955013 \cdot SDD + 0,2212134 \quad [8]$$

$$R^2 = 0,8469; \text{BIC} = -153,505$$

Następnie, bazując na parametrach wybranych powyżej, zastosowano regresję krokową wsteczną i otrzymano modele w postaci:



Ryc. 1.

Zmiana z wiekiem drzewostanu odchylenia standardowego pierśnic

Changes of diameter at breast height standard deviation with stand age

linia ciągła – wszystkie drzewostany razem ($R^2=0,634$), linie przerywane – poszczególne drzewostany pojedynczo; zaciemniony obszar określa przedział ufności ($\alpha=0,05$)

solid line – all stands together ($R^2=0.634$), dashed lines – individual stands; shaded area indicate confidence interval ($\alpha=0.05$)

Tabela 1.

Średnia (M; ta sama litera oznacza brak istotnych różnic) i odchylenie standardowe (SD) oraz wyniki analizy kowariancji indeksu błędu ϵ oraz RMSE dla modeli opartych o rozkłady gamma Poissona (GP), Weibulla (W) i Sb Johnsona (SbJ) z parametrami estymowanymi metodą największej wiarygodności

Mean (M, the same letter indicates no significant differences), standard deviation (SD) and results of analysis of covariance for error index ϵ and RMSE of models based on Gamma Poisson (GP), Weibull (W) and Johnson's Sb (SbJ) distributions with parameters estimated with maximum likelihood method

	M	SD	df; df error	F	p	
ϵ	GP	0,149a	0,0415			
	W	0,153a	0,0417	2; 234	14,55	<0,0001
	SbJ	0,129b	0,0377			
	Log ₁₀ N			1; 234	0,051	0,821
	SDD			1; 234	28,04	<0,0001
	Drzewostan (stand)*			13; 234	10,69	<0,0001
Ln(RMSE)	GP	2,280a	0,780			
	W	2,304a	0,760	2; 234	11,27	<0,0001
	SbJ	2,134b	0,719			
	Log ₁₀ N			1; 234	61,70	<0,0001
	SDD			1; 234	3,22	0,074
	Drzewostan (stand)*			13; 234	10,17	<0,0001

Kowarianty: Log₁₀N – logarytm dziesiętny zagęszczenia drzewostanu, SDD – odchylenie standardowe pierśnicy; * efekt losowy
Covariants: Log₁₀N – stand density common logarithm, SDD – standard deviation of diameter at breast height; * random effect

$$\lambda_{M2} = -0,512635 \cdot D_{MIN} + 0,5048816 \cdot D + 0,0652227 \quad [9]$$

$$R^2 = 0,9572; \text{BIC} = 47,060$$

$$\sigma_{M2} = -0,0808883 \cdot D_{MIN} - 0,080993 \cdot D + 0,3746192 \cdot SDD + 0,2183499 \quad [10]$$

$$R^2 = 0,8393; \text{BIC} = -153,911$$

W celu uproszczenia modelu usunięto z równania SDD i otrzymano:

$$\sigma_U = -0,032128 \cdot D_{MIN} + 0,0409814 \cdot D + 0,6822775 \quad [11]$$

$$R^2 = 0,4395; \text{BIC} = -55,425 \text{ dla } \sigma_f < 1 \text{ należy przyjąć } \sigma_f = 1.$$

Otrzymano cztery modele oparte o rozkład gamma Poissona, różniące się równaniami zastosowanymi do estymacji parametrów, które nazwano odpowiednio:

GPE – dla modelu z estymacją parametrów opartą o dane empiryczne (estymacja metodą największej wiarygodności),

GPM1 – dla modelu z estymacją parametrów równaniami 7 i 8,

GPM2 – dla modelu z estymacją parametrów równaniami 9 i 10,

SGP – dla modelu z estymacją parametrów równaniami 9 i 11.

Uproszczenie modelu poprzez wyeliminowanie z równań odchylenia standardowego pierśnic pogorszyło ocenę modelu (R^2 oraz BIC), jakkolwiek końcowa ocena modeli opartych na parametrach estymowanych przy pomocy wyprowadzonych równań była zbliżona pomiędzy nimi i w niewielkim stopniu gorsza od parametrów estymowanych przy pomocy metody największej wiarygodności (tab. 2). Średnio najniższy błąd (indeks e i RMSE) uzyskano dla parametrów estymowanych na podstawie znanych pomiarów pierśnic metodą MLE (GPE), natomiast najwyższy dla modelu uproszczonego (SGP). Niewielką odchyłkę zaobserwowano pomiędzy modelem GPM1, GPM2 oraz SGP. Ponownie czynnikiem istotnie wpływającym na wielkość błędu wyrażoną względną liczbą drzew nieprawidłowo zaklasyfikowanych do stopni grubości (indeks e) była zmienność pierśnic, a w przypadku RMSE – zagęszczenie. Analizując przebieg korelacji indeksu e i RMSE wraz z wiekiem drzewostanu (ryc. 2A), nie można stwierdzić korelacji pierwszego wskaźnika błędu z wiekiem – wykazuje on trend typu *constans* w całym zakresie wieku analizowanych drzewo-

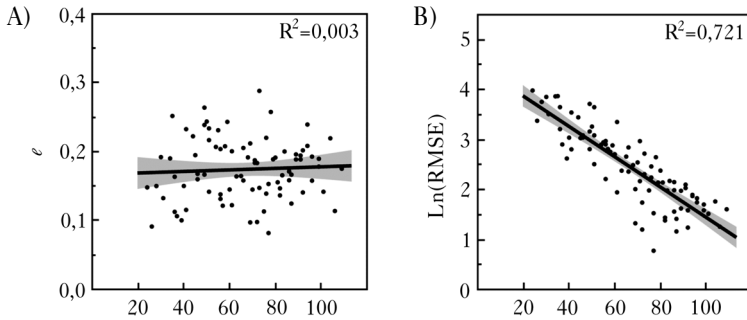
Tabela 2.

Średnia (M; ta sama litera oznacza brak istotnych różnic) i odchylenie standardowe (SD) oraz wyniki analizy kowariancji indeksu błędu e oraz RMSE dla modeli opartych o rozkład gamma Poissona z parametrami estymowanymi przy pomocy równań 7 i 8 (GPM1), 9 i 10 (GPM2), 9 i 11 (SGP) oraz metodą największej wiarygodności (GPE)

Mean (M, the same letter indicates no significant differences), standard deviation (SD) and results of analysis of covariance for error index e and RMSE of models based on Gamma Poisson with parameters estimated with equations 7 and 8 (GPM1), 9 and 10 (GPM2), 9 and 11 (SGP) as well as maximum likelihood method (GPE)

		M	SD	df; df error	F	p	
e	GPE	0,149b	0,042				
	GPM1	0,167a	0,043	3; 317	8,26	<0,0001	
	GPM2	0,168a	0,044				
	SGP	0,174a	0,044				
		Log ₁₀ N			1; 317	1,26	0,263
		SDD			1; 317	5,44	0,020
		Drzewostan (stand)*			13; 317	14,46	<0,0001
Ln(RMSE)	GPE	2,280b	0,780				
	GPM1	2,399a	0,780	3; 317	7,75	<0,0001	
	GPM2	2,405a	0,780				
	SGP	2,450a	0,774				
		Log ₁₀ N			1; 317	61,81	<0,0001
		SDD			1; 317	3,25	0,072
		Drzewostan (stand)*			13; 317	14,43	<0,0001

Kowarianty: Log₁₀N – logarytm dziesiętny zagęszczenia drzewostanu, SDD – odchylenie standardowe pierśnicy; * efekt losowy
Covariants: Log₁₀N – stand density common logarithm, SDD – standard deviation of diameter at breast height; * random effect



Ryc. 2.

Zmiana z wiekiem drzewostanu wartości indeksu błędu e (A) oraz RMSE (B) modelu uproszczonego SGP
 Changes of simplified model SGP error index e (A) and RMSE (B) values with stand age
 zacieniony obszar określa przedział ufności ($\alpha=0,05$)
 shaded area indicate confidence interval ($\alpha=0,05$)

stanów sosnowych. Z kolei RMSE wykazuje wyraźny trend redukcji z wiekiem, a zatem i spadkiem zagęszczenia (ryc. 2B).

Dyskusja

W przedstawionej pracy po raz pierwszy zaprezentowano użycie teoretycznego rozkładu zmiennej dyskretnej w celu modelowania rozkładu pierśnic drzew. Wyniki wskazują, że rozkład gamma Poissona nie jest gorszy od uznawanego za bardzo dobry rozkład Weibulla, który był użyty między innymi w modelu rozkładu pierśnic drzewostanów bukowych [Nord-Larsen, Cao 2006]. W porównaniu z 4-parametrowym rozkładem Sbj średnie wartości wskaźników błędu aproksymacji dla rozkładu gamma Poissona są wyższe o 2% (indeks e) oraz 7% (\ln RMSE) (tab. 1). W pracach innych autorów rozkład Sbj, w zależności od użytej metody estymacji parametrów, generował zarówno niższe [Zhang i in. 2003], jak i wyższe [Palahí i in. 2007] wartości RMSE w porównaniu z innymi rozkładami.

Prosta metoda prognozowania parametrów („parameter prediction”) była wcześniej krytykowana [Hyink, Moser Jr. 1983; Burkhart, Tomé 2012], głównie ze względu na słabe wyniki korelacji parametrów z cechami drzewostanu. Również Cao [2004] spośród sześciu różnych metod estymacji parametrów rozkładu Weibulla uzyskał najslabsze wyniki dla metody prognozowania parametrów. W niniejszej pracy rozkład GP z parametrami estymowanymi tą metodą, mimo braku porównania z innymi metodami nieiteracyjnymi, w najgorszym możliwym scenariuszu może być modelem gorszym średnio o 3% (w porównaniu z GPE), biorąc za miarę zmodyfikowany indeks błędu Reynoldsa i in. [1988]. Model regresji wielorakiej, poprzedzony użyciem narzędzia selekcyjnego (regresją krokową), pozwolił na bardzo dokładne oszacowanie jednego z parametrów (λ), przy znajomości jedynie dwóch, a dla drugiego (σ) trzech zmiennych, związanych ściśle z pierśnicami drzew. Maltamo i in. [1995] podjęli próbę zbudowania modelu przy pomocy rozkładów Weibulla i beta bazujących na innych niż w niniejszej pracy cechach drzewostanów (m.in. wieku drzewostanu, przeciętnej pierśnicy, wysokości przeciętnej). Zastosowana przez nich metoda prognozowania parametrów równaniami regresyjnymi okazała się lepsza dla rozkładu Weibulla w wersji dwuparametrowej niż trzyparametrowej. Być może takie podejście do modelowania rozkładu pierśnic jest lepsze dla rozkładów o mniejszej liczbie parametrów. Równania tego typu zastosowali w modelowaniu rozkładu pierśnic drzewostanów bukowych Nord-Larsen i Cao [2006], przy czym zmiennymi użytymi przez tych autorów była pierśnica przeciętna oraz wysokość górna

(H_{100}). Zaprezentowane przez nich modelowe rozkłady pierśnic były w około 40% uznane za statystycznie różne od empirycznych, szczególnie w drzewostanach młodszych. Zhou i McTague [1996] oraz Zhang i in. [2003] zastosowali metodę mieszaną, gdzie część parametrów rozkładu Sb Johnsona była estymowana przy użyciu regresji liniowej, co skutkowało bardzo dobrym dopasowaniem w porównaniu z innymi testowanymi metodami.

Wielkość błędu aproksymacji wynika głównie z dwóch czynników: struktury pierśnic oraz zagęszczenia drzewostanu. Odchylenie standardowe pierśnicy, które jest miarą mówiącą o zmienności tej cechy (a zatem w pewnym uproszczeniu o strukturze grubości drzew), jest istotnym czynnikiem tłumaczącym zmienność wartości indeksu e , a zagęszczenie drzewostanu – RMSE (tab. 1 i 2). Podobna zależność została również zauważona wcześniej przez Jagiełłę i in. [2016] w modelowaniu rozkładu pierśnic drzewostanów bukowych. Monokultury bukowe charakteryzują się bardziej złożoną strukturą pierśnic (m.in. o wyższej zmienności). W efekcie średnia wartość błędu (indeks e) aproksymacji rozkładu W i SbJ jest wyższa o około 10% w porównaniu z drzewostanami sosnowymi (tab. 1).

Zagęszczenie jest cechą, która ma ogromne znaczenie ekologiczne [Jagodziński, Oleksyn 2009a-c]. Okazuje się, że istotnie wpływa również na efektywność modelowania rozkładu pierśnic przy pomocy teoretycznych rozkładów zmiennych. Zagęszczenie wyrażone liczbą drzew na jednostkę powierzchni zmniejsza się z wiekiem, a odchylenie standardowe pierśnic rośnie (ryc. 1). Jednakże czynniki te nie kompensują się – wzrost wpływu odchylenia standardowego jest na tyle nieduży, że obserwuje się brak korelacji pomiędzy indeksem e a wiekiem (ryc. 2A), natomiast RMSE wyraźnie się zmniejsza (ryc. 2B).

Podsumowanie

Zaprezentowany w niniejszej pracy model służący do aproksymacji rozkładu pierśnic w drzewostanach sosnowych ma zasadniczą zaletę: jest prosty i nie wymaga wysokich nakładów pracy ze strony użytkownika. Oczekiwany błąd na poziomie 17% jest stosunkowo duży, ale względnie stały w gradiencie wieku. Należy wziąć pod uwagę, że na błąd składają się również przesunięcia o jedną klasę grubości. Prawdopodobnie błąd będzie się częściowo równoważył dla obliczeń na poziomie drzewostanu (np. zasobność, pierśnicowe pole przekroju drzewostanu). Zmniejszanie się zagęszczenia wraz z wiekiem skutkuje zwiększeniem dokładności modelu wyrażonego bezwzględną liczbą drzew w poszczególnych klasach grubości. W tym gradiencie wzrasta również ekonomiczna wartość surowca drzewnego, abstrahując od dużego znaczenia jego jakości – własności, która w przyszłości może być włączona jako kolejny wymiar w modelowaniu rozkładów pierśnic rozkładami teoretycznymi zmiennych dyskretnych.

Literatura

- Beker C., Andrzejewski T. 2013a. Model wzrostu niepielęgnowanych drzewostanów sosnowych I. Lokalny model referencyjny PINUS ZIELONKA. Acta Scientiarum Polonorum Silvarum Colendarum Ratio et Industria Lignaria 12 (3): 5-13.
- Beker C., Andrzejewski T. 2013b. Model wzrostu niepielęgnowanych drzewostanów sosnowych II. Lokalny model bonitacyjny PINUS. Acta Scientiarum Polonorum Silvarum Colendarum Ratio et Industria Lignaria 12 (3): 15-23.
- Bliss C. I. 1938. The Transformation of Percentages for Use in the Analysis of Variance. The Ohio Journal of Science 38 (1): 9-12.
- Burkhardt H. E., Tomé M. 2012. Diameter-distribution models for even-aged stands. W: Burkhardt H. E., Tomé M. [red.]. Modeling Forest Trees and Stands. Springer Science + Business Media, Dordrecht – Heidelberg – New York – London. 261-297.
- Cao Q. V. 2004. Predicting Parameters of a Weibull Function for Modeling Diameter Distribution. Forest Science 50 (5): 682-685.

- Hyink D. M., Moser Jr. J. W. 1983. A generalized framework for projecting forest yield and stand structure using diameter distributions. *Forest Science* 29 (1): 85-95.
- Jagiełło R., Beker C., Jagodziński A. M. 2016. Ocena zgodności rozkładów empirycznych pierśnic drzewostanów bukowych różnych klas wieku z wybranymi rozkładami teoretycznymi. *Sylvan* 160 (2): 107-119.
- Jagodziński A. M., Oleksyn J. 2009a. Ekologiczne konsekwencje hodowli drzew w różnym zagęszczeniu. I. Wzrost i rozwój drzewostanu. *Sylvan* 153 (2): 75-85.
- Jagodziński A. M., Oleksyn J. 2009b. Ekologiczne konsekwencje hodowli drzew w różnym zagęszczeniu. II. Produkcja i alokacja biomasy, retencja biogenów. *Sylvan* 153 (3): 147-157.
- Jagodziński A. M., Oleksyn J. 2009c. Ekologiczne konsekwencje hodowli drzew w różnym zagęszczeniu. III. Stabilność drzewostanu, fitoklimat i różnorodność biologiczna. *Sylvan* 153 (4): 219-230.
- Johnson N. L. 1949. Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation. *Biometrika* 36 (1): 149-176.
- Kerr G. 2014. The management of silver fir forests: de Liocourt (1898) revisited. *Forestry* 87 (1): 29-38.
- Maltamo M., Puumalainen J., Päivinen R. 1995. Comparison of Beta and Functions for modelling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. *Scandinavian Journal of Forest Research* 10 (1-4): 284-295.
- Nord-Larsen T., Cao Q. V. 2006. A diameter distribution model for even-aged beech in Denmark. *Forest Ecology and Management* 231 (1-3): 218-225.
- Palahí M., Pukkala T., Blasco E., Trasobares A. 2007. Comparison of beta, Johnson's SB, Weibull and truncated Weibull functions for modeling the diameter distribution of forest stands in Catalonia (north-east of Spain). *European Journal of Forest Research* 126 (4): 563-571.
- Podlaski R. 2016. Highly skewed and heavy-tailed tree diameter distributions: approximation using the gamma shape mixture model. *Canadian Journal of Forest Research* 46 (11): 1275-1283.
- Podlaski R., Roesch F. A. 2013. Aproksymacja rozkładów pierśnic drzew w drzewostanach dwugeneracyjnych za pomocą rozkładów mieszanych. II. Testy zgodności. *Sylvan* 157 (9): 652-661.
- Repolo J. 2009. Biomass Equations for Scots Pine and Norway Spruce in Finland. *Silva Fennica*: 43 (4): 625-647.
- Reynolds M. R., Burk T. E., Huang W.-C. 1988. Goodness-of-Fit Tests and Model Selection Procedures for Diameter Distribution Models. *Forest Science* 34 (2): 373-399.
- Siekierski K. 1992. Comparison and evaluation of three methods of estimation of the Johnson SB distribution. *Biometrical Journal* 34: 879-895.
- Socha J., Wężyk P. 2007. Allometric equations for estimating the foliage biomass of Scots pine. *European Journal of Forest Research* 126 (2): 263-270.
- Turski M., Beker C., Kaźmierczak K., Najgrakowski T. 2008. Allometric equations for estimating the mass and volume of fresh assimilational apparatus of standing scots pine (*Pinus sylvestris* L.) trees. *Forest Ecology and Management* 255 (7): 2678-2687.
- Weibull W. 1951. A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. *Journal of Applied Mechanics* 18 (3): 293-297.
- Zhang L., Packard K. C., Liu C. 2003. A comparison of estimation methods for fitting Weibull and Johnsons SB distributions to mixed spruce-fir stands in northeastern North America. *Canadian Journal of Forest Research* 33 (7): 1340-1347.
- Zhou B., McTague J. P. 1996. Comparison and evaluation of five methods of estimation of the Johnson system parameters. *Canadian Journal of Forest Research* 26 (6): 928-935.